Übungen in Analysis ◇ E+M 2 13 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

Probl. (1) Exakte Differentialgleichungen:

(a) i. Schreibe $F(x,y) = x^2\,y^3 - 2\,y + x$ als totales Differential dF und deute $dF = 0$ als exakte Differentialgleichung.

ii. Löse die Gleichung $F(x,y) = c$ für den Scharparameter c nach y auf und skiziere eine Funktionenschar $y := y_c(x) := y(x,c)$ für eine Auswahl von Werten für den Parameter c.

iii. Löse die exakte Differentialgleichung $dF = 0$ und erstelle eine Skizze der Lösungen für verschiedene Parameter c. Vergleiche die Skizze mit der oben erhaltenen Skizze.

(b) Erstelle mit Hilfe von $F(x,y) = x^2\,y^3 - 2\,y + x$ eine exakte Differentialgleichung $f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy := dF = F\,'x(x,y)\,dx + F\,'y(x,y)\,dy = 0$. Kontrolliere damit die Beziehung $f\,'_y(x,y) \equiv g\,'_x(x,y)$.

(c) Betrachte nun die Differentialgleichung
$f(x,y)\,dx + g(x,y)\,dy = (x^3y^3 + 2xy^3 - xy^2)\,dx + (3x^2y^2 - 2y)\,dy$

i. Teste die Beziehung $f\,'_y(x,y) \equiv g\,'_x(x,y)$. Suche im Falle, dass es sich noch nicht um eine exakte Differentialgleichung (mit einem erkennbaren totalen Differential) handelt, einen eulerschen Multiplikator (integrierender Faktor).

ii. Suche eine implizite Lösung der Differentialgleichung.

iii. Falls du keine einfach darstellbare analytische Lösung finden kannst, so versuche, mit Hilfe eines „implicit Plots“ direkt aus der impliziten Lösung Kurven numerisch zu berechnen. (Verschiedene Copmuteralgebra-Programme oder Numerikprogramme stellen dafür Werkzeuge zur Verfügung).

iv. Vergleiche die gefundenen Kurven mit der Kurve der numerisch erhaltenen Lösung des Anfangswertproblems $y\,'(x) = -\dfrac{f(x,y(x))}{g(x,y(x))},\;\; y(2) = 1$.

Probl. (2) Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten:

(a) Löse die Differentialgleichung

$$y\,'(x) + k\,y(x) = 0,\;\; y(0) = y_0,\;\; k \in \{-5, -4, \ldots, 3, 4, 5\}.$$

Skizziere die Lösungen für $x \in [-2, 2]$.

(b) Löse die Differentialgleichung

$$y''(x) + k_1\, y'(x) + k_2\, y(x) = f(x), \;\; y(0) = y_0, \;\; y'(0) = y_1, \;\; k_1, k_2 \in \{-3, \ldots, 3\}.$$

Skizziere die Lösungen für $x \in [0, 5]$ (oder falls vorteilhaft für ein kleineres Intervall).

i. $f(x) \equiv 0$.

ii. $f(x) \equiv 1$.

iii. $f(x) = 1 + x + x^2$.

iv. $f(x) = \cos(2\,x - 1)$.

v. $f(x) = e^{-x}$.

vi. $f(x) = 1 + x + \cos(2\,x - 1) + e^{-\frac{x}{5}}$.