Test ◇ **E+M1–07/08–03** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**
♣ Dokumentechtes Schreibzeug!

Diverses aus Matrizenrechnung und Eigenwerttheorie

Probl. 1 Gegeben sind die Vektoren $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{x}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \end{pmatrix}$. $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ sind die Eigenvektoren einer Matrix A. Der zu $\vec{x}_1$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_1 = 20$, der zu $\vec{x}_2$ gehörige Eigenwert ist $\lambda_2 = 30$.

(a) Bilde mit den Vektoren $\vec{x}_1$ und $\vec{x}_2$ eine Matrix X und berechne ihre Eigenwerte. Sind diese Eigenwerte ganzzahlig?

(b) Entscheide, ob die Matrix A eine Fixgerade besitzt. (Begründung!)

(c) Konstruiere die Matrix A und vergleiche sie mit der Matrix $B = \begin{pmatrix} 21 & 6 \\ \frac{3}{2} & 29 \end{pmatrix}$. Was stellt man fest?

(d) Diagonalisiere A : $A = X \cdot D \cdot X^{-1}$ und berechne die Eigenwerte und die Eigenvektoren von D.

(e) Berechne und vergleiche die charakteristischen Polynome $P_A(\lambda)$ und $P_D(\lambda)$ von A und D.

(f) Ermittle aus diesen Polynomen die Spur sowie die Determinante von A und D.

(g) Gegeben ist derPunkte $P_1(5, -3)$. Bilde diesem Punkt mit Hilfe der Matrix A ab, d.h. berechne den Bildpunkt Q.

(h) Berechne auch die Eigenwerte von B. Was stellt man fest?

Probl. 2 Gegeben sind die Punkte $P_1(0, 0)$, $P_2(2, 0)$, $P_3(3, 2)$.

(a) Konstruiere die Drehmatrix $D(\varphi)$ mit $\varphi = 62^o$.

(b) Drehe damit das Dreieck $F_1 = \triangle(P_1P_2P_3)$ um φ und berechne die Eckpunkte des Bilddreiecks $F_2 = \triangle(Q_1Q_2Q_3)$.

Probl. 3 Gegeben ist Gerade g : $\vec{v} = \vec{0} + t \cdot \vec{x}_1$ mit $\vec{x}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ sowie der Punkte $P(7, -2)$.

(a) Konstruiere die Spiegelungsmatrix $S(g)$.

(b) Spiegele damit P, d.h. berechne den Bildpunkt Q.

%

Probl. 4 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ und $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. Kontrolliere, ob diese drei Vektoren linear unabhängig sind. Die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ bilden zusammen mit dem Ursprung O eine Ebene Φ. $\vec{u}$ zeigt die Projektionsrichtung bei der Projektion auf Φ an.

(a) Zeige die Kontrolle der linearen Unabhängigkeit der drei oben erwähnten Vektoren.

(b) Konstruiere die Projektionsmatrix.

(c) Projiziere den Punkt $P(100, 100, 100)$ in Φ, d.h. berechne den Bildpunkt Q.

Probl. 5 Durch die Gerade $g: \ \vec{x} = \vec{0} + t \cdot \vec{a}, \ \vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, ist eine Drehachse im Raum gegeben. Der Punkt $P(5, 4, 6)$ soll um g mit Blickrichtung $-\vec{a}$ um $+36^o$ gedreht werden.

(a) Konstruiere die Drehmatrix.

(b) Berechne den Bildpunkt Q von P bei der Drehung.

Probl. 6 Zum Punkt $P(10, 10)$ gehört der Ortsvektor $\vec{x}_0 = \overrightarrow{OP}$. $\vec{x}_0$ wird mit Hilfe der Matrix $D = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{7}) & -\sin(\frac{\pi}{7}) \\ \sin(\frac{\pi}{7}) & \cos(\frac{\pi}{7}) \end{pmatrix}$ in $\vec{y}_0 = D \cdot \vec{x}_0$ abgebildet. Anschliessend wird $\vec{y}_0$ mit Hilfe der Matrix $S = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$ in $\vec{x}_1 = S \cdot \vec{y}_0$ abgebildet. Dieses Verfahren wird danach nach den Regeln $\vec{y}_n = D \cdot \vec{x}_n$ und $\vec{x}_{n+1} = S \cdot \vec{y}_n$ fortgesetzt. Berechne die ersten Glieder der Folge $\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots$ und zeichne die dazugehörigen Punkte in eine *Skizze* ein. Was ist zu *vermuten* über die entstehende Folge der Vektoren bezüglich ihrer Lage und eventueller Konvergenz?

Viel Glück!