Test ◇ B1–(10/11)–03 ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden.
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Probl. 1 Löse die folgende Matrixgleichung ($X = ?$) unter der Annahme, dass alle Matrizen regulär sind:

$$A^{-1} \cdot A^{-1} \cdot M \cdot X \cdot A \cdot A = A^{-1} \cdot A \cdot M^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} \cdot A + E$$

Probl. 2 Gegeben sind zwei Ebenen:

$$\Phi_1 : \ \vec{v}_1(\lambda, \mu) = \overrightarrow{OA_1} + \lambda \ \overrightarrow{A_1B_1} + \mu \ \overrightarrow{A_1C_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2 : \ \vec{v}_2(\nu, \sigma) = \overrightarrow{OA_2} + \nu \ \overrightarrow{A_2B_2} + \sigma \ \overrightarrow{A_2C_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Weiter kennt man noch die Punkte $Q_1(10; -10; 12)$, $Q_2(-5; -6; 8)$.

(a) Berechne das Volumen des Tetraeders, welches gegeben ist durch A_1, B_2, C_1, Q_2.

(b) Berechne den Abstand des Punktes Q_2 von Φ_2.

(c) Berechne die Durchstosspunkte D_1, D_2, D_3 der Schnittgeraden s von Φ_1 und Φ_2 mit den drei Koordinatenebenen.

(d) Ermittle die Distanz der Durchstosspunkte Q_3, Q_4 der Geraden $\overline{Q_1Q_2}$ mit den Ebenen Φ_1, Φ_2.

(e) Berechne den Winkel $\angle(Q_1OQ_2)$.

Probl. 3 Gegeben ist die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -3 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Determinante der Matrix M sowie diejenige von $M + M$.

(b) Begründe damit, ob die Inverse M^{-1} der Matrix existiert.

(c) Berechne die inverse Matrix M^{-1}, falls sie existiert.

(d) Berechne die Inverse der Matrix M^T, falls sie existiert.

(e) Gibt es eine Beziehung zwischen M^{-1} und $(M^T)^{-1}$? Wenn ja, welche?

(f) Berechne exakt die Determinante von:
$M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} \cdot M^{-1} := (M^{-1})^7$ %

(g) Bilde den Punkt $P_0(2,5,8)$ mittles M in P_1 ab, d.h. bilde den Vektor $\overrightarrow{OP_0}$ in $\overrightarrow{OP_1}$ ab. Bilde danach P_0 mittles M^{-1} in P_2 ab. Berechne P_1 und P_2.

(h) Berechne nun diejenige Matrix in Zahlen und auch abstrakt, welche P_2 in P_1 abbildet.

Probl. 4 Gegeben sind die Gleichungssysteme

(a)

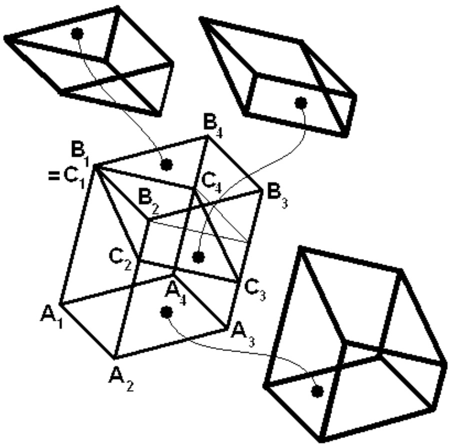
$$\begin{aligned} 3\,x+3\,y+4\,z &= 2\\ x+2\,y-z &= 1\\ 4\,x+2\,y+10\,z &= 2 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 3\,x+3\,y+4\,z &= 2\\ x+2\,y-z &= 1\\ 4\,x+2\,y+10\,z &= 5 \end{aligned}$$

Demonstriere damit den Gauss–Jordan–Algorithmus und finde jeweils die allgemeine Lösung und dazu jeweils die Dimension von $\mathbb{L}$!

Probl. 5 Gegeben sind die Punkte $A_1 = O$, dazu $A_2 = (4;-2;-1)$, $A_4 = (1;5;2)$ sowie $B_1 = (2;1;10)$.
Damit ist ein Spat mit den Eckpunkten $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4,\ B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4$ bestimmt.
Die Punkte $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ entstehen durch einen Schnitt des Spates mit einer Ebene Φ. Dabei gilt $B_1 = C_1$, $|\overline{A_4C_4}| = 0.8\cdot|\overline{A_4B_4}|$, $|\overline{A_2C_2}| = 0.7\cdot|\overline{A_2B_2}|$.



(a) Berechne die restlichen Eckpunkte des Spats $A_3,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ C_2,\ C_3,\ C_4$. Schreibe die Werte übersichtlich in eine Tabele.

(b) Berechne das Spatvolumen.

(c) Berechne das abgeschnittene Volumen mit den Eckpunkten $B_1,\ B_2,\ B_3,\ B_4,\ C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$.

(d) Wieviel % macht das abgeschnittene Volumen vom Gesamtvolumen des Spats aus?

Probl. 6 Gegeben sind die Punkte $A_1 = (-1;0;1)$, $A_2 = (4;-2;-1)$, $A_3 = (1;5;2)$, $A_4 = (2;1;10)$ sowie die Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3\\ -3 & 1 & 3\\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

(a) Berechne die Koordinaten der Punkte auf den Geraden durch $\overline{A_1A_2}$ und $\overline{A_3A_4}$, die den kürzesten Abstand voneinander haben.

(b) Berechne das Volumen des Körpers mit den Eckpunkten $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$.

(c) Die Ortsvektoren der Punkte $A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_4$ werden mittels der Matrix M abgebildet. Berechne den Volumeninhalt des entstehenden Körpers. WIR1-11

Viel Glück!