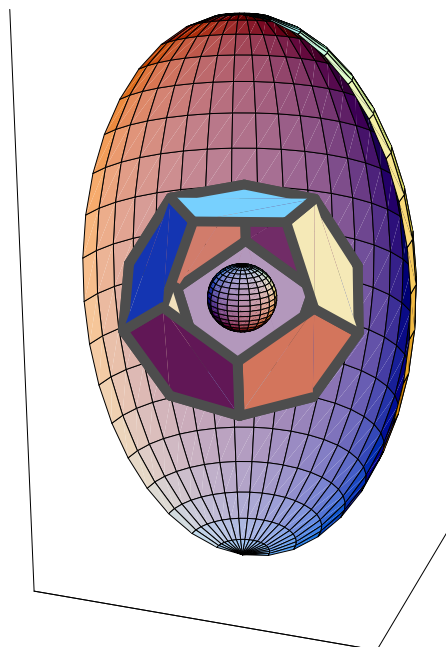


Script \diamond Math \diamond Ing
 \diamond \diamond
 \diamond Suite mathématiques (II) \diamond
 \diamond concis



Scripta bilingua

de

Rolf Wirz

Berner Fachhochschule BFH \diamond TI (HTI) und et AHB (HSB)

Version: V.2.12.46 (V.2.10.81) / 1. April 2012

Texte français

Produit avec LaTeX/PCTEX sur NeXT/ WIN98/ XP.
Quelques représentations ont été produites avec Mathematica.

Plus une théorie est mathématique et efficace, moins elle est claire. Les sciences modernes acquièrent la possibilité de changer le monde — au prix de la clarté de la description. . . .

Fleckenstein

Aktuelle Adresse des Autors (2007):

Rolf W. Wirz-Depierre

Prof. für Math.

Berner Fachhochschule (BFH), Dep. AHB und TI

Pestalozzistrasse 20

Büro B112 CH-3400 Burgdorf/BE

Tel. ++41 (0)34 426 42 30 / intern 230

Mail: Siehe <http://rowicus.ch/Wir/indexTotalF.html> unter „Koordinaten von R.W.“

Alt: *Ingenieurschule Biel (HTL), Ing'schule des Kt. Bern, Fachhochschule ab 1997) // BFH HTA Biel // BFH TI //*

Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1 Organisatorisches — Quant à l'organisation	1
2 Differentialgleichungen — Equations différentielles	3
2.1 Einführung — Introduction	3
2.2 Lösung bei D'Gl 1. Ordn. — Solutions d'éq'diff d'ordre 1	6
2.2.1 Lösung, Integralkurve — Solution, courbe d'intégrale	6
2.2.2 Linienelement, Richtungsfeld — Élément de ligne, champs de direction	6
2.2.3 Isoklinen — Isoclines	8
2.2.4 Zentrale Fragen — Questions centrales	10
2.3 Anfangswertproblem — Problème de valeur initiale	12
2.3.1 Idee — Idée	12
2.3.2 Verallgemeinerung des Problems — Généralisation du problème	13
2.3.3 Randwertprobleme — Problèmes aux limites	14
2.3.4 Veränderte Problemstellung — Changer le problème	14
2.4 Existenz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	15
2.4.1 Existenzsatz von Peano — Théorème d'existence de Peano	15
2.4.2 Eindeutigkeit — Univocité	15
2.4.3 Existenzsatz und Eindeutigkeit — Existence et univocité	17
2.4.4 Beispiel mit einer singulären Lösung — Exemple avec une solution singulière	20
2.5 Gleich'typen, Lös'methoden — Types d'éq., méthodes de solution	20
2.5.1 Iterationsverfahren von Picard — Méthode d'iteration de Picard	20
2.5.2 Separationsverfahren — Méthode de séparation des variables	21
2.5.3 „Beinahe“ separable D'Gl — Eq. diff. "presque séparable"	22
2.5.4 Substitutionsmethode — Méthode de substitution	23
2.5.5 Exakte D'Gl — Eq.diff. exacte	23
2.5.6 Eulersche Multiplikatoren — Multiplicateurs d'Euler	25
2.5.7 Eine Anwendung: Einhüllende — Une application: Enveloppe	27
2.6 Theorie der linearen D'Gl — Théorie des eq.diff. linéaires	29
2.6.1 Einführung, Definitionen — Introduction, définitions	29
2.6.2 Homogenes System — Système homogène	30
2.6.3 Inhomogenes System — Système inhomogène	35
2.7 Lineare D'Gl mit konst. Koeff. — Eq.diff. linéaires avec coeff. const.	37
2.7.1 Homogenes Problem — Problème homogène	37
2.7.2 Inhomogenes Problem — Problème non homogène	40
2.7.3 Potenzreihenansatz — Partir d'une série de puissance	42
2.8 Numerische Verfahren — Méthodes numériques	42
2.8.1 Das Verfahren von Euler — La méthode d'Euler	43
2.8.2 Die Methode von Runge-Kutta — La méthode de Runge-Kutta	44

2.8.3	D'Gl und Differenzenmethode — Eq. diff. et méthode d'éq. aux différences	46
2.9	Allgemeine Maschinenlösungen — Solutions générales par l'ordinateur	49
2.9.1	<i>Mathematica</i> -Lösung — Solutions par <i>Mathematica</i>	49
2.9.2	Selbst gerechnete Lösung — Solution calculée personnellement	50
2.10	Artillerie-Methode — Méthode selon l'artillerie	52
2.11	Anwendungen — Applications	55
2.11.1	Biegelinie — Ligne élastique ou axe neutre	55
2.11.2	Knickung — Problème de flambage	55
3	Laplace-Transformationen — Transformations de Laplace	57
3.1	Einführung — Introduction	57
3.1.1	Übersicht — Vue générale	57
3.1.2	Der Trick — Le truc	57
3.2	Exist. u. Eindeut'probleme — Probl. d'exist. e. d'univoc.	59
3.2.1	Definitionen — Définitions	59
3.2.2	Existenzprobleme — Problèmes d'existence	59
3.2.3	Eindeutigkeitsprobleme — Problèmes d'univocité	61
3.3	Aufbau des Kalküls — Constr. de la théorie formalisée	62
3.3.1	Elementare Regeln — Règles élémentaires	62
3.3.2	Linearitätsregeln — Linéarité	63
3.3.3	Streckung im Urbildbereich — Extension dans le domaine de déf.	63
3.3.4	Differentiationsregel — Règle de la dérivation	64
3.3.5	Anwendung auf eine D'Gl — Application pour une éq.diff.	64
3.3.6	Integrationsregel — Règle d'intégration	65
3.3.7	Verschiebungssätze — Théorème de retard	65
3.3.8	Multiplikationsregel — Règle de la multiplication	66
3.3.9	Divisionsregel — Règle de la division	67
3.3.10	Faltung — Plissement	68
3.3.11	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques	70
3.3.12	Anfangs- und Endwerte — Valeurs initiales et finales	71
3.3.13	Transformation rationaler Funktionen — Transformation de fonctions rationnelles	73
3.4	Musterbeispiele — Exemples modèles	74
3.4.1	Rücktransformationen — Transformations inverses	74
3.4.2	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff.	75
3.4.3	D'Gl 2. Ordnung — Eq.diff. d'ordre 2ème	75
3.4.4	Systeme von D'Gl — Systèmes d'éq.diff.	76
3.4.5	Anwendung der Faltung — Application du plissement	77
3.5	Distributionen — Distributions	78
3.5.1	Idee, Dirac-Stoss — Idée, impulsion unité de Dirac	78
3.5.2	Die Transformierte der Dirac-Funktion — La transformée de la fonction de Dirac	80
3.5.3	Anwendung auf ein AWP — Application pour un PVI	81
3.5.4	Stoss zur Zeit 0 — Coup au temps 0	81
3.5.5	Stoss zur Zeit t_0 — Coup au temps t_0	81
3.6	Probleme aus der Praxis — Problèmes de la pratique	83
3.6.1	Schwingungen und Oszillatoren — Oscillations et oscillateurs	83
3.6.2	Stabilitätsverhalten von Lösungen — Comportement de stabilité de solutions	84
3.6.3	Stabilitätskriterium — Critère de stabilité	86
3.6.4	Randwertprobleme — Problèmes de valeurs aux limites	87
3.7	LTI-Systeme — Systèmes LTI	87
3.7.1	Grundlagen — Fondements	87
3.7.2	Beispiele, Systemverknüpfungen — Exemples, liaisons de systèmes	88

4	Fourierreihen — Séries de Fourier	91
4.1	Einführung — Introduction	91
4.1.1	Verwendung — Utilisation	91
4.1.2	Periodische Funktionen — Fonctions périodiques	91
4.1.3	Trigonometrische Reihen — Séries trigonométriques	92
4.2	Fourierreihen und Fourieranalyse — Séries et analyse de Fourier	92
4.2.1	Das Darstellungsproblem — Le problème de la représentation	93
4.2.2	Das Konvergenzproblem — Le problème de la convergence	95
4.2.3	Folgerungen und Konsequenzen — Conclusions et conséquences	99
4.2.4	Sinus- und Cosinusreihen — Séries de sinus et cosinus	101
4.2.5	Eulersche Formeln, Periode T — Formules d'Euler, période T	102
4.3	Harmonische Analyse — Analyse harmonique	103
4.3.1	Beispiele — Exemples	103
4.3.2	Lineare Kombinationen — Combinaisons linéaires	105
4.3.3	Parsevalsche Gleichung — Equation de Parseval	105
4.3.4	Die Formel — La formule	105
4.3.5	Anwendung — Application	106
4.4	Komplexe Darstellung — Représentation complexe	107
4.4.1	Komplexe Fourierkoeffizienten — Coefficients de Fourier complexes	107
4.4.2	Berechnung der Koeffizienten — Calculer les coefficients	108
4.4.3	Beispiel — Exemple	108
4.4.4	Amplitudenspektrum, Phasenspektrum — Spectre d'amplitude, spectre de phase	111
4.4.5	Reelle Interpretation der Spektren — Interprétation réelle des spectres	113
4.4.6	Das Phänomen von Gibbs — Le phénomène de Gibbs	114
4.4.7	Beispiele — Exemples	115
4.5	Diskrete Fouriertransformation — Transf. de Fourier discrète	116
4.5.1	DFT und Fouriersynthese — DFT et synthèse de Fourier	116
4.5.2	FFT — FFT	121
4.6	Fouriertransformation — Transformation de Fourier	123
4.6.1	Fourierintegral — Intégrale de Fourier	123
4.6.2	b-Band-Beschränktheit, Shannon — Borné à la bande b, Shannon	129
4.6.3	Lösen von D'Gl — Résoudre des éq.diff.	130
5	z-Transformationen — Transformations en z	133
5.1	Einführung — Introduction	133
5.1.1	Verwendung — Utilisation	133
5.1.2	Gegenstand der Betrachtung — Objet de la considération	133
5.1.3	z-Transformierte — Transformée en z	134
5.2	Regeln, Calculus — Règles, calcul	135
5.2.1	Geometrische Folgen — Suites géométriques	135
5.2.2	Differentiation von Transformierten — Différentiation de transformées	135
5.2.3	Linearität, Einheitsimpuls — Linéarité, impulsion d'unité	136
5.2.4	Exponential und trig. Folgen — Suites exp. et trig.	136
5.2.5	Verschiebungen — Décalages	137
5.2.6	Gliedweise Mult. mit einer Folge — Mult. avec une suite terme p. terme	138
5.2.7	Anfangs- und Endwertsatz — Théorème des valeurs aux limites	139
5.2.8	Inverse z-Transformation — Transformation en z inverse	141
5.2.9	Auffinden der Inversen — Trouver l'inverse	141
5.3	Praktische Anwendungen — Applications pratiques	142
5.3.1	Differenzgleichungen — Equations aux différences	142
5.3.2	Diskrete lineare Systeme — Systèmes linéaires discrets	144
5.3.3	Impuls- und Schrittantwort — Réponse d'impulsion et indicielle	148
5.3.4	Schrittantwort — Réponse indicielle	149

5.4	Stabilität — Stabilité	151
5.4.1	Der Begriff — La notion	151
5.4.2	Stabilitätskriterium — Critère Pour la stabilité	151
5.4.3	Stabilitätskriterium — Critère pour la stabilité	152
5.5	Faltung, Konvolution — Plissement	153
5.5.1	Die Idee — L'idée	153
5.6	Laplace- und z -Transformation — Transf. de Laplace et en z	155
5.7	Ingenieur Anwendungen — Applications d'ingénieur	156
6	Vektoranalysis — Analyse vectorielle	157
6.1	Grundlagen — Les bases	157
6.1.1	Einführung — Introduction	157
6.1.2	Operatoren — Opérateurs	157
6.2	Felder — Champs	159
6.2.1	Der Feldbegriff — La notion du champ	159
6.2.2	Feldtypen — Types de champs	160
6.3	Gradient, Divergenz, Rotation — Gradient, divergence, rotationnel	162
6.3.1	Laplace- und Nabla-Operator — Opérateurs de Laplace et nabla	162
6.3.2	Definition von grad, div und rot — Définition de grad, div et rot	163
6.3.3	Formeln mit grad, div und rot — Formules avec grad, div et rot	164
6.3.4	Bedeutung von grad, div und rot — Signification de grad, div et rot	164
6.4	Konservative Felder — Champs conservateurs	167
6.4.1	Linienintegrale — Intégrales curvilignes	167
6.4.2	Gradientenfelder und Pot'felder — Champs de vect. lam. et champs de potent.	169
6.4.3	Konservative Felder — Champs conservateurs	170
6.4.4	Eigenschaften, Beispiele — Qualités, exemples	172
6.4.5	Konservative Felder und Rotation — Champs conservateurs et rotationnel	174
6.4.6	Bsp.: Stromdurchflossener Leiter — Expl.: Conduct. alimenté de courant électr.	175
6.5	Die Integralsätze — Les théorèmes de l'intégrale	177
6.5.1	Der Begriff Fluss — La notion de flux	177
6.5.2	Definition des Flusses — La définition du flux	177
6.5.3	Fluss durch geschlossene Flächen — Flux à travers des surfaces fermées	178
6.5.4	Anwend.: Wieso r -quadrat-Gesetze? — Applic.: Pourq. d. lois de r au carré?	179
6.5.5	Übersicht über die Integralsätze — Aperçu des théorèmes de l'intégrale	181
6.5.6	Die Sektorformel — La formule de secteur	182
6.5.7	Konsequenzen aus den Integralsätzen — Conséquences des théorèmes de l'intégrale	183
6.5.8	Quellenfreie Potentialfelder — Champs de potentiel libres de sources	185
6.5.9	Beispiele zu Stockes — Exemples concernant Stockes	185
6.5.10	Abgeleitete Formeln — Formules dérivées	186
6.5.11	Koord'unabhängige Def.n der Rotation — Déf. du rotationnel indép. de coord.	187
6.5.12	Zur Divergenz des elektr. Feldes — Quant à la divergence d'un champ électr.	187
6.6	Beweisideen z.d. Int'sätzen — Idées d. preuves p.l. théor.d. l'intégr.	188
6.6.1	Zum Satz von Gauss — Quant au théorème de Gauss	188
6.6.2	Zum Satz von Stockes — Quant au théorème de Stockes	190
6.7	Zirkulation, Vektorpotential — Circulation, potentiel vectoriel	192
6.7.1	Zirkulation und Rotation — Circulation et rotationnel	192
6.7.2	Das Vektorpotential — Le potentiel vectoriel	195

