Test ◇ **M2–08/09–02–02** ◇

Wichtig: ♡ Bitte nur die **Vorderseite** eines Blattes beschreiben.
♣ Resultate sind gut sichtbar zu unterstreichen.
♠ Nur gut leserliche, sauber gegliederte Lösungen mit sofort auffindbaren Resultaten können korrigiert werden. (Ersichtlicher Lösungsweg!)
◇ Die einzelnen Aufgaben sind durch einen Strich zu trennen.
♡ **Alle Teilaufgaben geben gleich viele Punkte.**

Fourier

Probl. 1 Gegeben ist $f_1(t) = \sin(t),\ \ t \in [0,\,\pi)$ mit $f_1(t) = f_1(t + n\,\pi),\ \ n \in \mathbb{Z},\ \ T = \pi$.

(a) Erläutere, ob $f_1(t)$ eine gerade Funktion ist und ob man $f_1(t)$ in eine Cosinusreihe entwickeln kann. (Skizze!)

(b) Berechne die ersten 6 Fourierkoeffizienten und stelle das Approximationsergebnis für $f_1(t)$ so exakt wie möglich grahpisch dar.

(c) Berechne die ersten 6 Koeffizienten der Fourierreihe von $f_2(t) = |\sin(t)|$. Kann man das vorhergehende Resultat hier benutzen?

(d) Berechne die ersten Koeffizienten der Fourierreihe der $2\,\pi$–periodischen Funktion f_3 mit $f_3(t) = \sin(t),\ \ t \in [0,\,\pi)$ und $f_3(t) = 0,\ \ t \in [\pi,\,2\,\pi)$. Kann man die vorhergehenden Resultate benutzen?

(e) Berechne die ersten Koeffizienten der Fourierreihe von f_4 mit $f_4(t) = \dfrac{d\,f_1(t)}{d\,t}$, falls f_1 differenzierbar ist. In den Punkten, wo f_1 nicht differenzierbar ist, soll f_4 auf vernünftige und natürliche Weise definiert werden. Kann man die vorhergehenden Resultate benutzen?

Probl. 2 Gegeben ist die Funktion $g_1(t) = t,\ \ t \in [0,\,2),\ \ T = 2$.

(a) Bestimme die Fourierreihe von $g_1(t)$. (Anzugeben sind die ersten 4 Koeffizienten).

(b) Berechne damit die Fourierreihe von $g_2(t) = t^2,\ \ t \in [0,\,2),\ \ T = 2$. (Anzugeben sind die ersten 4 Koeffizienten).

Probl. 3 (a) Beschreibe eine Methode zur Approximation der unendlichen Summe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{(2\,k+1)(2\,k+3)} = \dfrac{1}{3\cdot 5} + \dfrac{1}{5\cdot 7} + \dfrac{1}{7\cdot 9} + \ldots$ mit Hilfe einer Fourierreihe.

(b) Beschreibe eine Methode zur Approximation der Zahl π mit Hilfe einer Fourierreihe.

Probl. 4 Gegeben ist eine sogenannte „partielle“ Differentialgleichung:

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2},\ \ u(t,0) = u(t,\pi) = 0$$

(a) Untersuche, ob die Funktion $u(t,x) = c \cdot e^{-a\,t} \cdot \sin(b\,x)$ die Gleichung löst und in welcher Beziehung allenfalls a und b dabei stehen müssen.

(b) Untersuche, ob eine Linearkombination von Lösungen wieder Lösung sein kann.

(c) Untersuche, ob bei der letzten Teilaufgabe bezüglich eines betrachteten Wertes von t die Lösung etwas mit einer Fourierreihe zu tun hat. (*Hinweis:* Überlege dir, was für Werte b im Falle einer Fourierreihe annehmen darf.)

Probl. 5 Gegeben ist die Funktion $v_1(x) = \cos(x),\ \ x \in I = [-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}]$ und $v_1(x) = 0,\ \ x \notin I$.
Sei dazu andererseits $v_2(x) = \pi,\ \ x \in [-1,\ 1]$ und $v_2(x) = 0$ sonst.

(a) Berechne die Fouriertransformierte von $v_1(x)$.

(b) Versuche, mit Hilfe von Fouriertransformationen die Differentialgleichung

$$y\,'(x) = v_2(x) - y(x)$$

zu lösen. (Eine partikuläre Lösung finden.)

Probl. 6 Beschreibe in kurzen Worten auf klare Weise den Begriff „DFT“. Erläutere dazu:

(a) Um was geht es dabei? — Was will man damit? — Was gewinnt man mittels DFT?

(b) Beschreibe anhand eines Beispiels, wie man konkret bei der Verwendung der DFT vorgeht.

(c) Wie hängt der Begriff „FFT“mit der DFT zusammen?

Viel Glück!