Übungen in lin.Alg.+Geom. ◇ E+M II / 04 ◇

Repetition und Ausbau Vektoralgebra und Vektorgeometrie

Suche mit Hilfe des Skripts oder anderen Mitteln die Definitionen sowie die zentralen Formeln zu den folgenden Begriffen und mache dazu je ein Beispiel, wenn möglich graphisch:

Probl. 1 Kreis (Kugel)

Probl. 2 Thaleskreis (Kugel)

Probl. 3 Apolloniuskreis (Kugel)

Probl. 4 Kegelschnitte

Probl. 5 Tangente, Tangentialebene

Probl. 6 Pol

Probl. 7 Polare

Probl. 8 Potenz eines Punktes

Probl. 9 Potenzgerade, Potenzebene

Probl. 10 Sehnensatz

Probl. 11 Tangentensatz

Probl. 12 Sekantensatz

Probl. 13 Kegel

Probl. 14 Zylinder

Ausbau Matrizenrechnung

Probl. 1 Gegeben ist die Matrix A sowie die Einheitsvektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ in einem KKS:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechne A^{-1}, $\det(A)$ sowie $\det(A^{-1})$.

(b) Berechne $A \cdot \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Was ist am Resultat bemerkenswert?

(c) Berechne $A^{-1} \cdot \vec{e}_k$, $k = 1, 2, 3$. Was ist am Resultat bemerkenswert? %

Probl. 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

(a) Berechne A^{-1}, $\det(A)$ sowie $\det(A^{-1})$.

(b) Sei E die Einheitsmatrix

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Löse $A \cdot \vec{x} = \lambda\, \vec{x} = \lambda\, E\, \vec{x}$ durch Umformung auf $(A - \lambda\, E) \cdot \vec{x} = \vec{0}$, $\vec{x} \neq \vec{0}$.
Hinweis: Wenn dieses Gleichungssystem in x und y eine Lösung ungleich der Null–Lösung hat, so kann die Matrix $A - \lambda\, E$ bekanntlich nicht regulär sein. Was folgt daher für $\det(A - \lambda\, E)$? (Der entstehende Ausdruck heisst „charakteristisches Polynom".)

Berechne $\det(A - \lambda\, E)$. Was für ein Polynom entsteht? Löse damit die charakteristische Gleichung $\det(A - \lambda\, E) = 0$!

Die gefundenen Lösungen λ_1 und λ_2 heissen „Eigenwerte".

Berechne zu λ_1 und zu λ_2 jeweils die Vektoren $\vec{x}$ aus der Eigenwertgleichung

$$A \cdot \vec{x} = \lambda\, \vec{x}.$$

Untersuche das Lösungsverhalten im Falle von exakten Eigenwerten λ und im Falle von Näherungswerten für die Eigenwerte λ!