7	Rayleigh–Quotient (Anhang — Annexe 1)	199
7.1	Grundlagen zur Methode mit dem Rayleigh–Quotienten	200
7.1.1	Übersicht: Problem und Ziel	200
7.1.2	Theorie bezüglich Rayleigh–Quotient	200
7.1.3	Berechnung des Rayleigh–Quotienten	205
7.1.4	Eine genauere numerische Näherung für den 1. Eigenwert	210
7.1.5	Bemerkung zum Ritz–Galerkin–Verfahren	212
7.1.6	Übersicht	212
7.1.7	Die Methode	212
8	Partielle Differentialgleichungen (Anhang — Annexe 2)	219
8.1	Partielle Differentialgleichungen	220
8.1.1	Quasilineare part. D’gl 1. Ordnung mit zwei Variablen	220
8.1.2	Klassifikation bei part. D’gl. 2. Ordnung	222
8.1.3	Verfeinerung der Klassifikation	222
8.1.4	Das Beispiel der Wärmeleitgleichung	224
8.1.5	Koordinatentransformationen bei Operatoren	228
8.1.6	Lineare Operatoren	233
8.1.7	Zur schwingenden Membran	234
8.1.8	Die Poisson–Gleichung	236
8.1.9	Exkurs: Wichtige Formeln	239
8.1.10	Plattengleichung und biharmonischer Operator	240
8.1.11	Das Modellierungsbeispiel der an vier Punkten aufgehängten Platte	241
8.1.12	Das Modellierungsbeispiel Kreisplatte	241
8.1.13	Numerische Methoden	243
8.1.14	Numerische Beispiele: Differenzenverfahren	244
8.1.15	Numerische Beispiele: Iterationsverfahren	248
8.2	Schritte in die Variationsrechnung	254
8.2.1	Der Begriff der ersten Variation	254
8.2.2	Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung	255
8.2.3	Die Herleitung der Potentialgleichung	256
8.2.4	Die Kettenlinie	256
8.2.5	Ein isoperimetrisches Problem und die Lagrange–Funktion	258
8.2.6	Das Prinzip der kleinsten Wirkungen und erste Variation	259
8.2.7	Bernoullis Brachystochronen–Problem	261
8.2.8	Variation und finite Elemente: Triangulationsmethode	263
8.2.9	Weitere Probleme	267
8.3	Schwingungen und partielle Differentialgleichungen	268
8.3.1	Die homogene Wellengleichung, Voraussetzungen	268
8.3.2	Separationsansatz und stehende Welle	268
8.3.3	Schwingung eines dünnen Balkens	270
8.3.4	Die schwingende dünne Platte	272
8.3.5	Ausblick über Eigenwerte und Eigenfunktionen	278
8.4	Fouriertransformationen und partielle Diff’gleichungen	278
8.4.1	Entwicklung der Methode an einem Beispiel	278
8.4.2	Beispiel einer konkreten Anwendung	280
8.5	Zur Idee der Greenschen Funktion	280
8.5.1	Einführung und Begriff	280
8.5.2	Ein Schulbeispiel	281
8.6	Bemerkung zur Delta–Funktion	283
8.7	Ausblick	285

9	Mathematische Modellierung (Anhang — Annexe 3)	287
9.1	Einige Kurven	288
9.1.1	Die Klothoide	288
9.1.2	Kettenline contra Seilkurve	290
9.1.3	Eine Schleppkurve	292
9.2	Balken und Biegelinie	293
9.2.1	Schnittkräfte und Momente am Balken	293
9.2.2	Die Biegelinie des Balkens	297
9.2.3	Zur Knickung	299
9.3	Gekoppelte Pendel	300
9.3.1	Problemmodellierung	300
9.3.2	Beispiellösung	301
9.4	Weitere Beispiele zur Modellierung	301
9.4.1	Ausblick auf weitere Beispiele und Themenbereiche	301
9.4.2	Bemerkung zu autonomen und dynamischen Systemen	303
10	Anhang 4 — Annexe 4	305
10.1	Hinweise – Indications	305
10.1.1	Abkürzungen – Abréviations	305
10.1.2	Literatur — Littérature	305

Kapitel • Chapitre 1

Quant à l'organisation

Vue générale

1. Organisation, cadre
2. Matière
3. But, chemin, méthodes, feedback, groupe
4. Exercices, études personnelles
5. Technique de travail et d'apprendre, selfmanagement
6. Droits et devoirs de l'étudiant et de l'école
7. Principes et positions
8. Calculatrices de poche, ordinateurs, software en mathes
9. Organisation du semestre en mathématiques (nombre de notes, règlement des examens, Plan des examens, conditions concernant les examens, exigences formelles, conditions formelles, philosophie des notes, évaluation des exercices et des projets, porte-feuille, chef de classe, professeur chargé de la classe, chef chargé des copies, heures de consultation)
10. Aides (bibliothèque, calculatrice de poche, software en mathématiques, littérature)
11. Plan du temps à disposition
12. Introduction

Kapitel • Chapitre 2

Equations différentielles

2.1 Introduction

Littérature

Voilà un choix limité qui concerne la plus grande partie de la matière:

Leupold u.a., Mathematik 1, 2

Swobowsky, Analyse

Swobowsky, Calculus

Glyn James, Modern Engineering Mathematics,

Advanced Modern Engineering Mathematics

La notion

Jusqu'à maintenant nous avons trouvé dans les mathématiques surtout des **équations de nombres** simples:

Exemple: $x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0$, $x = ?$

On a cherché des nombres inconnus ou des ensembles de nombres inconnus:

\mathbb{L} = Ensemble de nombres.

Une **équation différentielle** par contre est une équation dans laquelle se trouve une **fonction inconnue** et – ou des dérivées de cette fonction. Ici on cherche la fonction inconnue.

Exemple: $y''(t) + y'(t) = \cos(2t)$

$y(t)$ est une fonction inconnue.

Exemple pour une solution: $y(t) = 2 \sin(t) - \frac{1}{3} \cos(2t)$

(Contrôle!)

\rightsquigarrow L'ensemble de solutions est un ensemble de fonctions.

Important: Equation différentielle \rightsquigarrow Equation qui contient des quotients différentiels.

Façon d' écrire:

\leadsto D'Gl Equation différentielle \leadsto éq'diff

Exemples, pratique

La formulation de problèmes pratiques dans les sciences naturelles, dans la technique, l'économie, ... mène souvent à des équations différentielles. P.ex. s'il s'agit d'une relation entre une entité et son changement par le temps.

1. Nous connaissons la loi de la chute des corps de la physique:

$$\begin{aligned} -g = \ddot{s} = s''(t) &\Rightarrow s = \int s'(t) dt + C_1 = \int(\int s'(t) dt + C_1) dt + C_2 = \int(\int -g dt + C_1) dt + C_2 \\ &= \int(-g t + C_1) dt + C_2 = -\frac{1}{2} t^2 + C_2 t + C_1 \end{aligned}$$

\mathbb{L} = ensemble fini de fonctions à deux paramètres. Pour une solution unique (claire et nette) il faut deux conditions (fixer C_1 et C_2).

2. $y'(t) = y(t)$, $y'(t) - y(t) = 0$

\leadsto Quelle fonction ne change pas en passant à la dérivée?

Nous savons:

$$y_1(t) = e^t, \quad y_2(t) = -3e^t, \quad y_3(t) = e^{t+5} = e^t \cdot e^5, \quad y_4(t) = 7e^t - e^{t+\ln(3)} = 4e^t$$

Généralement: $y(t) = C \cdot e^t$

Problème: $\notin \{C \cdot e^t \mid C \in \mathbb{R}\}$?

Y a-t-il encore d'autres solutions $\notin \{C \cdot e^t \mid C \in \mathbb{R}\}$?

3. $y''(t) = -y(t)$ resp. $y''(t) + y(t) = 0$

\leadsto Equation d'oscillation.

Solution: $y(t) = C_1 \cdot \sin(t) + C_2 \cdot \cos(t)$

Types d'équations différentielles

Définition: **Ordre** d'une éq'diff := Ordre de la dérivée la plus haute.

Symbole: Ordre d'une éq'diff := $Ord(\text{éq'diff})$

Beispiele: Exemples:

1. $y' - t^2 - y^3 = 0$, $y = y(t) \Rightarrow Ord = 1$, $pgrad(y^3) = 3$

2. $(y'')^3 - 4(y')^4 + t = 0 \Rightarrow Ord = 2$

3. $y''' \cdot y' - y \cdot t^6 = 0 \Rightarrow Ord = 3$

4. $\ln(y''') \cdot \cos(y') - e^y + y = 0 \Rightarrow Ord = 3$

Définition: **Eq'diff ordinaire** := éq'diff dans laquelle on ne trouve que des dérivées d'après une variable.

P.ex. éq'diff d'ordre n :

éq'diff explicite: $y^{(n)}(t) = g(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t))$

éq'diff implicite: $f(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) = 0$

Par différence à l'éq'diff ordinaire, on trouve dans l'équation différentielle partielle des dérivées d'après plusieurs variables.

Beispiele: Exemples:

1. $\forall_{x,t} t \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + x \cdot \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \rightsquigarrow$ p.ex. $u(x, t) = e^{\left(\frac{t}{x}\right)^2}$
2. $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \rightsquigarrow$ Equation d'ondes.
3. $\sin(t \cdot x^{\frac{1}{2}}) \cdot u''_{tt} = u''_{xx} + u$

Transcription en des systèmes d'éq'diff

Exemple:

Voilà un système d'équations différentielles avec deux équations:

$$\begin{aligned} f_1(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) &= 0 \\ f_2(t, y(t), y'(t), \dots, y^{(n-1)}(t), y^{(n)}(t)) &= 0 \end{aligned}$$

Important: A l'aide de définitions de nouvelles variables on peut écrire chaque éq'diff à n variables comme système d'ordre 1 avec $n + 1$ équations:

Soit $F(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$

Définir:

\rightsquigarrow Système:

$$\begin{array}{ll} y(t) : &= z_0(t) & F(t, z_0, z_1, \dots, z_n) &= 0 \\ y'(t) &= z'_0(t) := z_1(t) & z'_0(t) &= z_1(t) \\ & \vdots & & \vdots \\ y^{(n)}(t) &= z'_{n-1}(t) := z_n(t) & z'_{n-1}(t) &= z_n(t) \end{array}$$

Ecrire à l'aide de vecteurs:

Soit $\vec{z} := \begin{pmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$, $\vec{f}(t, z_0, \dots, z_{n-1}, z_n) := \vec{f}(t, \vec{z}, z_n) := \begin{pmatrix} f_0 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix}$

\rightsquigarrow Eq'diff: $\left| \begin{array}{l} \vec{z}' = \vec{f}(t, \vec{z}, z_n) \\ 0 = F(t, \vec{z}, z_n) \end{array} \right|$

Remarque:

1. \vec{f} peut être plus généralement une fonction quelconque de t, \vec{z} et z_n .
2. Au lieu d'examiner une seule équation d'ordre 1, on peut aussi tout de suite examiner un système d'ordre 1. Par conséquent, là, on doit traiter des fonctions vectorielles (plusieurs fonctions à la fois). Pour simplifier les choses nous voulons faire les réflexions suivantes pour le cas d'une seule équation. La transcription pour des équations vectorielles est alors un 'problème technique'.

2.2 Solutions d'éq'diff d'ordre 1

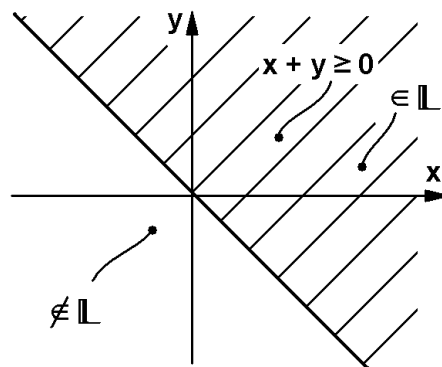
2.2.1 Solution, courbe d'intégrale

Exemple:

$$y' = f(x, y) = \sqrt{x + y}$$

$$D_f \subseteq \mathbb{R}^2$$

A cause de $\sqrt{*}$ l'équation n'est définie que pour $y \geq -x$



Définition:

$y : I \mapsto \mathbb{R}$ s'appelle **solution** ou **intégrale** de l'éq'diff $y' = f(x, y) \Leftrightarrow$

- 1) $y \in \mathcal{D}(I)$ (derivab.(I))
- 2) Graphe $\{(x, y(x))\} \subseteq D_f$
- 3) $y(x)$ satisfait l'éq'diff $y' = f(x, y)$

Quand $y(x)$ est solution, la courbe $\{(x, y(x))\} \subseteq D_f$ s'appelle **courbe d'intégrale**.

Indication:

Dans l'esquisse ci-dessus la courbe d'intégrale passe par le point (x_0, y_0) .

2.2.2 Élément de ligne, champs de direction

Soit $y_0 := y(x_0)$, $y'_0 = y'(x_0)$.

Dans un point (x_0, y_0) la courbe d'intégrale peut être approximée par la tangente avec la pente y'_0 .

Définition:

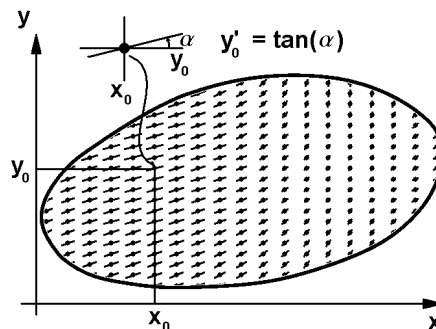
Un triplet de la forme (x_0, y_0, y'_0) s'appelle **élément de ligne**.

Pour un point quelconque, un élément de ligne donne une bonne impression du comportement (action) de la courbe.

Dans un point (x_0, y_0) on peut bien représenter un élément de ligne par un court segment de tangente à la pente y'_0 . Sans problème nous pouvons ici renoncer à l'exactitude de la langue et parler d'un **graphe d'un élément de ligne**.

Important: Quand on a donné une éq'diff $y' = f(x, y)$, on peut pour un point quelconque (x_0, y_0) tout de suite calculer la pente $y'_0 = f(x_0, y_0)$ et donc se faire une esquisse de l'élément de ligne!

Si l'on remplace donc l'image d'une courbe intégrale dans assez de points par le graphe d'éléments de lignes, on obtient très vite une impression du comportement de la courbe!



Définition:

L'ensemble des éléments de ligne $\{(x_0, y_0, y'_0)\}$ s'appelle **champ de direction** (champ de tangentes).

Important: A l'aide d'une esquisse du graphe du champ de direction les courbes d'intégrale se laissent estimer tout de suite.

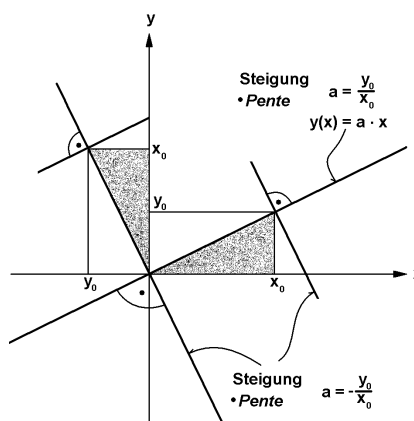
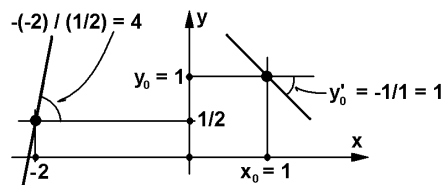
Exemple:

Eq'diff $y' = -\frac{x}{y}$, $y = y(x)$, $y \neq 0$, $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$, $f(x, y) = -\frac{x}{y}$

Soit $x_0 = y_0 = 1$
 $\Rightarrow y'_0 = -\frac{x_0}{y_0} = -\frac{1}{1} = -1$
 \leadsto élément de ligne $(1, 1, -1)$
 (Voir esquisse)
 \leadsto **Idée:**

Soit $y = a \cdot x \Rightarrow y' = -\frac{x}{y} = -\frac{x}{a \cdot x} = -\frac{1}{a}$

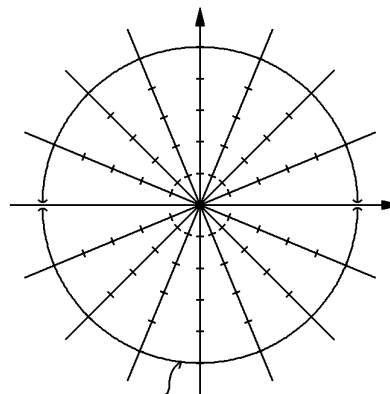
Une droite à la pente $-\frac{1}{a}$ est perpendiculaire à une droite à la pente a .



Dans chaque point $P_0 = (x_0, y_0 = a \cdot x_0)$ l'élément de ligne $(x_0, a \cdot x_0, -\frac{1}{a})$ se laisse tout de suite dessiner. Il est \perp à la droite $y(x) = a \cdot x$ (qui passe par l'origine).

