Test ◇ **E+M1–07/08–01** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
♢ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Vektoralgebra– und Geometrie

Probl. 1 (a) Durch fortgesetzte Spiegelungen des Punktes $P_1(3;2;1)$ an allen drei Grundebenen entstehen 8 Punkte, welche ein rechteckiges Prisma resp. einen rechteckigen Spat oder Parallelepiped (Cuboid) bilden. Berechne alle möglichen Winkel zwischen den Raumdiagonalen dieses Körpers.

(b) Berechne die Inhalte der mittels einer Raumdiagonalen und den restlichen Eckpunkten gebildeten Dreieckflächen. Wieviele verschiedene solche Dreiecksinhalte gibt es?

Probl. 2 Stelle $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ als Linearkombination der Basisvektoren $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ dar. (Anzugeben sind die Streckungsfaktoren der Basisvektoren.)

Probl. 3 Berechne mit Hilfe der Regel von Sarrus das Spatvolumen, das durch die oben gegebenen Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ sowie dem Ursprung definiert ist. (Sarrus zeigen!)

Probl. 4 Im Raum sind zwei Geraden $g_1 : \ \vec{x}_1 = \vec{r}_1 + \lambda\, \vec{a}_1$ sowie $g_2 : \ \vec{x}_2 = \vec{r}_2 + \mu\, \vec{a}_2$ gegeben. Berechne den kürzesten Abstand zwischen den Geraden. Dabei ist $\vec{r}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{r}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Probl. 5 (a) Berechne einen Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, welcher zu den beiden Richtungsvektoren der in der letzten Aufgabe gegebenen Geraden senkrecht steht und dazu die Gleichung $\langle \vec{x}, \vec{r}_2 \rangle = 10$ erfüllt. ($\vec{r}_2$ ebenfalls wie in der letzten Aufgabe, $z \geq 0$.)

(b) Berechne daraus den Inhalt der Parallelogrammfläche, welche durch $\vec{r}_2$, $\vec{x}$ und den Ursprung aufgespannt wird.

(c) Berechne den Winkel zwischen den Parallelogrammseiten beim Urspung.

%

Probl. 6 (a) Gegeben ist der Vektor $\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Dieser Vektor wird fünf mal mit den Winkel $\varphi = \dfrac{2\,\pi}{5}$ um die z–Achse gedreht. Berechne die entstehenden vier neuen Punkte.

(b) Berechne den Inhalt des entstehenden Fünfecks.

Viel Glück!