Übungen in Analysis 4 ◇ M2 05 ◇

Gibbs und Fouriertransformierte (Spektralfunktion):

Probl. 1

$$f(t) \;=\; \begin{cases} (2\,t)^3 & t \in [-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}) \\ f(t+n) & n \in \mathbb{Z},\;\; t \notin [-\frac{1}{2},\, \frac{1}{2}) \end{cases}$$

(a) Entwickle f in eine Fourierreihe $\tilde{f}_n(t)$ von der Ordnung $n = 1$ bis zur Ordnung $n = 10$ und mehr. Skizziere einige der Approximationen.

(b) Um den Overshoot beim Gibbs-Phänomen zu studieren, soll die Differenzfunktion $\tilde{f}_n(t) - f(t)$ geplottet werden. Stelle einige der Plots dar.

(c) Untersuche den Overshoot heuristisch (d.h. für einige vernünftige n, wo der Rechnungsaufwand sich in Grenzen hält).

Probl. 2 Von den nachfolgenden Funktionen soll jeweils ein Plot hergestellt und die Fouriertransformierte oder Spektralfunktion $F(\Omega)$ berechnet werden:

(a)

$$f(\lambda) \;=\; \begin{cases} 1 & \lambda \in [0,\, 1) \\ f(\lambda+n) & n \in \mathbb{Z},\;\; \lambda \notin [0,\, 1) \end{cases}$$

(b)

$$f(\lambda) \;=\; \begin{cases} \sin(\lambda) & \lambda \in [0,\, \pi) \\ f(\lambda+n\,\pi) & n \in \mathbb{Z},\;\; \lambda \notin [0,\, \pi) \end{cases}$$

(c)

$$f(\lambda) \;=\; \begin{cases} \lambda & \lambda \in [0,\, 3) \\ f(\lambda+3\,n) & n \in \mathbb{Z},\;\; \lambda \notin [0,\, 3) \end{cases}$$