Übungen in Analysis ◇ E+M 2 15 ◇

Für die folgenden Aufgaben ist notfalls ein Computer zu verwenden (Skizze!):

Probl. (1) Kurzprojekt Schwingungen:

Konsultiere den Abschnitt 6.3.1., Schwingungen und Oxzillatoren im Skript „Mathematik II“ unter dem Link

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf resp.

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf resp.

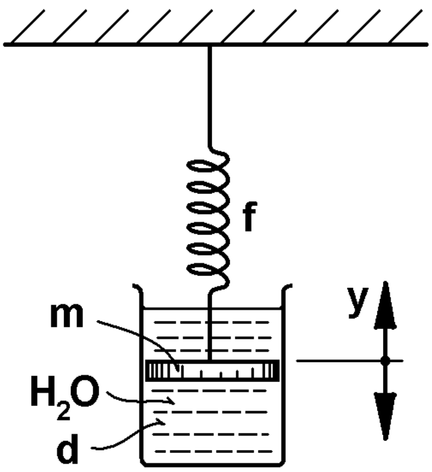
http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweif.pdf

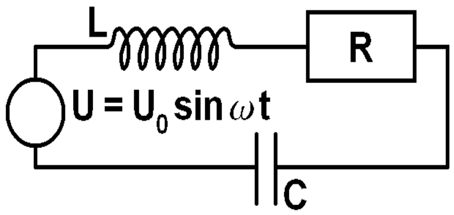
Orientiere dich über das Thema „Schwingung und Differentialgleichungen“. Was dort noch über Laplace-Transformationen steht, kann auf der momentanen Kenntnisstufe weggelassen werden.

Zitat:

(Aus dem 1. Beispiel) Annahme:

Dämpfungskraft $\sim$ *Geschwindigk.* $\dot{y}$, *Proportionalitätskonstante* d *(Dämpfungskonstante)*





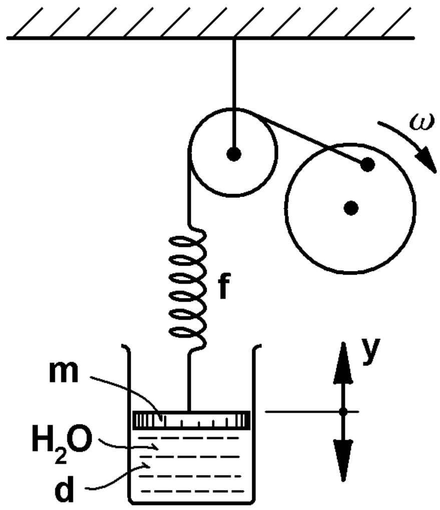
Mit dem Federgesetz ergibt sich dann: $m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + f \cdot y = 0, \quad f =$ *Federkonstante*

Sei $2\,\rho = \dfrac{d}{m},\ \ \omega^2 = \dfrac{f}{m}\ \ \Rightarrow\ \ \ddot{y} + 2\,\rho\cdot\dot{y} + \omega_0^2\cdot y = 0$

(Aus dem 2. Beispiel)

Falls zusätzlich eine Anregerkraft F wirkt, etwa über einen Exzenter, so erhält man die folgende D'Gl:

$F(t) = k\cdot\sin(\omega\,t)\ \ \Rightarrow$



$E(y) \equiv \ddot{y} + 2\,\rho\,\dot{y} + \omega_0^2 y = k\cdot\sin(\omega\,t),\ \ y(0) = y\,'(0) = 0$

Aus physikalischen Gründen kann man vermuten: $\quad y(t) = A\cdot\sin(\Omega\cdot t + \varphi)$

Ende Zitat

Aufgabe ==> %

(a) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$, äussere Kraft $= 0$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ \ y\,'(0) = 0$.

(b) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ wie oben, äussere Kraft $= 0$. Die Verwendete Feder soll pro Längeneinheit dieselbe Federkonstante wie oben haben. Die Feder soll aber doppelt so lang sein.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ \ y\,'(0) = 0$.

(c) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fäll $m = 2$, $d = 0$ und $f = 1$ wie oben, äussere Kraft $= 0$.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ \ y\,'(0) = 0$.

(d) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$ wie ganz oben, äussere Kraft $= 10$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ \ y\,'(0) = 0$.

(e) Stelle die Differentialgleichungen auf für die Fall einer horizontalen Situation, dass jetzt Masse $m = 1$ und zweimal die Feder, wie in der 1. Aufgabe verwendet wird, $d = 0$. Die Abfolge der Federn und Massen ist ist wie folgt:
Feder$_1$ — Masse — Feder$_2$, äussere Kraft $= 0$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y_1(0) = 1,\ \ y_1\,'(0) = 0,\ \ y_2(0) = 5,\ \ y_2\,'(0) = 0$.
Bemerkung: Für jede Masse muss man eine Differentialgleichung aufstellen. Die beiden Gleichungen kann man entkoppeln.