↪

↪ Les courbes d'intégrales doivent être des cercles concentriques autour de l'origine. Pour $y = 0$ la solution n'est pas définie. ↪
Courbes intégrales.



Integralkurve • Courbe intégrale

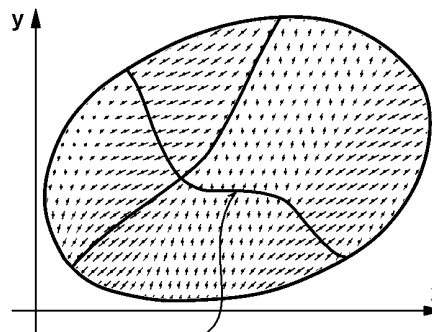
Contrôle: Soit $y \neq 0$
 Cercle: $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ ($|x| \leq r$) $\Leftrightarrow x^2 + y(x)^2 = r^2 := C$
 (diff, int'gr ↪) $\Leftrightarrow 2x + 2y' \cdot y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{x}{y}$

On peut générer des exemples pour des champs de direction très vite par exemple à l'aide d'un programme de *Mathematica*, voir annexe.

2.2.3 Isoclines

Nous considérons les éléments de lignes (x_0, y_0, y'_0) pour lesquels vaut l'équation $y'_0 = k$

Ces éléments de ligne pour k définissent souvent de nouveau une courbe.



Isokline • Isocline

Définition:

Nous appelons des courbes du genre $\{(x_0, y_0, y'_0) \mid y'_0 = k\}$ des **isoclines**.

Remarque: Sur les isoclines tous les éléments de ligne ont donc la même pente k .

Important: Pour des éq'diff on peut souvent trouver les isoclines de manière simple et à l'aide de celles-ci vite estimer les courbes d'intégrales.

Exemple:

$$1. y' = \frac{\sin(x)}{2 + \sin(y)} \Rightarrow \text{Isocline: } (y' = k = \text{const}) \sin(x) = 2k + k \cdot \sin(y)$$

$$\Rightarrow \text{pour } k \neq 0 \sin(y) = \frac{\sin(x) - 2 \cdot k}{k} \Rightarrow y(x) = \arcsin\left(\frac{\sin(x) - 2 \cdot k}{k}\right), k \neq 0$$

Quant au cas exceptionnel $k = 0$: $0 = \frac{\sin(x)}{2 + \sin(y)} \Rightarrow x = 0, y \in \mathbb{R} \rightsquigarrow$ Axe y .

2. Attention:

Les isoclines peuvent être aussi des plans entiers:

D'Gl Eq'diff $y' = a = \text{const.} \Rightarrow y = ax + C = y(x, C), C \in \mathbb{R}$

$$3. 2y' - (64y^2)^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow 2y' - 4(y^2)^{\frac{1}{3}} = 0$$

Isocline: $y' = 2y^{\frac{2}{3}} = k \Rightarrow y^{\frac{2}{3}} = \frac{k}{2} = k_1 \Rightarrow y = (k_1)^{\frac{3}{2}} = k_2 \Rightarrow y = \text{const.}$

\rightsquigarrow Isoclines: Droites horizontales.

Solution de cette éq'diff:

$$(a) y \equiv 0 \in \mathbb{L}$$

$$(b) y' = \frac{dy}{dx} = 2 \cdot y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow y^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} = 2 \quad \text{pour } y \neq 0$$

$$\Rightarrow \int y^{-\frac{2}{3}} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int 2 dx \Rightarrow 3 \cdot y^{\frac{1}{3}} + C_1 = 2x + C_2$$

$$\Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}(2x + C_2 - C_1) := \frac{1}{3}(2x + C_0) := \frac{2}{3}(x + C) \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3$$

Attention: Ici, pour $y \neq 0$ la courbe intégrale n'est pas définie de façon univoque!

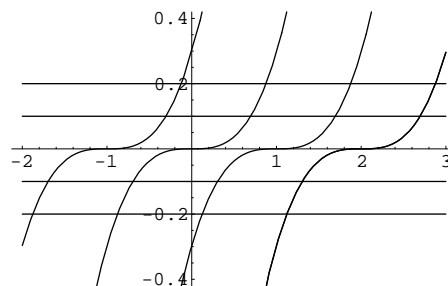
Nous obtenons une explication si nous examinons les points d'inflexion des courbes:

$$y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3 \Rightarrow y' = 2 \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^2 \cdot \frac{2}{3} \Rightarrow y'' = 2 \left(\frac{2}{3}(x + C)\right) \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} = \frac{16}{9}(x + C)$$

$$y'' = 0 \Rightarrow \frac{16}{9}(x + C) = 0 \Rightarrow x = -C = \text{const.} = k \Rightarrow y(x) = y(-C) = \left(\frac{2}{3}(-C + C)\right)^3 = 0$$

La courbe $y = \left(\frac{2}{3}(x + C)\right)^3$ a son point d'inflexion à $(-C, 0)$, ç.v.d. sur l'axe x .

Le champ de directions a donc la forme qu'on voit dans l'image à côté (Courbes intégrales):



On peut donc continuer une partie d'une courbe intégrale arrivant à l'axe x de par dessous de façons différentes au dessus de l'axe x .

2.2.4 Questions centrales

Univocité d'une solution

On a vu dans l'exemple dernier qu'il existe des équations différentielles dont les courbes intégrales peuvent être continuées de façons différentes. Donc les solutions ne sont pas univoques.

~>

Problème 1: Quand une équation différentielle a-t-elle aussi une solution univoque?

Par comparaison aux problèmes qui suivent ci-dessous, le problème de l'univocité ne pose pas de problèmes énormes.

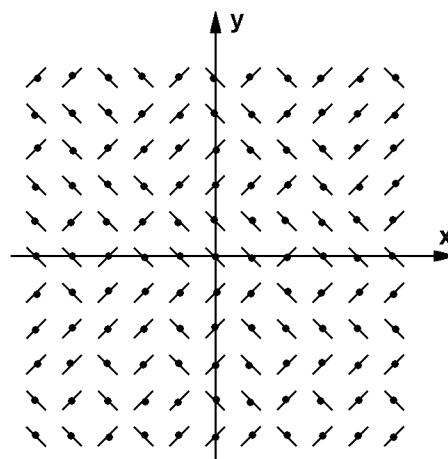
Existence d'une solution

On voit de façon graphique, que l'équation suivante ne peut pas avoir de courbe d'intégrale:

$$y' = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ -1 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dans l'image chaque point est choisi par hasard:

$$(x \in \mathbb{Q}) \vee (x \notin \mathbb{Q})$$



Par contre l'équation $y' = y$ possède sûrement une solution $y(x) = e^x$, comme on peut constater par substitution.

Autre exemple:

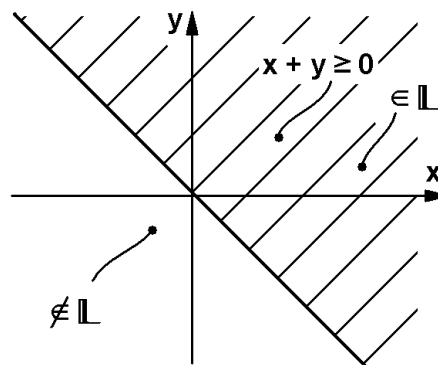
Domaine de définition d'une solution

$$y' = \sqrt{x+y}, \quad y \in \mathbb{R}, \quad y(x) = ?$$

A cause de $\sqrt{x+y} \geq 0$ l'équation n'est définie que pour $y \geq -x$

Solution implicite:

$$-x - 2 \cdot \operatorname{artanh}(\sqrt{x+y}) - \ln(-1+x+y) + 2 \cdot \sqrt{x+y} = C, \quad x \in \mathbb{R} \Rightarrow y \in \mathbb{C} \dots!$$



~>

Problème 2: Est-ce qu'il existe aussi une solution pour une équation différentielle donnée?

Par comparaison aux autres problèmes, la résolution du problème de l'existence est difficile, excepté pour les classes de problèmes simples pour lesquelles on a des théorèmes d'existence.

Méthode de solution

Problème 3: Comment est-ce qu'on peut trouver la solution d'une équation différentielle donnée? Quelles sont les méthodes qu'on a à disposition?

En ce qui concerne les méthodes de solution, on a dans la littérature des collections énormes. Pendant notre cours nous pouvons discuter seulement une petite partie qui a notamment une grande importance pour nous.

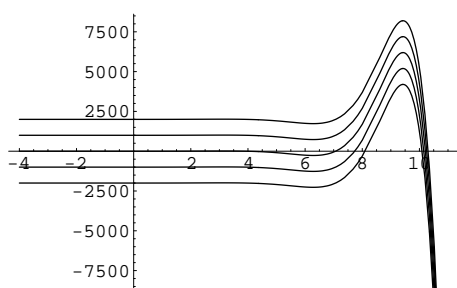
Nature de la représentation d'une solution

Problème 4: Quand est-ce qu'il est possible de trouver une solution analytique d'une équation différentielle donnée? Quand est-ce qu'on peut trouver une solution numérique qui soit valable?

Stabilité d'une solution

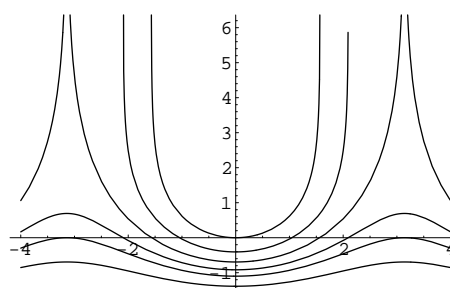
Si on changeait très peu les paramètres à un système, on aimerait bien que le système change seulement très peu son comportement et qu'il ne bascule pas complètement. P.ex. un un peu plus de chaleur dans un gaz devrait seulement augmenter un peu la pression et non pas causer une explosion du système.

Problème 5: Quand est-ce que la solution d'une équation différentielle se comporte de façon **stable** dans le sens suivant? C'est-à-dire quand un petit changement des paramètres a comme conséquence seulement un petit changement de la solution après un certain temps et ne mène pas à un changement total du système? (Voir images.)



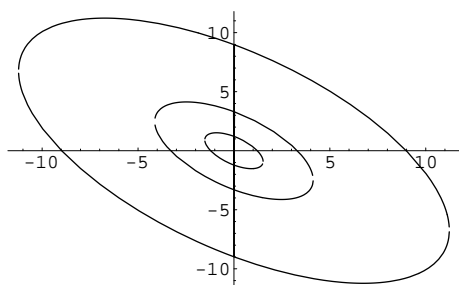
$$y' = e^x \cdot \sin(x)$$

$$y = c - \frac{1}{2} e^x \cos(x) + \frac{1}{2} e^x \sin(x)$$



$$y' = e^y \cdot \sin(x)$$

$$y = -\ln(\cos(x) + c), \quad \cos(x) + c > 0$$



$$y' = -\frac{5x + 3y}{3x + 5y}$$

$$y = \frac{1}{5}(-3x \pm x \sqrt{-16 + 5e^{2(x - \ln(x))}})$$

2.3 Problème de valeur initiale

2.3.1 Idée

Exemple:

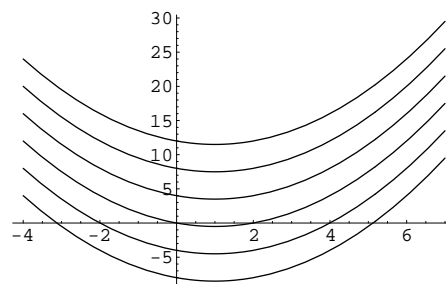
Eq. diff.: $y' = x - 1$

$$\Rightarrow y = \int x - 1 dx = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Spécialement: $y(0) = C$

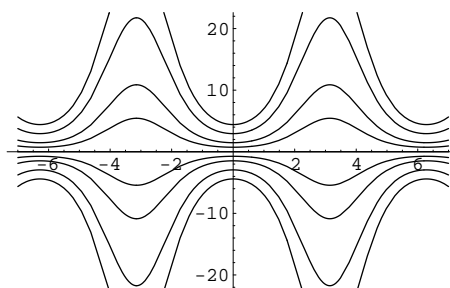
$$\mathbb{L} = \{y_C(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + C \mid C \in \mathbb{R}\}$$

$\leadsto \mathbb{L} =$ Famille de courbes infinie,
paramètre de la courbe C .



$$y' = x - 1, \quad y = \frac{1}{2}x^2 - x + C$$

Généralement chez nous la solution d'une équation différentielle explicite et simple est une famille de courbes.



$$y' = y + \sin(x), \quad y = c \cdot e^{-\cos(x)}$$

On peut se poser donc la question raisonnable suivante:

Problème: Soit donnée une équation différentielle $y' = f(x, y)$. Trouver les courbes intégrales qui passent par le point donné $P_0 = (x_0, y_0)$.

Définition:

Le problème qu'on vient de poser s'appelle **problème de valeur initiale (PVI)**. La condition $y(x_0) = y_0$ s'appelle **condition initiale (CInit)**.

2.3.2 Généralisation du problème

On peut se poser un problème analogue pour les **équations différentielles explicites** et simples d'ordre supérieur. On peut s'imaginer que pour résoudre l'éq. diff. il faut intégrer si souvent que l'ordre l'indique pour arriver à une solution. Par conséquent il faut nécessairement donner probablement le même nombre de conditions initiales que l'ordre indique pour pouvoir fixer les constantes d'intégration qui apparaissent.

Exemple: $y''' = f(x, y, y', y'')$

\leadsto Constantes d'intégration: C_1, C_2, C_3

\leadsto **C.Init.** $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, y''(x_0) = y''_0$

C'est pourquoi nous définissons:

Définition:

Le Problème

$$y^{(n)}(x) = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

$$(*) \quad y(x_0) = y_0$$

$$(*) \quad \dots = \dots$$

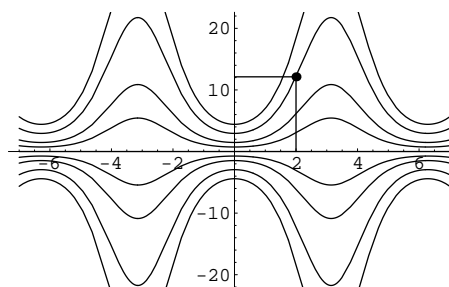
$$(*) \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

s'appelle **problème de valeur initiale**.

Les conditions (*) s'appellent **conditions de valeurs initiales**

Remarque:

Sans conditions initiales \leadsto **solution générale** (\mathbb{L}_g), avec conditions initiales \leadsto **solution particulière** (\mathbb{L}_p)



$$y' = y + \sin(x), \quad y(2) = 8 \cdot e^{-\cos(2)}$$

Beispiele: Exemples:

$$1. \quad y \cdot y'' - (y')^2 = 0 \quad \left(\text{resp. } y'' = \frac{(y')^2}{y} \right) \quad \leadsto \mathbb{L}_g : y(x) = C_1 \cdot e^{C_2 \cdot x}$$

$$\text{C.Init.:} \quad y(3) \approx 8.96338, \quad y'(3) \approx 4.48169 \Rightarrow y(x) \approx 2 \cdot e^{\frac{1}{2} \cdot x}$$

$$2. \quad \frac{x \cdot y'}{2} - y = 0 \quad \left(\text{resp. } y' = \frac{dy}{dx} = 2 \frac{y}{x} \right), \quad \text{C.Init.} \quad y(1) = 1$$

Truc: "Séparer" les variables comme il suit:

$$\begin{aligned} y' \cdot \frac{1}{y} &= \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{y} = 2 \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{y} \cdot y' dx = \int \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{y} dy = \int 2 \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int \frac{1}{y} dy = 2 \int \frac{1}{x} dx \\ &\Rightarrow \ln(y) + C_1 = 2 \ln(x) + C_2 \Rightarrow \ln(y) = 2 \ln(x) + C_3 \\ &\Rightarrow y = e^{\ln(y)} = e^{2 \ln(x) + C_3} = e^{2 \ln(x)} \cdot e^{C_3} := (e^{\ln(x)})^2 \cdot C = x^2 \cdot C = C \cdot x^2 \Rightarrow y(x) = C \cdot x^2 \end{aligned}$$

$$y(1) = 1 \Rightarrow C \cdot 1^2 = C = 1 \quad \Rightarrow y_{part}(x) = x^2$$

2.3.3 Problèmes aux limites

Les **problèmes aux limites** sont différents des problèmes de valeurs initiales.

