Test ◇ **B1–09//10–02** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu **unterstreichen**.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen **Strich** zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 (a) i. Berechne von Hand und vereinfache so weit wie möglich:

$$f(x) = \left(\frac{1}{5}\,x^5 + \frac{1}{4}\,x^4 + \frac{1}{3}\,x^3 + \frac{1}{2}\,x^2 + x - 1\right) \;\Rightarrow\; f\,'(x)\cdot(x-1) = ?$$

ii. $\dfrac{df(x)}{dx} =\big|_{x=1}\ ?$ ($x = 1$ einsetzen.)

iii. Berechne den Steigungswinkel α von f im Punkt $P(1; f(1))$ in rad.

(b) i. Leite die folgenden Funktionen an der Stelle $x = 0$ ab: $f_1(x) = \ln(3\,x^2 + 1)$, $f_2(x) = e^{a\,x}$, $f_3(a) = e^{a\,x}$, $f_4(x) = e^{2\,a}$, $f_5(x) = \tan(x+1) + \sin(x^2)$. Berechne damit $f_1'(x) + f_2'(x) + f_3'(x) + f_4'(x) + f_5'(x)$ an der Stelle $x = 0$ und $a = 1$.

ii. Sei jetzt $a = 2$. Untersuche so, welche der Funktionen $f_1, \ldots, f_5$ bei $x = \pi$ den grössten berechenbaren Steigungswinkel hat und wie gross dieser ist in rad.

(c) Zeige die Berechnung der Ableitung von Hand und vereinfache so weit wie möglich:
$g_1(x) = \dfrac{e^{(2\,x)}}{x^2-1} + x\,cos(x^2) \;\Rightarrow\; g_1'(0) = ?$

(d) Zeige die Berechnung der Ableitung von Hand und vereinfache so weit wie möglich:
$g_2(x) = \dfrac{-1}{(x-1)(x+2)} \;\Rightarrow\; g_2'(0) = ?$

Probl. 2

$$f(x) = x\,(x-1)\,(x-3)\,(x-6) + 40$$

(a) Schreibe $f(x)$ als Polynom.

(b) Skizziere die Funktion über $D_f = [-1,\,7]$.

(c) Berechne den Steigungswinkel der Tangente für $x = 0$ und für $x = 6$ in Grad.

(d) Berechne Minima und Maxima von $f(x)$ mit Hilfe der Differentialrechnung (Dezimalzahlen).

(e) Suche den(die) Wendepunkt(e) von $f(x)$ mit Hilfe der Differentialrechnung (Dezimalzahlen).

(f) Untersuche, ob f in $D_f = [-1,\,7]$ Nullstellen besitzt und berechne diese allenfalls (Dezimalzahlen).

Probl. 3

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

(a) Linearisiere $f(x)$ bei $x_0 = 0$. D.h. berechne $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Vereinfache so weit wie möglich.

(b) Berechne den Fehler zwischen dem richtigen Funktionswert und der Linearisierung bei $x = 0.1$. Wie gross ist der Fehler in Prozent vom richtigen Funktionswert?

Probl. 4 Berechne den Flächeninhalt (Dezimalzahl) zwischen den Graphen der Funktionen $f(x) = x\,(x-1)\,(x-3)\,(x-6)$ und $h(x) = -12\,x\,(x-3)$ über dem Intervall $I = [0,\,3]$.

Probl. 5 (a) Berechne den Schwerpunkt in y-Richtung der Funktion $f(x) = x\,\sin(x)$ (Dezimalzahl) über dem Intervall $I = [0,\,\pi]$ und skizziere die Funktion sowie die Schwerpunktskoordinate in y-Richtung möglichst exakt.

(b) Berechne den Schnittpunkt der Tangente an den Graphen durch $(\frac{\pi}{2},\, f(\frac{\pi}{2}))$ mit der y–Achse und skizziere die Situation (Dezimalzahl).

Probl. 6 Der Graph der Funktion $h(x) = -12\,x\,(x-3)$ wird über dem Intervall $I = [0,\,3]$ um die x–Achse rotiert. Berechne:

(a) Die Kurvenlänge des Graphen (Dezimalzahl).

(b) Den Inhalt des Rotationskörpers (Dezimalzahl).

(c) Die Oberfläche des Rotationskörpers (Dezimalzahl).

Probl. 7 Berechne die Lösung, falls möglich:

$$y'(x) = \frac{\cos(x)}{y(x)},\ \ y(0) = 0$$

Probl. 8 Berechne das Resultat exakt, falls möglich: Auf einen Würfel mit dem Volumeninhalt 1 wird ein zweiter mit 1/3 des Inhalts des unteren Würfels gestellt. Darauf wiederum ein dritter mit 1/3 des Inhalts des zweiten Würfels, darauf ein vierter mit 1/3 des Inhalts des dritten Würfels und so fort in alle Ewigkeit. Wie gross ist der Inhalt aller dieser Würfel zusammen? Und wie hoch wird der so erzeugte Würfelturm?

Probl. 9 Ein freistehender, zylindrischer Wassertank wird auf einer Seite durch eine aufgesetzte Halbkugel abgeschlossen. Der gesamte Inhalt beträgt $4000\,m^3$. Wie gross muss man den Radius wählen, wenn die Oberfläche minimal sein soll, um den Wärmeaustausch zu minimieren?

Probl. 10 Eine Emissionsquelle A stösst doppelt so viele gesundheitsgefährdende Schadstoffe aus wie eine andere Quelle B, welche $5\,km$ weit entfernt liegt. Zwecks Überwachung soll auf der Linie zwischen den beiden Stationen eine Messstation gebaut werden. Die durch jede Station erzeugte Belastung nimmt mit dem Abstand von der Station im Quadrat ab. (Da bei jeder Station der Schadstoffdurchfluss durch jede Halbkugel um die Station konstant ist.) Wie weit von A entfernt baut man die Station, wenn die Schadstoffbelastung dort minimal sein soll?

Viel Glück! WIR1 09/10