(f) Stelle die Differentialgleichungen auf für die Fall einer horizontalen Situation, dass jetzt zweimal die Masse $m = m_1 = m_2 = 1$ und dreimal die Feder, wie in der 1. Aufgabe verwendet wird, $d = 0$. Die Abfolge der Federn und Massen ist ist wie folgt:
Feder$_1$ — Masse$_1$ — Feder$_2$ — Masse$_2$ — Feder$_3$, äussere Kraft $= 0$. Löse diese Differentialgleichung.
$y_1(x)$ und $y_2(x)$ seien die Auslenkungen der beiden Massen aus ihren Ruhelagen. Für die Anfangsbedingungen sei: $y_1(0) = 2,\ \ y_1\,'(0) = 0,\ \ y_2(0) = -1,\ \ y_2\,'(0) = 0$, Position von m_2 im Koordinatensystem von m_1: $\ d = -6$.
Bemerkung: Für jede Masse muss man eine Differentialgleichung aufstellen. Die beiden Gleichungen kann man entkoppeln.

(g) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 0$ und $f = 1$, äussere Kraft $= \sin(t)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ \ y\,'(0) = 0$.

(h) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 1$ und $f = 1$, äussere Kraft $= 0$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ \ y\,'(0) = 0$.

(i) Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 1$, $d = 1$ und $f = 1$, äussere Kraft $= \sin(t)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 1,\ \ y\,'(0) = 0$.

(j) Eine Masse m ist an zwei parallelen Federn aufgehängt mit $f_1 = 3$ und $f_2 = 4$. Stelle die Differentialgleichung auf für die Fall $m = 2$ und $d = 1$, äussere Kraft $= 4\sin(2x)$. Löse diese Differentialgleichung.
Anfangsbedingungen: $y(0) = 0,\ \ y\,'(0) = 1$.
Bemerkung: Erst muss aus f_1 und f_2 die gemeinsame Konstante f errechnet werden.

Probl. (2) Linienintegral

Konsultiere die Abschnitte 6.4.1., Linienintegrale ff im Skript „Mathematik II“ unter dem Link

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweid.pdf resp.

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweidf.pdf resp.

http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KursMathZweif.pdf

Orientiere dich über das Thema „Linienintegrale“. Was dort noch über weitere Begreiffe steht (Differentialoperatoren) steht, kann auf der momentanen Kenntnisstufe weggelassen werden.

(a) Sei $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3\,x\,y \\ 5\,z \\ 10\,x \end{pmatrix}$, $\gamma:\ t \longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2+1 \\ 2\,t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}$, $t \in [0,2]$

i. Berechne das Linienintegral $\quad W = \int\limits_0^2 \vec{F} \bullet \vec{x}_t{}'\, dt = \int\limits_0^2 \langle \vec{F}, \vec{x}_t{}' \rangle\, dt$

ii. Berechne das Linienintegral $\quad W = \int\limits_{|\gamma|} |\vec{F}|\, d|\gamma|$

(b) Sei nun $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3\,x\,y \\ 5\,z \\ 10\,x \end{pmatrix}$, $\gamma:\ t \longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^3 \\ 2\,t^2 \\ t^2+1 \end{pmatrix}$

i. Berechne das Linienintegral $\quad W = \int\limits_0^2 \vec{F} \bullet \vec{x}_t{}'\, dt = \int\limits_0^2 \langle \vec{F}, \vec{x}_t{}' \rangle\, dt$

ii. Berechne das Linienintegral $\quad W = \int\limits_{|\gamma|} |\vec{F}|\, d|\gamma|$

(c) Sei nun $\vec{F}(x,y,z) = \begin{pmatrix} 3\,x\,y \\ 5\,z \\ 10\,x \end{pmatrix}$, $\gamma:\ t \longmapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2\,t) \\ 1+\sin(3t) \end{pmatrix}$

i. Berechne das Linienintegral $\quad W = \oint_{|\gamma|} \vec{F} \bullet \vec{x}_t{}'\, dt = \int\limits_0^{2Pi} \langle \vec{F}, \vec{x}_t{}' \rangle\, dt$

ii. Berechne das Linienintegral $\quad W = \oint_{|\gamma|} |\vec{F}|\, d|\gamma|$

Probl. (3) Spezielle Differentialgleichungen

(a) Studiere die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y'(x) + \alpha\, y(x) = f(x)$$

(b) Studiere die allgemeine Lösung der Differentialgleichung

$$y''(x) + \alpha\, y'(x) + \beta\, y(x) = f(x)$$

(c) Studiere die der Differentialgleichung

$$y''(x) + \alpha\, y'(x) + \beta\, y(x) = f(x)$$

$$\text{mit } \alpha = 2,\ \ \beta = -1,\ \ c_1 = 1,\ \ c_2 = 1,\ \ f(x) = cos(x)$$

(d) Studiere die der Differentialgleichung

$$y''(x) + y'(x) - y(x) = \cos(x+1),\ \ y(x) = 1,\ \ y'(x) = 0$$