La manière de poser ce problème est évidente dans l'exemple qui suit. (Dans ce cours, nous n'allons pas continuer de traiter ce genre de problèmes.)

Exemple: **Eq.diff.:** (**PAL**)

$$\begin{aligned} y'' &= \lambda y \\ y(0) &= 0 \quad (*) \\ y(\pi) &= 0 \quad (*) \end{aligned}$$

Les équations (*) sont les **conditions aux limites**

De façon générale les conditions aux limites sont: $y(x_1) = y_1$, $y(x_2) = y_2$
On cherche donc une solution dans l'intervalle $[x_1, x_2]$.

Ici, λ s'appelle **valeur propre** \rightsquigarrow "Problème de valeur propre".

On peut deviner tout de suite des solutions:

$$y_1(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(x), \quad y_2(x) = \sin(2x), \quad y_3(x) = \sin(3x), \quad \dots, \quad y_n(x) = \sin(nx), \quad n \in \mathbb{Z}$$

On constate que p.ex. $y(x) = \cos(nx)$ satisfait l'équation différentielle, mais non les conditions aux limites.

2.3.4 Changer le problème

Quant aux équations différentielles de premier ordre $y'(x) = f(x, y)$, on peut essayer de chercher les trajectoires orthogonales $y_{\perp}(x)$, au lieu de chercher les solutions.

Car il vaut:
$$y'_{\perp}(x_0) = -\frac{1}{y'(x_0)} \quad \forall x_0 \in D_y$$

Exemp.: Soit (a) $y(x) = y_C(x) = C \cdot \sin(x) \Rightarrow y'(x) = C \cdot \cos(x)$

$$\Rightarrow \frac{y_C(x)'}{y_C(x)} = \frac{C \cdot \cos(x)}{C \cdot \sin(x)} = \cot(x) \quad \forall C \rightsquigarrow y_C'(x) = y_C(x) \cdot \cot(x)$$

(b) $P = P(x, y)$, $P_0 = P(x_0, y_0) = P(x_0, y_C(x_0)) \rightsquigarrow y_C(x_0) = y_{\perp, B}(x_0)$
 C, B paramètres \rightsquigarrow

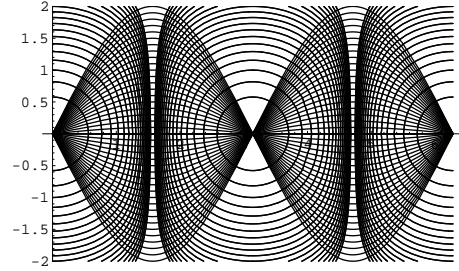
$$y_C'(x_0) = y_C(x_0) \cdot \cot(x_0) = y_{\perp, B}(x_0) \cdot \cot(x_0) = -\frac{1}{y'_{\perp B}(x_0)} \Rightarrow y'_{\perp B}(x_0) \cdot y_{\perp, B}(x_0) = -\tan(x_0) \quad \forall B, x_0$$

$$\Rightarrow y'_{\perp B}(x) \cdot y_{\perp, B}(x) = -\tan(x)$$

Soit $y_{\perp, B}(x) := z(x)$
 $\Rightarrow z'(x) \cdot z(x) = -\tan(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int z'(x) \cdot z(x) dx &= \int z(x) \cdot \frac{dz}{dx} dx \\ &= \int z dz = \frac{1}{2} z^2 + B_1 = - \int \tan(x) dx \\ &= \int \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} dx = \ln(|\cos(x)|) + B_1 \end{aligned}$$

$$\leadsto \Rightarrow z(x)^2 = \ln(\cos^2(x)) + B \Rightarrow z(x) = y_{\perp, B}(x) = \sqrt{\ln(\cos^2(x)) + B}$$



2.4 Existence et univocité

Remarque:

On peut prouver l'**existence** d'une solution d'une équation différentielle $y^{(n)}(x) = f(x, y', \dots, y^{(n-1)})$ généralement pour des fonctions **continues** f , mais **non l'univocité**.

(Généralement les preuves sont très approfondies. Normalement elles s'appuient sur l'analyse fonctionnelle, une matière qui n'est pas traitée dans ce cadre. On réussit à prouver l'univocité à une **condition de Lipschitz** qui est traitée plus tard.)

2.4.1 Théorème d'existence de Peano

Pour simplifier la chose, nous voulons discuter ici les équations différentielles du 1. ordre. Pour les éq.diff. d'ordre supérieur, on peut traiter la matière de façon pareille, mais on doit s'appuyer sur les espaces vectoriels liés à des notions de distances spéciales, ce qui complique un peu la chose.

Soit D une région raisonnable.

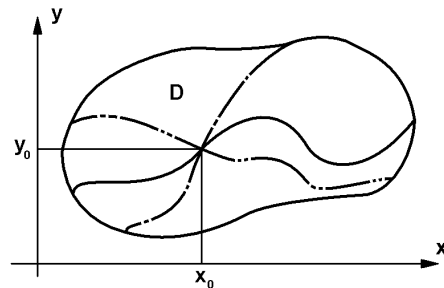
Théorème: (Peano)

Hyp.:

- 1) f continue à $D \subseteq \mathbb{R}^2$
- 2) $y' = f(x, y)$ dans D

Thè.:

$\forall (x_0, y_0) \in D$: Par le point (x_0, y_0) il y a au moins une courbe intégrale qui passe jusqu'au bord de D .



2.4.2 Univocité d'une solution

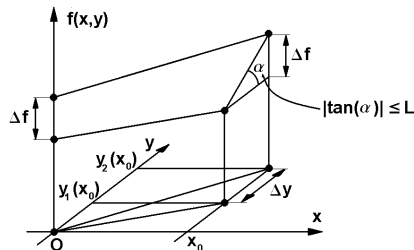
À ce sujet nous ne considérons pour le moment que des équations différentielles du 1. ordre.

Définition:

f satisfait dans D une **condition de Lipschitz** par rapport à y
 $\Leftrightarrow \exists L \in \mathbb{R}^+ : \forall (x, y_1), (x, y_2) \in D : |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$

Symbole: $f \in \text{Lipschitz}$

L s'appelle **constante de Lipschitz**.

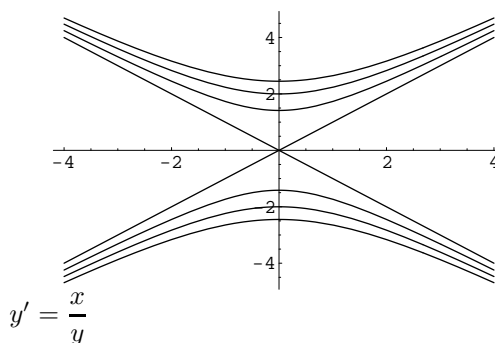
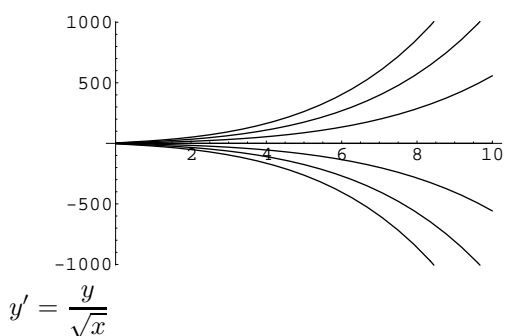


Remarque:

La condition de Lipschitz est une condition plus faible que la dérivabilité.

Lipschitz: $Q(f, x, y_1(x), y_2(x)) := \left| \frac{f(x, y_2(x)) - f(x, y_1(x))}{y_2(x) - y_1(x)} \right| \leq L, \quad y_1(x) \neq y_2(x)$

Dérivable: $\lim_{y_2 \rightarrow y_1} Q(f, x, y_1(x), y_2(x)) \text{ ex.}$



Théorème:

Hyp.:

- 1) f dérivable dans $U_\delta(y_0)$
- 2) f'_y borné($U_\delta(y_0)$)

Thè.:

f satisfait une condition de Lipschitz dans $U_\delta(y_0)$

Quant à la preuve:

Soit $\Delta x > 0 \Rightarrow \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \frac{|\Delta y|}{\Delta x} \rightarrow |y'| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta y}{\Delta x} \right| = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta y|}{\Delta x} = \frac{|dy|}{dx}$

Analogement:

$|f'_y| = \left| \frac{df}{dy} \right|$ avec $|f'_y| \leq k$ dans $U_\delta(y_0)$ (f borné) \Rightarrow

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| = \left| \int_{f(x, y_2)}^{f(x, y_1)} df \right| \leq \left| \int_{f(x, y_2)}^{f(x, y_1)} |df| \right| = \left| \int_{y_2}^{y_1} \frac{|df|}{dy} dy \right| \leq \left| \int_{y_2}^{y_1} k dy \right| = k \cdot |y_1 - y_2|$$

Choisir: $L := k \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq k \cdot |y_1 - y_2| = L \cdot |y_1 - y_2|$ (Lipschitz)



Signification de L :

Soit f dérivable dans $U_\delta(y_0) \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L \cdot |y_1 - y_2|$
 $\Rightarrow L \geq \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \Rightarrow |f'_y| = \lim_{y_2 \rightarrow y_1} \frac{|f(x, y_1) - f(x, y_2)|}{|y_1 - y_2|} \leq L \Rightarrow |f'_y| \leq L$

Conséquences: L ist eine Schranke für $|f'_y|$ L est une borne pour $|f'_y|$

Ensuite, comme conséquence de la condition de Lipschitz, on peut noter:

$y_2 \rightarrow y_1 \Rightarrow |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \rightarrow 0$ ç. v. d. $f(x, y_1) \rightarrow f(x, y_2) \rightsquigarrow$

Corollaire: Hyp.: $f \in \mathcal{L}ipschitz(y)$
Thè.: $f \in cont(y)$

Remarque: La condition de Lipschitz est donc plus faible que le condition de la dérivabilité, mais plus forte que la condition de continuité.

2.4.3 Existence et univocité pour des régions générales

Théorème: Hyp.:

- (1) **PVI:** $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
- (2) $f \in cont(D)$
- (3) $\forall \bar{U}_{CD} : f \in \mathcal{L}ipschitz(\bar{U})$

Thè.:

- (1) Le **PVI** est résoluble dans U de façon univoque.
- (2) Les courbes intégrales passent dans D de limite (frontière) à limite.

Théorème: Hyp.:

- (1) **PVI:** $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
- (2) $f \in cont(D)$
- (3) $\forall \bar{U}_{CD} : f \in \mathcal{L}ipschitz(\bar{U})$
- (4) $f \notin \mathcal{L}ipschitz(\partial D)$

Thè.:

- (3) Il n'est pas possible de continuer les courbes intégrales au delà de la limite (frontière).

Remarque:

Un théorème analogue vaut pour les systèmes et par conséquent pour les équations différentielles d'ordre supérieur. Détails: voir la littérature.

Comme la condition de la dérivabilité est plus forte que la condition de Lipschitz, il résulte du dernier théorème aussitôt une conclusion simple, qui est mentionnée parfois aussi comme **théorème de Cauchy**:

Corollaire:

Hyp.:

- (1) **PVI:** $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$
- (2) f'_y existe dans D
- (3) $f'_y \in \text{borné}(D)$

Thè.:

- (1) Le **PVI** est résoluble dans U de façon univoque.

Beispiele: Exemples:

- 1. $y' = e^y \cdot \sin(x) \rightsquigarrow f(x, y) := e^y \cdot \sin(x) \in \text{dérivab.}(D_f)$, $D_f = \mathbb{R} \times [-20, 20]$
 (ç. v. d. $y \in [-20, 20]$) $\Rightarrow |f'_y| \in \text{borné}(D_f)$

Choisir: $L = \text{Max}_{(x,y) \in D_f} |f'_y| + 1 \Rightarrow f \in \mathcal{Lipschitz}(D_f)$
 \Rightarrow Le PVI est résoluble de façon univoque!

- 2. $y'(x) = \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} \cdot x^2 \Rightarrow f(x, y) = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2$, $f'_y(x, y) = \frac{3}{2} \cdot \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \cdot x^2$
 $\Rightarrow |f'_y(x, y)| = \frac{1}{\sqrt[3]{y}} \cdot x^2 \rightarrow \infty$ pour $y \rightarrow 0$, $x = \text{const.} \neq 0$

Soit $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \Rightarrow |f'_y(x, y)| \notin \text{borné}(D_f)$
 (La même chose vaut pour: $D_f = \{(x, 0) \mid x \neq 0\}$)

\rightsquigarrow A cause de $|f'_y| \leq L$ il vaut donc: $f \notin \mathcal{Lipschitz} !!$

Problème: Qu'est-ce qui se passe avec la solution pour $(x, y) = (x_0, 0)$? (A cause de la continuité de f on s'attend qu'une solution existe. Comme on a violé la condition de Lipschitz, cette solution ne peut pas être univoque!!)

Solution:

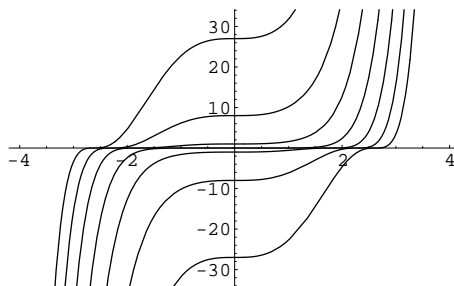
$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2} y^{\frac{2}{3}} \cdot x^2 \Rightarrow \int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int \frac{3}{2} \cdot x^2 dx \Rightarrow 3 y^{\frac{1}{3}} + C_1 = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3} x^3 + C_2 \Rightarrow y^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{6} x^3 + C$$

$$\rightsquigarrow y(x) = \left(\frac{1}{6} x^3 + C\right)^3 := (u + C)^3 := g(u), \quad u(x) := \frac{1}{6} x^3 \quad (u \text{ bijectif.})$$

Il vaut: $g'_u = 3(u + C)^2$, $g''_u = 6(u + C) = 6u + 6C = 6u + C_6 = 0$ pour $u_0 = \frac{-C_6}{6} = C_0 \rightsquigarrow$
 $g''(u_0) = g'(u_0) = g(u_0) = 0 \rightsquigarrow$

$(C_0, 0) = (u_0, 0) \in \{(u, g(u))\}$ (
Courbe de solutions)

Les points de la courbe de solutions
sur l'axe x sont donc des points
d'inflexion qui possèdent des tan-
gentes horizontales.



Comme l'application bijective $x \mapsto u(x) = \frac{1}{6}x^3$ n'effectue qu'une extension de l'axe x , la même chose vaut aussi pour les courbes intégrales $y(x)$

L'image montre que sur l'axe x les courbes peuvent être continuées de façons différentes. Là, la condition de Lipschitz et l'univocité des courbes intégrales sont violées.

Important: L'évidence (univocité) de solutions est centrale dans la technique et dans les sciences. Les systèmes, qui peuvent basculer soudainement dans une autre solution qui est aussi existente, peuvent être dangereux.

