Übungen in Analysis ◇ Exercices en analyse ◇ I1 ◇ II /1N

Probl. 1 Ableitung mit Mathematica: • Dérivée à l'aide de Mathematica:

$$f_1(x) = e^{\frac{\sin(\cos(\cot(x)))}{\log(x\ \log(x^5 - \log(x)))}}\ \tan(\cos(x^{-4} - 3\ \sin(x)))$$

$$f_2(x) = x^{x^{x^{x^{x^x}}}}, \quad f_3(x) = \left(\left(\left(\left(x^x\right)^x\right)^x\right)^x\right)^x, \quad f_4(x) = x^{\left(x^{\left(x^{\left(x^{x}\right)}\right)}\right)}$$

$$f_5(x) = \left(\left(\left(\left(x^x\right)^{x^x}\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}\right)^{\left(\left(x^x\right)^{x^x}\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}}\right)^{\left(\left(\left(x^x\right)^{x^x}\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}\right)^{\left(\left(x^x\right)^{x^x}\right)^{\left(x^x\right)^{x^x}}}}$$

Probl. 2 Iteration eines Gleichungssystems • Itération d'un système d'équations

Ein lineares Gleichungssystem soll rasch näherungsweise gelöst werden. Idee: Versuche eine Iteration mit Mathematica.
• *Il faut très vite résoudre un système d'équations linéaires approximativement. Idée: Essaie une itération avec Mathematica.*

$A \cdot \vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{aligned} 6.25\,\boxed{x_1} + 2.08\,x_2 - 1.44\,x_3 &= 2.59 \\ 1.78\,x_1 - 4.61\,\boxed{x_2} + 0.44\,x_3 &= 5.22 \\ -1.36\,x_1 + 0.95\,x_2 + 3.75\,\boxed{x_3} &= 3.61 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{lclcl} x_1 &=& \frac{1}{6.25}(2.59 \qquad - 2.08\,x_2 + 1.44\,x_3) & x_{1,k+1} &=& \frac{1}{6.25}(2.59 - 2.08\,x_{2,k} + 1.44\,x_{3,k}) \\ x_2 &=& \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78\,x_1 \qquad - 0.44\,x_3) \rightsquigarrow & x_{2,k+1} &=& \frac{1}{4.16}(5.22 - 1.78\,x_{1,k+1} - 0.44\,x_{3,k}) \\ x_3 &=& \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36\,x_1 - 0.95\,x_2 \qquad) & x_{3,k+1} &=& \frac{1}{3.75}(4.61 + 1.36\,x_{1,k+1} - 0.95\,x_{2,k+1}) \end{array}$$

Start: Setze z.B. • *Valeurs initiales: Mettre p.ex.:* $x_{2,0} = 0$, $x_{3,0} = 0$.
8 Schritte. • *8 étapes.*

Vergleiche mit den exakten Werten! • *Comparer avec les valeurs exactes!*

Versuche: • *Essayer:*

$A \cdot \vec{x} + \vec{b}$

$$\begin{aligned} 1\,\boxed{x_1} + 2\,x_2 + 3\,x_3 &= 2.59 \\ 2\,x_1 + 3\,\boxed{x_2} + 4\,x_3 &= 5.22 \\ -1\,x_1 + 1\,x_2 + -1\,\boxed{x_3} &= 3.61 \end{aligned}$$

30 Schritte. Was passiert? • *30 étapes. Qu'est–ce que se passe?*

Probl. 3 Polynomkurve durch Punkte, Steigung • Courbe polynomiale par des points, pente

Geg.: • Donné: $P_1 = (-2; 2),\ P_2 = (\frac{1}{2}; 0),\ P_3 = (2; 0),\ \tan(\alpha(P_3)) = 2$

Versuche, eine Polynomkurve 3. Grades durch $P_1,\ P_2,\ P_3$ zu legen. • *Essayer à poser une courbe polynomiale à travers $P_1,\ P_2,\ P_3$.* $\leadsto$ $f(x) = a_3\,x^3 + a_2\,x^2 + a_1\,x + a_0$

Mathematica-Plot der Kurve? • *Plot de la courbe avec Mathematica?*

Ersetze $P_2 = (\frac{1}{2}; 0)$ durch $P_2 = (-\frac{1}{2}; 0)$ und suche den Wendepunkt (Mathematica-Plot).
• *Remplacer $P_2 = (\frac{1}{2}; 0)$ par $P_2 = (-\frac{1}{2}; 0)$ et trouver le point d'inflexion (Mathematica-Plot).*

Probl. 4 Extremalproblem • Problème de valeur extrême

Ein A4-Blatt ($210\,mm \times 297\,mm$) wird 4 mal so gefaltet, dass an jeder Ecke ein Quadrat entsteht. Nachdem die 4 Quadrate weggeschnitten worden sind, entsteht durch die Faltung ein Schachteldeckel. Dieser wird als Notbehausung einer Maus in einem Käfig verwendet werden. Wie gross muss die Quadratseite x gewählt werden, damit das Volumen maximal wird? Lösung mit Mathematica!
• *Une feuille A4 ($210\,mm \times 297\,mm$) soit pliée de façon qu'on obtienne un carré à chaque coin. Après avoir coupé les 4 carrés, on obtient par ce pliage un couvercle de boîte. Celui-ci est utilisé comme refuge d'une souris dans une cage. Quelle est la grandeur x du côté d'un carré pour que le volume soit maximal? Solution avec Mathematica!*

Probl. 5 Differentialrechnung in der Geometrie • Calcul différentiel dans la géométrie

$$f(x) = a(x-1)(x+1)$$

In den Nullstellen werden die Tangenten gezogen. Die x–Achse bildet mit den Tangenten ein Dreieck. Berechne den Punkt des Dreiecks auf der y–Achse in Abhängigkeit von a mit Mathematica.

- *Dans les points de zéro, les tangentes sont établies. L'axe x formen avec les tangentes un triangle. Calculer le point du triangle sur l'axe y dépendant de a avec Mathematica.*