Remarque: Souvent on trouve dans la littérature pour les ingénieurs le théorème de l'existence et l'univocité des solutions exprimé de manière suivante (Picard–Lindelöf):

Théorème:

Hyp.:

$$\begin{aligned} y' &= f(x, y) \\ D_f &= \{(x, y) \mid x \in [a, b] \wedge y \in [c, d]\} \\ f(x, y), f'_y(x, y) &\in C[c, d] \\ P &= P(x_0, y_0) \quad (\mathbf{PVI}) \end{aligned}$$

Thè.:

$$\begin{aligned} \forall P \in D_f \quad \exists! y &= y(x) : \\ y &\text{ courbe de solutions} \\ y' &= f(x, y) \wedge y_0 = y(x_0) \end{aligned}$$

2.4.4 Exemple avec une solution singulière

Donné: Eq.diff.

$$(y'(x) - 1)^3 = 27 \cdot (y(x) - x)^2$$

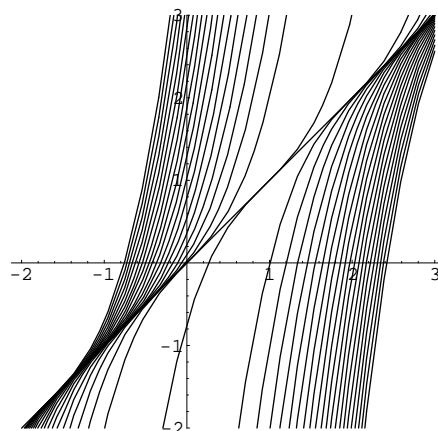
On peut vérifier tout de suite:

Solut. générale:

$$y(x) = (x - C)^3 + x$$

Solution singulière:

$$y(x) = x$$



2.5 Types d'équations, méthodes de solution

2.5.1 Méthode d'itération de Picard¹

Etudier: $y' = f(x, y)$, $x \in [x_0, x_0 + a]$, $f \in \mathcal{Lipschitz}$

Equation intégrale liée: $\int y' dx = y(x) + C = \int f(x, y) dx$

\leadsto PVI: $y'(x) = f(x, y) \wedge y(x_0) = y_0 \Rightarrow$ Solution univoque!

Méthode: Appliquons la **méthode d'itération**. Dans l'analyse fonctionnelle on peut montrer que la suite de fonctions suivante (suite d'itération) converge vers une solution:

Départ: $y_1(x) = y_0 = \text{const.}$ (Choisir y_0)

Itération: $y_{k+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_k(t)) dt$

Exemple:

PVI: $y' = y + x \Rightarrow f(x, y) = y + x$, $y(0) = 0$, $\neq 0$ ($x \neq 0 \Rightarrow 0 + x \neq 0$)

Départ: $y_1(x) = y_0 = 0$

Itération: $y_2(x) = y_{1+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^x f(t, y_1(t)) dt = 0 + \int_0^x (0 + t) dt = \frac{1}{2} \cdot x^2$

$$y_3(x) = 0 + \int_0^x (y_2(t) + t) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{2} \cdot t^2 + t\right) dt = \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2$$

$$y_4(x) = 0 + \int_0^x (y_3(t) + t) dt = \int_0^x \left(\frac{1}{3!} \cdot t^3 + \frac{1}{2!} \cdot t^2 + t\right) dt = \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2$$

¹Emilie Picard, 1856 - 1941

$$\begin{aligned} & \vdots & & \vdots \\ y_n(x) &= 0 + \int_0^x (y_{n-1}(t) + t) dt = \dots = \frac{1}{n!} \cdot x^n + \frac{1}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} + \dots + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{2!} \cdot x^2 \\ & \rightsquigarrow y(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^n \right) - x - 1 = e^x - x - 1 \end{aligned}$$

Contrôle:

$$y' = y + x \Rightarrow (e^x - x - 1)' = e^x - 1 = (e^x - x - 1) + x + y = x, \quad y(0) = e^0 - 0 - 1 = 1 - 1 = 0 \rightsquigarrow \text{☺}$$

Problème: Dans la pratique, le travail pour calculer d'après cette méthode peut devenir énorme. En effet on obtient une série de puissances. Si la loi de composition n'est pas bien visible, le problème du rayon de convergence et l'estimation d'erreur reste ouverte.

Maintenant nous allons nous occuper un peu des types d'équations résolubles de façon simple:

2.5.2 Méthode de séparation des variables

Nous avons déjà utilisé la méthode de séparation des variables. (Voir page 13.) Maintenant nous allons discuter la méthode de façon plus générale.

Définition: Une équation diff. de la forme $y'(x) = f(x) \cdot g(y)$ l'appelle **séparable**.

Méthode: $y' = \frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y) \Rightarrow \frac{dy}{dx} \cdot \frac{1}{g(y)} = f(x), \quad g(y) \neq 0$
 $\Rightarrow \int \frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx \rightsquigarrow$

Lemme: **Hyp.:** $y'(x) = f(x) \cdot g(y), \quad g(x) \neq 0$

Thè.: $\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$

Conséquence:

Soit $G(y) := \int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx = F(x) + C$. Soit $G^{-1}(y)$ définie.
 $\rightsquigarrow y = G^{-1}(F(x) + C)$

Beispiele: Exemples:

1. **Eq.diff.:** $e^y \cdot y' - x^2 - x = 0 \Rightarrow y' = (x^2 + 2) \cdot e^{-y} = f(x) \cdot g(y) \rightsquigarrow$

séparable

$$\begin{aligned} &\Rightarrow G(y) = \int \frac{1}{g(y)} dy = \int \frac{1}{e^{-y}} dy = \int e^{-y} dy = e^y + C_1 \\ &= \int f(x) dx = \int (x^2 + 2) dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C_2 \\ &\Rightarrow e^y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C \Rightarrow y = \ln\left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C\right) \end{aligned}$$

2. **Eq.diff.:** $y' = e^y \cdot \sin(x)$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int e^{-y} dy = \int \sin(x) dx \Rightarrow -e^{-y} = -\cos(x) - C \Rightarrow e^{-y} = \cos(x) + C \\ &\Rightarrow -y = \ln(\cos(x) + C), \quad y = -\ln(\cos(x) + C) \end{aligned}$$

3. Circuit électrique RC (résistance ohmique, condensateur)

$$\text{PVI: } R \cdot C \cdot I' + I = 0 \Rightarrow U(t) = R \cdot I(t) = \text{const.} - \frac{1}{C} \int_{t_0}^{t_1} I(t) dt$$

$$\text{Soit } U_C(0) = \text{const.} = 0 \Rightarrow I = I(t) = \frac{U_0}{R} \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

4. **Eq.diff.:**

$$y' = -\text{sgn}(y) \cdot x \cdot \sqrt{|y|} = \begin{cases} -x \sqrt{+y} & y \geq 0 \\ +x \sqrt{-y} & y < 0 \end{cases}$$

$$\text{Solution: } y(x) = \frac{1}{16} (C - x^2)^2, \quad x \in (-\sqrt{C}, +\sqrt{C}), \quad C > 0$$

5. **Eq.diff.:** $y' = y^2 + 1, \quad y(0) = 0 \rightsquigarrow$

$$\text{Solution: } y(x) = \tan(x + n \cdot \pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

2.5.3 Eq. diff. "presque séparable"

Notions: Soient donnés des polynômes $P(x), Q(x)$.

Nous appelons "presque séparable" l'équation différentielle suivante:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x)$$

Dérivation d'une formule de solution:

1. Soit $Q(x) = 0$. $\rightsquigarrow y' = P(x) \cdot y$ est séparable. \rightsquigarrow

$$\begin{aligned} \int P(x) dx = \int \frac{dy}{y} &= \ln(|y|) + C_1 := \ln(|y|) - \ln(|C_2|) = \ln\left(\frac{|y|}{|C_2|}\right) \Rightarrow \frac{|y|}{|C_2|} = e^{\int P(x) dx} \\ \Rightarrow |y| &= |C_2| \cdot e^{\int P(x) dx}, \quad y = C \cdot e^{\int P(x) dx} \end{aligned}$$

2. Etudier:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(y \cdot e^{-\int P(x) dx}) &= y' \cdot e^{-\int P(x) dx} + y \cdot e^{-\int P(x) dx} \cdot (-P(x)) \\ &= (y' - y \cdot P(x)) \cdot e^{-\int P(x) dx} = Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{d}{dx}(y \cdot e^{-\int P(x) dx}) dx &= (y \cdot e^{-\int P(x) dx}) + C_1 = \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx \Rightarrow \\ y(x) &= e^{\int P(x) dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx - C_1 \right) = e^{\int P(x) dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right) \end{aligned}$$

Théorème:**Hyp.:**

$$\begin{aligned} y' &= P(x) \cdot y + Q(x), \\ \text{Polynômes } P(x), Q(x) \end{aligned}$$

Thè.:

$$y(x) = (e^{\int P(x) dx}) \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right)$$

Exemple: Eq.diff.: $y' = 3x^2 \cdot y + x^2$

$$\rightsquigarrow P(x) = 3x^2, \quad Q(x) = x^2 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} y(x) &= e^{\int 3x^2 dx} \cdot \left(\int x^2 \cdot e^{-\int 3x^2 dx} dx + C \right) = e^{(x^3)} \cdot \left(\int x^2 \cdot e^{-(x^3)} dx + C \right) = \left(C - \frac{1}{3} \right) \cdot e^{(x^3)} \\ &\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{3} \cdot e^{(x^3)} + C_0 \end{aligned}$$

2.5.4 Méthode de substitution

Pour certains types d'équations, une substitution est recommandable.

Exemple: Le type d'équation $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\begin{aligned} \text{Substituer: } z &:= \frac{y}{x} \rightsquigarrow y = z \cdot x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y' = \frac{dz \cdot x}{dx} = \frac{dz}{dx} \cdot x + z \cdot \frac{dx}{dx} \Rightarrow y' = z' \cdot x + z \\ \rightsquigarrow z' &= \frac{f(z) - z}{x} \Rightarrow \text{séparable} \end{aligned}$$

Beispiele: Exemples:

$$\begin{aligned} 1. \text{ Eq.diff.: } x \cdot y' - y - x &= 0 \Rightarrow y' = \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} := f\left(\frac{y}{x}\right) \\ \Rightarrow y' &= \frac{x+y}{x} = 1 + \frac{y}{x} \Big|_{z=\frac{y}{x}} 1 + z = z' \cdot x + z \\ \Rightarrow z' \cdot x &= 1, \quad z' = \frac{1}{x} \Rightarrow z = \ln(|x|) + C = \frac{y}{x} \Rightarrow y(x) = x \cdot (\ln(|x|) + C) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ Eq.diff.: } y' &= \frac{x^2 + y^2}{2xy} = \frac{1 + \frac{y^2}{x^2}}{2 \frac{y}{x}} = \frac{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}{2 \frac{y}{x}} = \frac{1 + (z)^2}{2z} = z' \cdot x + z \\ \Rightarrow z' &= \frac{dz}{dx} = \left(\frac{1 + (z)^2}{2z} - z \right) \cdot \frac{1}{x} = \left(\frac{1}{2}z - z + \frac{1}{2z} \right) \cdot \frac{1}{x} = \left(-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2z} \right) \cdot \frac{1}{x} \\ \rightsquigarrow &\text{ séparable} \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \text{ Solution: } z(x) = \pm \sqrt{\frac{x+C}{x}}, \quad y(x) = \pm \sqrt{x(x+C)}$$

2.5.5 Eq.diff. exacte

$$\text{Nous étudions: } y'(x) = \frac{dy(x)}{dx} = -\frac{g(x,y)}{h(x,y)}$$

Cette formule se laisse réécrire formellement d'après le procédé connu de la séparation de variables dans:

$$h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0$$

Maintenant, on voit à gauche, dans cette expression, une différentielle totale:

$$dF(x, y) = F_x' dx + F_y' dy = h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0$$

Ici, le problème est l'existence de la fonction $F(x, y)$.

S'il existe donc une fonction $F(x, y)$ avec $F_x' = g(x, y)$ et $F_y' = h(x, y)$, alors $F_x' dx + F_y' dy = h(x, y) dy + g(x, y) dx$ est une différentielle totale.

Nous pouvons utiliser ce fait pour résoudre l'équation différentielle:

$$\leadsto h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0 = dF \Rightarrow F(x, y) = \int dF = C = \text{const.}$$

(Car $dF = 0$ n'est valable que pour $F = \text{const.}$)

Conséquence: $y(x)$ est maintenant donné de façon implicite par $F(x, y) = C$. Si cette équation est résoluble vers y , on a la solution explicite.

C'est pourquoi nous définissons:

Définition:

Une équation différentielle de forme $h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0$ s'appelle **exacte** dans D , s'il existe dans D une fonction $F(x, y)$ avec $F_x' = g(x, y)$ et $F_y' = h(x, y)$.
 F s'appelle **intégrale générale**.

Corollaire:

On peut interpréter une éq. diff. exacte $h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0$ comme différentielle totale $dF = F_x' dx + F_y' dy$. Ainsi on connaît la solution implicite $F(x, y) = C$. On trouve la solution explicite en résolvant cette équation, si c'est possible.

Pour une fonction qui se comporte de manière propre on trouve: $F_{xy}'' = F_{yx}''$. C'est pourquoi pour une éq. diff. exacte il faut avoir conformément: $g_y' = h_x'$ (condition nécessaire).

Lemme:

Hyp.:

Eq.diff.

$$h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0, \quad g_y' = h_x'$$

Thè.:

L'éq.diff. est exacte.

Beispiele: Exemples:

$$1. \text{ Eq.diff. } y' = -\frac{y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y}{x^3 + (1+xy)e^{xy}} \Rightarrow (y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y) dx + (x^3 + (1+xy)e^{xy}) dy = 0$$

$$\leadsto g_y' = 3x^2 + 2e^{xy} y + e^{xy} x y^2 = h_x' \quad \odot$$

Si l'éq.diff. est exacte, il vaut:

$$F(x, y) = \int (y^2 \cdot e^{xy} + 3x^2 y) dx = \int (x^3 + (1 + xy) e^{xy}) dy = C$$

$$\leadsto y \cdot e^{xy} + x^3 y + C(y) = x^3 y + \frac{1}{x} e^{xy} + y \cdot e^{xy} - \frac{1}{x} e^{xy} + C(x) \Rightarrow C(y) = C(x) = C_0 = \text{const.}$$

$$\Rightarrow F(x, y) = y \cdot e^{xy} + x^3 y + C_0 \quad \text{intégrale générale.}$$

$$\leadsto y(x) \quad \text{est solution de:} \quad y \cdot e^{xy} + x^3 y = C$$

2. **Eq.diff.** $y'(1+x^2) + 2xy = 0 \Rightarrow 2xy dx = (1+x^2) dy, (2xy)'_y = 2x = (1+x^2)'_x$

$$\Rightarrow F(x, y) = x^2 y + y + C_0 \quad \text{intégrale générale} \Rightarrow x^2 y + y = C, y(x) = \frac{C}{1+x^2}$$

2.5.6 Multiplicateurs d'Euler

Exemple

$$y' = -\frac{y}{2x} \Rightarrow y dx + 2x dy = 0 \leadsto g'_y = 1, h'_x = 2 \leadsto \text{Eq.diff non exacte!}$$

Problème: Est-ce qu'on peut sauver la chose encore? – Oui! On peut rendre l'éq.diff. exacte de façon "artificielle". Pour cela, on a besoin des **multiplicateurs d'Euler**².

Idée: Multiplier l'éq.diff. avec $y!$

$$\leadsto y dx + 2x dy = 0 \mid \cdot y \Rightarrow y^2 dx + 2xy dy = 0 \leadsto \text{exacte!}$$

$$\Rightarrow F_1(x, y) = x y^2 + C_0 \quad \text{Solution: } : x y^2 = C \Rightarrow y = \pm \sqrt{\frac{C}{x}} = \frac{C_1}{\sqrt{|x|}}$$

Attention: Les multiplicateurs d'Euler ne sont pas toujours bien clairs!

Exemple: Pour $x > 0$ la multiplication de l'équation avec $\frac{1}{\sqrt{x}}$ mène à l'eq.diff. exacte suivante:

$$\frac{y}{\sqrt{x}} dx + 2\sqrt{x} dy = 0$$

$$\leadsto y x^{-\frac{1}{2}} dx + 2x^{\frac{1}{2}} dy = 0 \Rightarrow F_2(x, y) = 2y \cdot x^{\frac{1}{2}} = 2y \cdot \sqrt{x} = C$$

$$\leadsto \text{Solution: } : y(x) = \frac{C}{2\sqrt{x}} = \frac{C_1}{\sqrt{x}}$$

\leadsto Solution qu'on a déjà trouvée ci-dessus!

Description plus générale de la méthode

Soit $h(x, y) dy + g(x, y) dx = 0, g(x, y), h(x, y) \in \text{cont}(D)$ (Eq.diff.)

Soit $M(x, y) \neq 0$ dans D

²Leonard Euler, 1707 – 1783

Définition: $M(x, y) \cdot h(x, y) dy + M(x, y) \cdot g(x, y) dx = 0$ exacte
 $\Rightarrow M(x, y)$ s'appelle **facteur intégrant** ou **multiplicateur d'Euler**

Remarque:

1. Les multiplicateurs d'Euler sont parfois appelés faussement "multiplicateurs de Lagrange". "L'italien" Lagrange originaire de Turin était en 1766 à Berlin, où Euler travaillait aussi. Plus tard Lagrange a séjourné et travaillé à Paris.
2. Trouver le facteur intégrant est généralement difficile. Cependant on réussit bien dans certains cas connus.

Exemple d'un cas spécial:

Soient $g(x, y), h(x, y), M(x, y) \in \mathcal{C}^1$ (dérivables de façon continue)

Soit $F''_{x,y} = F''_{y,x} \Rightarrow (M(x, y) \cdot g(x, y))'_y = (M(x, y) \cdot h(x, y))'_x$

\leadsto Equation différentielle partielle $M'_y \cdot g + M \cdot g'_y = M'_x \cdot h + M \cdot h'_x$

$\Rightarrow M = \frac{M'_x \cdot h - M'_y \cdot g}{g'_y - h'_x} \leadsto$ éventuellement M peut être formé.

Spécialement: $M(x, y) = M(x) \Rightarrow M'_y \equiv 0$

$\Rightarrow \frac{M'_x}{M} = \frac{g'_y - h'_x}{h} = (\ln(M))'_x \Rightarrow \ln(M) = \int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C \Rightarrow M = M(x) = e^{(\int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C)}$

Théorème: **Hyp.:** $M(x, y) = M(x)$

Thè.: $\frac{M'_x}{M} = \frac{g'_y - h'_x}{h}, M = M(x) = e^{(\int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C)}$

Beispiele: Exemples:

1. **Eq.diff.:** $y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)x'_t + (3y^2 + x)y'_t = 0, x'_t = \frac{dx}{dt}, y'_t = \frac{dy}{dt}$

$\Rightarrow y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)dx + (3y^2 + x)dy = g dx + g dy = 0, g'_y \neq h'_x$

Essayer: $M = M(x),$

$\frac{M'_x}{M} = \frac{g'_y - h'_x}{h} = \frac{1 \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1) + y \cdot (2 \cdot 2xy) - 1}{(3y^2 + x)} = \frac{2x^2 + 6xy^2}{x + 3y^2} = 2x := q(x)$

$\Rightarrow M = M(x)!!$

$\Rightarrow M(x) = e^{(\int \frac{g'_y - h'_x}{h} dx + C_0)} = e^{(\int 2x dx + C_0)} = e^{(x^2 + C_1)} = e^{(x^2)} \cdot C$ Choisir C librement
(seulement un multiplicateur nécessaire!). $\Rightarrow C := 1, M = e^{(x^2)}$

\Rightarrow **Eq.diff.** $e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1)dx + e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x)dy$ exacte.

$$\begin{aligned}
& e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1) dx + e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x) dy = F'_x dx + F'_y dy \\
& \Rightarrow F(x, y) = \int F'_y dy = \int e^{(x^2)} \cdot (3y^2 + x) dy = e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + C_1(x) \\
& \Rightarrow F'_x = \frac{d}{dx} e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + C_1(x) = 2xe^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) + e^{(x^2)} \cdot y + C_1(x)' \stackrel{?}{=} e^{(x^2)} \cdot y \cdot (2x^2 + 2xy^2 + 1) \\
& \Rightarrow C_1(x)'_x = 0, \quad C_1(x) = C_0 = \text{const.} \quad \Rightarrow F(x, y) = e^{(x^2)} \cdot (y^3 + xy) = C \\
& \rightsquigarrow y = - \left(\frac{2^{\frac{1}{3}} e^{x^2} x}{(27C e^{2x^2} + \sqrt{729C^2 e^{4x^2} + 108e^{6x^2} x^3})^{\frac{1}{3}}} \right) + \frac{(27C e^{2x^2} + \sqrt{729C^2 e^{4x^2} + 108e^{6x^2} x^3})^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{3}} e^{x^2}}
\end{aligned}$$

☺

2. Exemple avec séparation des variables

$$g(x, y) dx + h(x, y) dy = (x - 1)^2 y dx + x^2 (y + 1) dy = 0$$

$$\begin{aligned}
& \Rightarrow g(x, y) = (x - 1)^2 y = M_1(x) \cdot N_1(y), \quad h(x, y) = x^2 (y + 1) = M_2(x) \cdot N_2(y) \\
& g(x, y) dx + h(x, y) dy = M_1(x) \cdot N_1(y) dx + M_2(x) \cdot N_2(y) dy
\end{aligned}$$

Idée: Choisir: $M = \frac{1}{N_1(y) \cdot M_2(x)}$

$$\Rightarrow M \cdot g(x, y) dx + M \cdot h(x, y) dy = \frac{M_1(x) \cdot N_1(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)} dx + \frac{M_2(x) \cdot N_2(y)}{N_1(y) \cdot M_2(x)} dy = \frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy$$

\rightsquigarrow **Eq.diff.** $g_1(x) dx + h_1(y) dy = F'_x dx + F'_y dy = 0$ avec

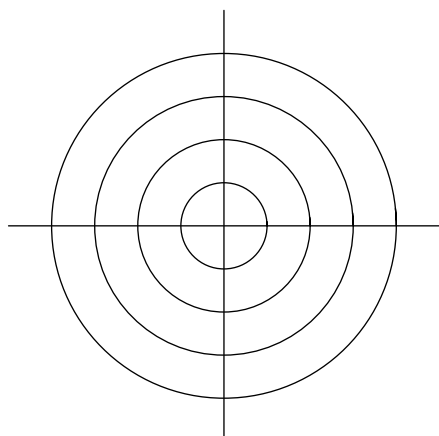
$$F(x, y) = G(x) + H(y) + C, \quad g_1(x) = G'_x, \quad h_1(x) = H'_y, \quad ((g_1)'_y = 0 = (h_1)'_x)$$

$$\begin{aligned}
& \rightsquigarrow \text{Eq.diff.} \quad \frac{(x-1)^2}{x^2} dx = \frac{y+1}{y} dy = 0 \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = \int \frac{(x-1)^2}{x^2} dx = \\
& \int \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right) dx = x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_1(y), \quad F(x, y) = \int \frac{y+1}{y} dy = \int \left(1 + \frac{1}{y}\right) dy = \\
& y + \ln(|y|) + C_2(x) \quad \Rightarrow \quad x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_1(y) = G(x) + C_1(y) = H(y) + C_2(x) = \\
& y + \ln(|y|) + C_2(x) \quad \Rightarrow \quad C_1(x) = x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + C_0 \wedge C_2(y) = y + \ln(|y|) + C_0 \quad \Rightarrow \quad F(x, y) = \\
& x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + y + \ln(|y|) + C_0, \quad x - 2 \ln(|x|) - \frac{1}{x} + y + \ln(|y|) = C \quad \Rightarrow \quad y(x) = \dots
\end{aligned}$$

Ici il est facile de calculer $x(y)$. De cela on peut chercher et trouver graphiquement $y(x)$. Une autre méthode se fait par une approximation des expressions par des polynômes de Taylor.

2.5.7 Une application: Enveloppe d'une famille de courbes

Exemple 1: $\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c^2 = 0, \quad c = r \rightsquigarrow$ Cercles concentriques, pas d'enveloppe!



$$\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - c^2 = 0, \quad c = r$$

Exemple 2: Famille de courbes à droite: $\Phi(x, y, c) = 0$
 c : Paramètre d'un système de courbes

Nous supposons que, dans notre cas, pour la famille de courbes il existe une courbe, qui correspond à ce qu'on peut se représenter environ comme enveloppe. Maintenant il est essentiel de définir exactement cette enveloppe:

Définition:

γ est l'**enveloppe** de la famille de courbes $\{\gamma_i\} \Leftrightarrow$

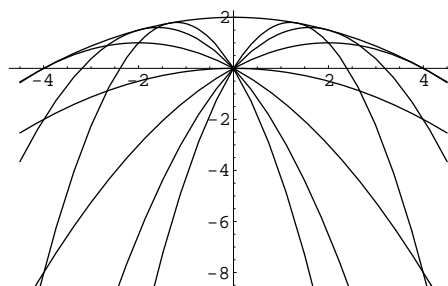
- (1) γ est courbe, $\gamma : t \mapsto \vec{r}(t)$
- (2) Dans chaque point $P_i(x_i, y_i)$, $|\gamma|$ touche exactement une courbe $|\gamma_i|$ de la famille S .

Conséquence: $\forall P_i(x_i, y_i) \in |\gamma| \exists c_i, \gamma_i : c = c(x_i, y_i) \wedge \Phi(x_i, y_i, c(x_i, y_i)) = 0$

"Toucher" \rightsquigarrow Pentés des tangentes sont égales

Examination des pentés de tangentes:

1. $\underline{\gamma}$: $\Phi(x, y, c(x, y)) = 0 \Rightarrow d\Phi = 0 \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial c} dc = 0, \quad dc = \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy$
 $\Rightarrow d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial c}{\partial y} dy \right) = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial c} \frac{\partial c}{\partial y} dy = 0$
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial\Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$
2. $\underline{\gamma}$: $\Phi(x, y, c_i) = 0 \wedge c = c_i = \text{const.} \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial c} = 0 \Rightarrow d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy$
 $\Rightarrow \frac{d\Phi}{dx} = \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0$
3. $\underline{\gamma = \gamma_i}$: $c = c_i, P = P_i, \text{Pente } \frac{dy}{dx}|_{\gamma} = \frac{dy}{dx}|_{\gamma_i}, (x_i, y_i, c_i)|_{\gamma} = (x_i, y_i, c_i)|_{\gamma_i}$
 $\Rightarrow \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_{|\gamma} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}, \frac{\partial\Phi}{\partial y} \right)_{|\gamma_i}$
 $\Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \wedge \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial\Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial\Phi}{\partial c} \left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c}{\partial y} \frac{dy}{dx} \right) = 0$



$$\Phi(x, y, C) = y - cx + a(1 + c^2)x^2 = 0$$

Famille: c est paramètre variable

$$\leadsto \Phi(x, y, c) = 0 \Rightarrow c = c(x, y), \quad \frac{\partial c(x, y)}{\partial x} \neq 0 \quad (\text{Si non } c(x, y) \text{ devrait être } = \text{const.} \neq \text{variable.})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 \leadsto \text{Eq.diff pour } \Phi!$$

On obtient donc:

Théorème:

l'enveloppe γ est définie par les conditions suivantes:

$$(1) \quad \Phi(x, y, c) = 0$$

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0$$

A l'aide de ce théorème on réussit à calculer l'enveloppe d'une famille de courbes.

Exemple: "Ligne de sécurité" comme enveloppe d'une famille de parabôles de tir, $\alpha =$ angle de lancement.

$$1. \quad y - cx + a(1 + c^2)x^2 = 0, \quad y = cx - a(1 + c^2)x^2$$

$$2. \quad \frac{\partial \Phi}{\partial c} = 0 = -x + ax^2 \cdot 2c \Rightarrow c = \frac{1}{2ax} \Rightarrow y = -ax^2 + \frac{1}{4a} \leadsto \text{Parabôle!}$$

2.6 Théorie des éq.diff. linéaires

2.6.1 Introduction, définitions

Définition:

Une éq.diff. d'ordre n s'appelle **linéaire**, si elle est linéaire dans $y, y', \dots, y^{(n)}$:

$$\sum_{j=0}^n y^{(j)}(x) \cdot a_j(x) = b(x), \quad a_n(x) \neq 0, \quad a_j(x), b(x) \in \text{cont}$$

$b(x) \equiv 0 \leadsto$ le système s'appelle **homogène**

$b(x) \neq 0 \leadsto$ le système s'appelle **non-homogène**

La généralisation du théorème d'existence et d'univocité pour les systèmes d'éq.diff. et par conséquent pour une éq.diff. d'ordre supérieur dit que le PVI est toujours clairement soluble pour les éq.diff. linéaires.

Comme nous savons nous pouvons écrire une telle éq.diff. d'ordre supérieur comme système d'ordre 1^{er} comme il suit:

$$\left| \begin{array}{l} y(x) : = z_0(x) \\ y'(x) : = z_1(x) = z'_0(x) \\ \vdots = \vdots \\ y^{(n)}(x) = z_n(x) = z'_{n-1}(x) = \frac{b(x)}{a_n(x)} - \sum_{j=0}^{n-1} \frac{a_j(x)}{a_n(x)} \cdot z_j(x) \end{array} \right|$$

Ecrit à l'aide de vecteurs: Soit :

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & & 0 \\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -\frac{a_0}{a_n} & -\frac{a_1}{a_n} & \dots & \dots & \dots & -\frac{a_{n-1}}{a_n} \end{pmatrix}, \quad \vec{z}(x) = \begin{pmatrix} z_0(x) \\ \vdots \\ z_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad \vec{b}(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{b(x)}{a_n(x)} \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \vec{z}'(x) = A(x) \cdot \vec{z}(x) + \vec{b}(x)$$

Beispiele: Exemples:

1. $y \cdot y''' + y'' = e^{-x} \rightsquigarrow$ non linéaire
2. $(y''')^2 + y^3 = 0 \rightsquigarrow$ non linéaire
3. $5x^2 \cos(x) \cdot y' - 2y'' \cdot x \cdot e^{\cosh(x)} + 6y = 0 \rightsquigarrow$ linéaire, homogène
4. $4y' - \sqrt{x} y''' + \tan(x) \cdot \frac{1}{x^2 + 1} \cdot y = \sin(x) \rightsquigarrow$ linéaire, non-homogène
5. $\cos(y') + y = 0 \rightsquigarrow$ non linéaire

2.6.2 Système homogène

CL de solutions

Soit $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $a_j(x) := a_j$.

y_i solution du problème homogène. $\rightsquigarrow y_i \in \mathbb{L}_{hom} \rightsquigarrow$

1. $\sum_{j=0}^n a_j \cdot y_i^{(j)} = 0 \Rightarrow \lambda_k \cdot \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_i^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j \cdot (\lambda_k y_i^{(j)}) = 0 \Rightarrow \lambda_k \cdot y_i(x) \in \mathbb{L}_{hom}$
2. $\sum_{j=0}^n a_j \cdot y_1^{(j)} = 0 \wedge \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_2^{(j)} = 0 \Rightarrow \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_1^{(j)} + \sum_{j=0}^n a_j \cdot y_2^{(j)} = \sum_{j=0}^n a_j \cdot (y_1^{(j)} + y_2^{(j)}) = 0$
 $\Rightarrow (y_1(x) + y_2(x)) \in \mathbb{L}_{hom}$

Théorème:

Hyp.:

$$y_1, \dots, y_k \in \mathbb{L}_{hom}, \quad \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$$

Thè.:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot y_i \in \mathbb{L}_{hom}$$

Définition: Un ensemble $\{f_1(x), \dots, f_k(x)\}$ s'appelle **linéairement indépendant** (l.i.) \Leftrightarrow

$$\forall_{CL} \sum_{i=1}^k \lambda_i \cdot f_i(x) \equiv 0, \lambda_i \in \mathbb{R} : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_k = 0$$

Exemple: $\{f_1(x), f_2(x)\} = \{e^{\alpha x}, e^{\beta x}\}$ l.i. pour $\alpha \neq \beta$:

Soit $\lambda_1 \cdot e^{\alpha x} + \lambda_2 \cdot e^{\beta x} = 0 \wedge \lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ (Supposition)

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}(\lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x}) = \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} \cdot (\beta - \alpha) = 0$$

$$\lambda_2 \neq 0 \wedge \beta \neq \alpha \wedge e^{(\beta-\alpha)x} \neq 0 \wedge \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} \cdot (\beta - \alpha) = 0 \Rightarrow \text{Contradiction!}$$

\leadsto Supposition $\lambda_2 \neq 0$ fausse! Soit $\lambda_2 = 0$

$$\leadsto \lambda_1 + \lambda_2 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = \lambda_1 + 0 \cdot e^{(\beta-\alpha)x} = \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$



Le déterminant de Wronski

Soient $\vec{y}_0 = \vec{y}_0(x), \dots, \vec{y}_n = \vec{y}_n(x), \vec{y}_j(x) = \begin{pmatrix} y_j(x) \\ y_j'(x) \\ \vdots \\ y_j^{(n)}(x) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}$

Construire matrice:

$$Y = Y(x) = (\vec{y}_0, \dots, \vec{y}_n) = \begin{pmatrix} y_0(x) & \dots & \dots & y_n(x) \\ y_0'(x) & \dots & \dots & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_0^{(n)}(x) & \dots & \dots & y_n^{(n)}(x) \end{pmatrix}$$

Définition:

$W = W(x) := \det(Y(x))$ s'appelle **déterminant de Wronski**

Théorème:

Hyp.:

$\{y_0(x), \dots, y_n(x)\} \in \mathcal{C}^{(n)}$ (n fois dérivable de façon continue)

Thè.:

$\{y_0(x), \dots, y_n(x)\}$ l.d. $\Leftrightarrow W(x) \equiv 0$

Preuve pour l'exemple $n = 1$ (matrice 2×2)

1. $(y_0(x) \equiv 0) \vee (y_1(x) \equiv 0) \Rightarrow W(x) \equiv 0$ (Colonne = 0)

2. Soit $(y_0(x) \neq 0) \wedge (y_1(x) \neq 0)$

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_0(x) & y_1(x) \\ y_0'(x) & y_1'(x) \end{vmatrix} \equiv 0 \Leftrightarrow W(x) = y_0(x) \cdot y_1'(x) - y_1(x) \cdot y_0'(x) \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow y_0(x) \cdot y_1'(x) \equiv y_1(x) \cdot y_0'(x) \Leftrightarrow y_0(x) \cdot \frac{dy_1}{dx} \equiv y_1(x) \cdot \frac{dy_0}{dx} \Leftrightarrow y_0 \cdot \frac{dy_1}{dx} dx \equiv y_1 \cdot \frac{dy_0}{dx} dx$$

(Exception: Points discrets où le dénominateur pourrait être 0 \rightsquigarrow le cas $y_0(x), y_1(x) \neq 0$.)

$$\Leftrightarrow \int \frac{dy_1}{y_1 dx} dx \equiv \int \frac{dy_0}{y_0 dx} dx \Leftrightarrow \int \frac{dy_1}{y_1(x)} \equiv \int \frac{dy_0}{y_0(x)} \Leftrightarrow \ln(|y_1(x)|) \equiv \ln(|y_0(x)|) + C_0$$

$$\Leftrightarrow e^{\ln(|y_1(x)|)} = |y_1(x)| \equiv e^{\ln(|y_0(x)|) + C_0} = |y_0(x)| \cdot e^{C_0} = C \cdot |y_0(x)| \Rightarrow |y_1(x)| \equiv C \cdot |y_0(x)|$$

À cause de la dérivabilité de façon continue dans le domaine de définition, la dernière équivalence vaut aussi aux points éventuels d'exception discrets.

$|y_1(x)| \equiv C \cdot |y_0(x)|$ signifie pour des fonctions dérivables:

$$y_0(x), y_1(x) \neq 0 \Rightarrow y_1(x) \equiv \pm C \cdot y_0(x) \quad \text{c. v. d. } \{y_0(x), y_1(x)\} \text{ l.d.}$$

Exemple: Soit $a \neq 0$, $M = \{\sin(ax), \cos(ax)\}$

$$W(x) = \begin{vmatrix} \sin(ax) & \cos(ax) \\ a \cos(ax) & -a \sin(ax) \end{vmatrix} = -a(\sin^2(ax) + \cos^2(ax)) = -a \neq 0 \Rightarrow M \text{ l.i.}$$

Application du déterminant de Wronski

1. Eq.diff. d'ordre 1^{er}: $y' = a(x) \cdot y$, $y(x_0) = y_0$ (PVI)

PVI résoluble de façon univoque, $W(x) = y(x) \neq 0$ pour $y_0 \neq 0$

2. Eq.diff. d'ordre 2^{ème}:

$$y'' = a_0(x) \cdot y + a_1(x) \cdot y', \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) \quad \text{soit provisoirement libre.}$$

\rightsquigarrow PVI non-déterminé. Il y a plusieurs courbes intégrales qui passent par le point $(x_0, y_0 = y(x_0))$, dépendant de $y'(x_0)$.

Soient deux courbes de ce genre:

$$y_1(x), y_2(x) \quad \text{avec } y_1(x) \neq y_2(x), \quad y_1(x_0) = y_2(x_0).$$

Supposons: $W(x) \equiv 0$ (dans I , $x_0 \in I$) $\Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\}$ l.d.

$$\rightsquigarrow \exists_{\lambda_1, \lambda_2 \neq 0} : \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) \equiv 0 \Rightarrow y_2(x) \equiv -\frac{\lambda_1}{\lambda_2} y_1(x) = \mu \cdot y_1(x)$$

$$y_0 := y_1(x_0) = y_2(x_0) \Rightarrow y_0 = y_2(x_0) = \mu \cdot y_1(x_0) = \mu \cdot y_0 \Rightarrow y_0 = \mu \cdot y_0 \Rightarrow (\mu = 1) \vee (y_0 = 0)$$

(1) Cas $y_1(x) \neq 0 \wedge \mu = 1 \Rightarrow y_1(x) \equiv y_2(x) \rightsquigarrow$ Contradiction!

(2) Cas $y_1(x) \equiv 0 \wedge \mu = 1 \Rightarrow y_1(x) \equiv y_2(x) \rightsquigarrow$ Contradiction!

(3) Cas $y_0 = 0$, $\Rightarrow y_0 = y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$
Solution univoque $\rightsquigarrow y_1(x) \equiv y_2(x)$.

Conséquence:

Hyp.: $y_1(x) \neq y_2(x), y_1(x_0) = y_2(x_0) = y_0$

Thè.: $W(x) \equiv 0 \Rightarrow y_0 = 0$

Problème: Soit $W(x) \neq 0$ (dans I), $x_0 \in I$, $\{y_1, y_2\}$ l.i.

Est-ce que $W(x)$ peut devenir quand même point par point 0 dans I ?

Examination: Soit $W(x_1) = 0, x_1 \in I$

$\leadsto W(x_1) = 0 \Rightarrow y_1(x_1) \cdot y_2'(x_1) = y_2(x_1) \cdot y_1'(x_1)$

Il vaut: $\begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix}$, car autrement on aurait $y_1(x) \equiv y_2(x)$, parce que la solution de PVI pour x_1 est univoque.

Cas 1:

Soit p.ex.: $y_1(x_1), y_1'(x_1) \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)} = \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)} \Rightarrow \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix}$

\leadsto

$y_1(x), y_2(x)$ solutions pour deux VPI différents dans x_1 (PVI_1, PVI_2) avec:

$y_2(x)$ et $\lambda \cdot y_1(x)$ sont aussi deux solutions de AWP_2 .

$$\Rightarrow \lambda \cdot y_1(x) = y_2(x) \Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\} \text{ l.d.} \Rightarrow W(x) \equiv 0$$

Cas 2:

Soient $y_1(x_1) = y_2(x_2) = 0$

$\Rightarrow W(x_1) = y_1(x_1) \cdot y_2'(x_1) - y_2(x_1) \cdot y_1'(x_1) = 0, \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{y_2(x_1)}{y_1(x_1)} = \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)}$ (Bernoulli!)

Cas 2.1.:

P.ex. $y_1'(x_1) = 0 \Rightarrow y_1(x) \equiv 0$ Solution de AWP_1

$\leadsto \{y_1(x) \equiv 0, y_2(x)\} \text{ l.d.} \Rightarrow W(x) \equiv 0$

Cas 2.2.:

$y_1'(x_1), y_2'(x_1) \neq 0 \Rightarrow \frac{y_2'(x_1)}{y_1'(x_1)} = \lambda$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} y_2(x_1) \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ y_2'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} y_1(x_1) \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ y_1'(x_1) \end{pmatrix} \Rightarrow \{y_1(x), y_2(x)\} \text{ l.d.}$

$\Rightarrow W(x) \equiv 0$ comme dans le cas 1.

$\leadsto \Rightarrow W(x) \equiv 0$ Dans tous les cas.

Car: $\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = 0 \Rightarrow \lambda_1^2 \sin^2(x) = (-\lambda_2)^2 \cos^2(x)$. Soit p.ex.:
 $\lambda_1 \neq 0 \Rightarrow \forall x : \sin^2(x) = \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2 \cos^2(x)$

Qui ne voit pas tout de suite que c'est une contradiction, peut mettre à la place de x des valeurs comme 0 ou $x = \frac{\pi}{2}$.

\leadsto Solution générale: $y(x) = \lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x)$

2.6.3 Système inhomogène

Nous appliquons provisoirement les manières d'écrire suivantes:

$$A = A(x), \vec{b} = \vec{b}(x), A \cdot \vec{y} = \vec{0} \text{ (Syst.hom.)}, A \cdot \vec{y} = \vec{b} \text{ (Syst.inhom.)}$$

$$\text{Soient } \vec{y}_1, \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{inhom}, \vec{y} = \vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y(x) \\ y'(x) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(x) \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \vec{y}_1 = \vec{b}, A \cdot \vec{y}_2 = \vec{b} \Rightarrow A \cdot (\vec{y}_1 - \vec{y}_2) = \vec{b} - \vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \vec{y} = \vec{y}_1 - \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{hom}$$

D'autre part:

Soient $\vec{y}_1 \in \mathbb{L}_{inhom}, \vec{y} \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow \vec{y}_2 = \vec{y}_1 + \vec{y}$ satisfait:

$$A \cdot \vec{y}_2 = A \cdot (\vec{y}_1 + \vec{y}) = A \cdot \vec{y}_1 + A \cdot \vec{y} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b} \Rightarrow \vec{y}_2 \in \mathbb{L}_{inhom}$$

Soit $\vec{y}_p \in \mathbb{L}_{inhom}$ une solution particulière.

Par conséquent:

Théorème:

Hyp.:

Eq.diff. $A \cdot \vec{y} = \vec{b}, \vec{y}_p \in \mathbb{L}_{inhom}$
 $\{\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_n\}$ = base de l'espace de solutions
 homogènes $A \cdot \vec{y} = \vec{0}$

Thè.:

La solution générale \vec{y}_{inhom} a la forme:

$$\vec{y}_{inhom} = \vec{y}_p + \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{y}_i, \text{ hom}, \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Exemple: $y' - y = 1$

1. Problème homogène:

$$y' - y = 0, \frac{dy}{dx} = y, \int \frac{dy}{y} = \int dx \Rightarrow \ln(|y|) = x + C_0 \Rightarrow |y| = e^{x+C_0} = e^x \cdot e_0^C = e^x \cdot C_1 \\ \Rightarrow y(x) = e^x \cdot C$$

(Ici, la valeur absolue peut être omise, parce qu'à gauche et à droite du signe d'égalité il y a des fonctions dérivables, ainsi la montée de tangente ne peut avoir aucun pli.)

2. Problème non-homogène:

$$-y_p = 1 \Rightarrow y_p = -1, \quad y_p' - (-1) = 0 + 1 = 1 \rightsquigarrow \text{☺}$$

On peut deviner cette solution avec peu d'imagination.

3. $y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C \cdot e^x - 1$

Pour fixer C , on a besoin d'une condition initiale.

Remarque:

Nous avons examiné déjà plus haut ce type d'éq.diff. linéaire:

$$y' = P(x) \cdot y + Q(x)$$

Nous résolvons le **problème homogène** par **séparation des variables**:

$$y' = P(x) \cdot y \Rightarrow y_{hom} = e^{\int P(x) dx + C_1} = C \cdot e^{\int P(x) dx}$$

Nous pouvons trouver une **solution particulière** par la **méthode de la variation de la constante** (Lagrange):

Départ: $y_p := C(x) \cdot e^{\int P(x) dx}$

Ce départ est permis parce qu'il s'agit seulement d'une définition implicite de C .

$$\Rightarrow y_p' = C'(x) \cdot e^{\int P(x) dx} + C(x) \cdot e^{\int P(x) dx} \cdot P(x) := P(x) \cdot \underbrace{C(x) \cdot e^{\int P(x) dx}}_{=y} + Q(x),$$

$$C'(x) = Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} \Rightarrow C(x) = \int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C_0$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C_{hom} \cdot e^{\int P(x) dx} + \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C_0 \right) \cdot e^{\int P(x) dx}$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = e^{\int P(x) dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right)$$

Formule:

Hyp.:

Eq.diff. $y' = P(x) \cdot y + Q(x)$

Thè.:

$$y_{inhom} = e^{\int P(x) dx} \cdot \left(\int Q(x) \cdot e^{-\int P(x) dx} dx + C \right)$$

Exemple 1:

Eq.diff. $y' = -2x \cdot y + 4x \Rightarrow -2x = P(x), \quad 4x = Q(x)$

$$y_{inhom} = e^{\int -2x dx} \left(C_0 + \int 4x \cdot e^{-\int -2x dx} dx \right) = e^{-x^2} \left(C_0 + \int 4x e^{+x^2} dx \right) = e^{-x^2} \left(C_0 + 2e^{+x^2} \right)$$

$$\Rightarrow y_{inhom} = C \cdot e^{-x^2} + 2$$

Exemple 2:

Eq.diff. $y' = \frac{2y}{x} - 3 \rightsquigarrow \frac{2}{x} = P(x), Q(x) = -3$

$$y_{inhom} = e^{\int \frac{2}{x} dx} (C_0 + \int -3 \cdot e^{-\int \frac{2}{x} dx} dx) = e^{2 \ln(|x|)} \cdot (-3 \int e^{-2 \ln(|x|)} dx + C_0) =$$

$$= |x|^2 (-3 \int |x|^{-2} dx + C_0) = x^2 (-3 \int \frac{1}{x^2} dx + C_0) = x^2 (-3 \frac{-1}{x} + C_0) = x^2 (\frac{3}{x} + C_0) = 3x + \frac{C_0}{x^2}$$

Exemple 3:

Eq.diff. $y' + y = y^2 (\cos(x) - \sin(x)) \rightsquigarrow$ Non linéaire!

$$\rightsquigarrow \frac{y'}{y^2} + \frac{1}{y} = \cos(x) - \sin(x). \quad \text{Subst.: } z := -\frac{1}{y} \Rightarrow z' = -\frac{1}{y^2} \cdot y' \cdot (-1)$$

$$\rightsquigarrow z' - z = \cos(x) - \sin(x) \rightsquigarrow \text{Linéaire!} \rightsquigarrow z(x) = \frac{1}{y(x)} = e^x C_0 + \sin(x)$$

$$\rightsquigarrow y(x) = \frac{1}{e^x C_0 + \sin(x)}$$

2.7 Eq.diff. linéaires avec coefficients constants

2.7.1 Problème homogène

Nous étudions le PVI suivant:

$$\begin{aligned} a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y &= f(x) \\ y(x_0) &= y_0 \\ \vdots &= \vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned} \quad \text{avec } a_i \in \mathbb{R}, a_0, a_n \neq 0$$

Il vaut: $y_{inhom} = y_{hom} + y_p$

Le problème homogène et affilié est:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

Manière d'écrire abrégée: $\vec{L} := \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, \vec{y} := \begin{pmatrix} y \\ \vdots \\ y^{(n)} \end{pmatrix} \rightsquigarrow \langle \vec{L}, \vec{y} \rangle = 0$

On sait: Il existe exactement n solutions linéairement indépendantes.

Idée: Utiliser $y = e^{\lambda x}$, mettre cette expression dans l'éq.diff., puis dans chaque dérivée il apparaît le facteur $y = e^{\lambda x}$!

$$\rightsquigarrow \text{Eq.diff.: } a_n (\lambda^n) e^{\lambda x} + a_{n-1} (\lambda^{n-1}) e^{\lambda x} + \dots + a_1 (\lambda^1) e^{\lambda x} + a_0 (\lambda^0) e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow e^{\lambda x} \cdot (a_n (\lambda^n) + a_{n-1} (\lambda^{n-1}) + \dots + a_1 \lambda + a_0 \cdot 1) = 0, e^{\lambda x} \neq 0$$

$$\Rightarrow a_n (\lambda^n) + a_{n-1} (\lambda^{n-1}) + \dots + a_1 \lambda + a_0 := P(\lambda) = 0$$

Définition: $P(\lambda) := a_n(\lambda^n) + a_{n-1}(\lambda^{n-1}) + \dots + a_1\lambda + a_0$ s'appelle **polynôme caractéristique** de l'éq.diff.

Conséquence: D'après la construction $P(\lambda) = 0$ a au maximum n solutions différentes $y_i = e^{\lambda_i x}$.

Plus haut nous avons vu que $\{y_i = e^{\lambda_i x}, y_j = e^{\lambda_j x}\}$ est linéairement indépendant pour $i \neq j$.

~>

Si on trouve n solutions $y_i = e^{\lambda_i x}$ différentes, on a trouvé une base.

~> **Problème:** Qu'est-ce qui se passe

1. pour $\lambda_i \in \mathbb{C}, \notin \mathbb{R}$
2. $\exists_{i,j} : y_i = y_j$ (solutions qui sont les mêmes)

Cas 1: Soit $\lambda_i \in \mathbb{C}, \notin \mathbb{R}$

$P(x)$ réel $\Rightarrow (\lambda_i \in \mathbb{L}(\lambda) \Rightarrow \bar{\lambda}_i \in \mathbb{L}(\lambda))$

Soit $i = 1 \Rightarrow y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x} = e^{\bar{\lambda}_1 x} \in \mathbb{L}(\text{Eq.diff.})$

$\Rightarrow y_1 + y_2 = e^{\lambda_1 x} + e^{\lambda_2 x} = e^{\lambda_1 x} + e^{\bar{\lambda}_1 x} = e^{Re \lambda_1 x} \cdot (e^{i Im \lambda_1 x} + e^{-i Im \lambda_1 x})$
 $= 2 \cdot e^{Re \lambda_1 x} \cdot \cos(Im \lambda_1 x) \in \mathbb{R}$ est aussi solution (somme!)

De même: $i \cdot (y_1 - y_2) = 2 e^{Re \lambda_1 x} \cdot \sin(Im \lambda_1 \cdot x) \in \mathbb{R}$

Théorème: (1)

Hyp.: $P(\lambda)$ a seulement des zéros différents λ_i

Thè.: $\{y_1 = e^{\lambda_1 x}, \dots, y_n = e^{\lambda_n x}\}$
est base de \mathbb{L}

Théorème: (2)

Hyp.: $P(\lambda)$ a des zéros $\lambda_i \notin \mathbb{R}, \lambda_i \in \mathbb{C}$

Thè.: $e^{\lambda_1 x} + e^{\bar{\lambda}_1 x}, i \cdot (e^{\lambda_1 x} - e^{\bar{\lambda}_1 x})$ sont des solutions $\in \mathbb{R}$ l.i.

Symbole:

$k(\lambda_i) :=$ multiplicité du zéro λ_i de $P(\lambda)$.

Problème: Soit λ_i zéro de $P(\lambda)$ avec la multiplicité $k(\lambda_i) > 1$. Soit p.ex. $i = 1$. Alors on obtient:

Théorème:

Hyp.:

λ_i zéro de $P(\lambda)$, $k(\lambda_i) > 1$

Thè.:

$\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$

= système de solutions l.i.

La preuve de ce théorème est, du point de vue des mathématiques, très maligne. Mais on peut en apprendre un tas de choses.

Quant à la preuve:

1. Indépendance linéaire de $\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$:

Soit $p_{k-1}(x) := c_0 \cdot e^{\lambda_i x} + c_1 \cdot x \cdot e^{\lambda_i x} + \dots + c_{k-1} \cdot x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x} := q_{k-1}(x) \cdot e^{\lambda_i x} \equiv 0$
 $\Rightarrow q_{k-1}(x) := c_0 + c_1 x + \dots + c_{k-1} x^{k-1} \equiv 0$

Pour $c_{k-1} \neq 0$ ce polynôme du degré $k - 1$ a au maximum $k - 1$ zéros.
 $\Rightarrow p_{k-1}(x) \not\equiv 0 \rightsquigarrow$ Contradiction!

$\rightsquigarrow c_{k-1} = 0$

Également on argumente avec:

$p_{k-2}(x) := c_0 \cdot e^{\lambda_i x} + c_1 \cdot x \cdot e^{\lambda_i x} + \dots + c_{k-2} \cdot x^{k-2} \cdot e^{\lambda_i x} \rightsquigarrow c_{k-2} = 0$
 etc. $\rightsquigarrow c_{k-1} = c_{k-2} = \dots = c_0 = 0 \Rightarrow$ l.i. ☺

2. Montrer: $x^m \cdot e^{\lambda_i x} \in \mathbb{L}$ pour $m = 0, 1, 2, \dots, k - 1$

Truc:

Traiter $\tilde{y}(\lambda) := x^m \cdot e^{\lambda x}$ comme fonction de λ .

$\rightsquigarrow \tilde{y}(\lambda) := x^m \cdot e^{\lambda x} = \frac{d}{d\lambda}(x^{m-1} \cdot e^{\lambda x}) = \dots = \frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x}) = (e^{\lambda x})_\lambda^{(m)} \Rightarrow \tilde{y}(\lambda_i) = (e^{\lambda x})_\lambda^{(m)}|_{\lambda=\lambda_i}$

L'éq.diff. était: $L(y) := a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0$

Nous y introduisons la solution $\tilde{y}(\lambda)$:

$\rightsquigarrow L(\tilde{y}(\lambda)) = L(x^m \cdot e^{\lambda x}) =$
 $= a_n (x^m \cdot e^{\lambda x})_x^{(n)} + a_{n-1} (x^m \cdot e^{\lambda x})_x^{(n-1)} + \dots + a_1 (x^m \cdot e^{\lambda x})'_x + a_0 x^m \cdot e^{\lambda x} =$
 $= L\left(\frac{d^m}{d\lambda^m}(e^{\lambda x})\right) \stackrel{(*)}{=} \frac{d^m}{d\lambda^m} L(e^{\lambda x}) = \frac{d^m}{d\lambda^m} (e^{\lambda x} \cdot P(\lambda))$

(*): Echanger l'opération de dériver d'après x et λ .

$$\Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = L(x^m \cdot e^{\lambda x})|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m} (e^{\lambda x} \cdot P(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i}$$

λ_i zéro de la multiplicité k du polynôme caractéristique $P(\lambda)$
 $\leadsto P(\lambda) = (\lambda - \lambda_i)^k \cdot R(\lambda)$ Théorème principal de l'algèbre

$$\begin{aligned} \Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} &= L(x^m \cdot e^{\lambda x})|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m} (e^{\lambda x} \cdot (\lambda - \lambda_i)^k \cdot R(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} \\ &= \frac{d^m}{d\lambda^m} ((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i}, \quad m = 0, 1, 2, \dots, k-1 \end{aligned}$$

$m \leq k-1$, Règle du produit:

Dans chaque terme de la somme qui est résultat de l'opération de la dérivée $\frac{d^m}{d\lambda^m} ((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))$ il apparaît un facteur $((\lambda - \lambda_i)^j)$, $j \geq k-m \geq 1$.

$$\leadsto \frac{d^m}{d\lambda^m} ((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda)) = (\lambda - \lambda_i) \cdot e^{\lambda x} \cdot Q(\lambda), \quad Q(\lambda) = \text{polynôme avec variable } \lambda$$

$$\Rightarrow L(\tilde{y}(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = \frac{d^m}{d\lambda^m} ((\lambda - \lambda_i)^k \cdot R_1(\lambda))|_{\lambda=\lambda_i} = 0 \Rightarrow \tilde{y}(\lambda)|_{\lambda=\lambda_i} = x^m \cdot e^{\lambda_i x} \mathbb{L} \quad \leadsto \text{😊}$$

Théorème:

(3)

Hyp.:

$P(\lambda)$ a un zéro λ_i de la multiplicité k_i

Thè.:

$\{e^{\lambda_i x}, x \cdot e^{\lambda_i x}, \dots, x^{k-1} \cdot e^{\lambda_i x}\}$

= système de solutions l.i. de l'éq.diff.

Exemple 1: Eq.diff.:

$$y''' - y'' + y' - y = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 + \lambda - 1 = (\lambda^2 + 1) \cdot (\lambda - 1), \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_{2,3} = \pm i$$

\leadsto Solutions: e^x, e^{ix}, e^{-ix}

oder ou $e^x, e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos(x), \quad -i(e^{ix} - e^{-ix}) = 2 \sin(x)$

Exemple 2: Eq.diff.:

$$y''' - 3y'' + 3y' - y = 0, \quad P(\lambda) = \lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3$$

\leadsto 3 solutions coïncidentes:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1, \quad k = 3 \quad \{e^x, x \cdot e^x, x^2 \cdot e^x\}$ système de solutions linéairement indépendant.

2.7.2 Problème non-homogène (inhomogène)

Problème qui se pose

Eq.diff. $a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = b(x), \quad a_n, a_0 \neq 0$

Nous savons que: $\mathbb{L}_{inhom} = \{y_{hom} + y_p \mid y_{hom} \in \mathbb{L}_{hom}\}, \quad \text{connu.}$

\leadsto **Problème:** Trouver $y_p!$

Méthodes**A: Cas simples:**

1. $b(x) = c = \text{const.}$ Choisir: $y_p := \frac{c}{a_0}$

2. $b(x) = p(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p(x) =$ polynôme

Départ: $y_p = q(x) \cdot e^{\alpha \cdot x}$, $q(x) =$ polynôme aux coefficients inconnus \leadsto Mettre dans l'éq.diff., comparer les coefficients.

3. $b(x) = a \cdot \sin(\alpha \cdot x) + b \cdot \cos(\beta \cdot x)$

Départ: $y_p = x^k \cdot (A \cdot \sin(\alpha \cdot x) + B \cdot \cos(\beta \cdot x))$ \leadsto Mettre dans l'éq.diff., calculer A, B, k

4. $b(x) = p(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) + q(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$

Départ: $y_p = x^k \cdot (p_1(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x) + q_1(x) \cdot e^{\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x))$ \leadsto Mettre dans l'éq.diff., calculer p_1, q_1, k **Exemple 1: Eq.diff. $y'' - y' - 2y = 2x$**

$y_{hom} : y'' - y' - 2y = 0 \Rightarrow P(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 2, Z: \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2 \Rightarrow y_{hom} = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x}$

$y_p : y_p \stackrel{?}{=} ax + b \Rightarrow y_p' - y_p - 2y_p = 0 - a - 2(ax + b) = 2x \Rightarrow -a - 2b = 0 \wedge -2a \stackrel{!}{=} 2 \stackrel{!}{=} \Rightarrow a = -1, b = \frac{1}{2} \Rightarrow y_{inhom} = y_{hom} + y_p = C_1 e^{-x} + C_2 e^{2x} - x + \frac{1}{2}$

Exemple 2: Eq.diff. $y^{(6)} + y^{(4)} - y^{(2)} - y = e^x \cdot \sin(x)$

$y_{hom} : P(\lambda) = \lambda^6 + \lambda^4 - \lambda^2 - 1 = 0$ Substituer: $\lambda^2 = \mu$

 $\leadsto \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_{3,4} = i, \lambda_{5,6} = -i \Rightarrow$ base: $e^x, e^{-x}, e^{ix}, x \cdot e^{ix}, e^{-ix}, x \cdot e^{-ix}$ oder ou $e^x, e^{-x}, \cos(x), x \cdot \cos(x), \sin(x), x \cdot \sin(x)$

$\leadsto y_{hom} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 x \cdot \cos(x) + C_5 \sin(x) + C_6 x \cdot \sin(x)$

$y_p : y_p(x) \stackrel{?}{=} e^x(k_1 \sin(x) + k_2 \cos(x))$ Mettre dans l'éq.diff.:

$\Rightarrow y_p(x) = e^x \left(\frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x) \right)$

$\leadsto y_{inhom} = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 \cos(x) + C_4 x \cdot \cos(x) + C_5 \sin(x) + C_6 x \cdot \sin(x) + e^x \left(\frac{1}{5} \sin(x) - \frac{2}{5} \cos(x) \right)$

B: Méthodes plus générales:

1. Méthodes de mise en position (ou de mise en équation) comme p.ex. la variation de la constante.

2. Partir d'une série de puissances, comparer les coefficients (voir en bas).
3. Méthodes numériques (voir en bas).
4. Transformations de Laplace (voir chapitre prochain).

2.7.3 Partir d'une série de puissance

Eq.diff. $y' - y = x^2$, $y(x_0) = y(0) = y_0 \rightsquigarrow$ **PVI**

Idée: Soit $y(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$,

Mettre cette expression dans l'éq.diff., comparer les coefficients $\rightsquigarrow a_n \rightsquigarrow$ spécialement:

$$x_0 = 0, \quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$\Rightarrow y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+1} (m+1) x^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n,$$

$$x^2 = y' - y = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} (n+1) x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+1} (n+1) - a_n) x^n,$$

$$\Rightarrow y(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n 0^n = a_0 = y_0 \wedge a_{n+1} (n+1) - a_n = 0 \quad \text{pour } n \neq 2,$$

$$a_{n+1} (n+1) - a_n = 1 \quad \text{pour } n = 2$$

Comparer les coefficients:

$n = 0 :$	$a_0 = y_0 = a_1 \cdot (0 + 1)$	$\Rightarrow a_1 = \frac{y_0}{1}$
$n = 1 :$	$a_1 = a_2 \cdot (1 + 1)$	$\Rightarrow a_2 = \frac{y_0}{2}$
$n = 2 :$	$1 + a_2 = a_3 \cdot (2 + 1)$	$\Rightarrow a_3 = \frac{1}{3} + \frac{y_0}{2 \cdot 3}$
$n = 3 :$	$a_3 = a_4 \cdot (3 + 1)$	$\Rightarrow a_4 = \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{y_0}{2 \cdot 3 \cdot 4}$
\vdots	$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$	$\Rightarrow \vdots \quad \vdots \quad \vdots$
$n = k :$	$a_k = a_{k+1} \cdot (k + 1 + 1)$	$\Rightarrow a_{k+1} = \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1)} + \frac{y_0}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \dots \cdot (k+1)}$

$$\Rightarrow a_{k+1} = \frac{2}{(k+1)!} + \frac{y_0}{(k+1)!} \Rightarrow a_k = \frac{2 + y_0}{k!}$$

$$\begin{aligned} e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \Rightarrow y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k &= y_0 + y_0 \cdot x + \frac{y_0}{2} x^2 + \sum_{k=3}^{\infty} \frac{2 + y_0}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_0}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2}{k!} - 2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2}) = \\ &= y_0 \cdot e^x + 2 \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2 = (y_0 + 2) \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y(x) = (y_0 + 2) \cdot e^x - 2 - 2x - 2x^2$$

2.8 Méthodes numériques

Ici nous étudions des éq.diff. de premier ordre ou au lieu d'éq.diff. d'ordre n des systèmes de premier ordre. Nous discutons deux méthodes numériques pour trouver approximativement une courbe de solution particulière: La méthode d'Euler et la méthode classique de Runge-Kutta.

2.8.1 La méthode d'Euler

Soit donné le PVI: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

Trouver: Une solution approximative dans $I = [x_0, b]$

Méthode: Partager I en n parties de longueur égale $\rightsquigarrow x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ (points de division).

Longueur d'une partie: $\Delta x = \Delta x_n = \frac{b - x_0}{n}$, $x_{k+1} = x_k + \Delta x$

Idée:

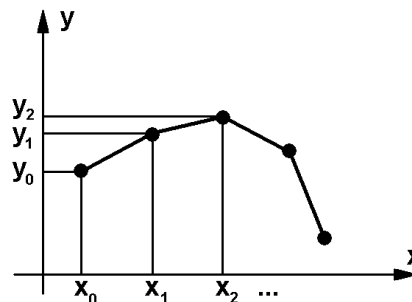
Remplacer la dérivée $y' = \frac{dy}{dx}$ par le quotient des différences $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.

$$\rightsquigarrow y' = f(x, y) \mapsto \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx f(x, y)|_{x=x_k}$$

$$\Rightarrow \Delta y \approx f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_n \Rightarrow y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \cdot \Delta x_n + R(\Delta x_n^2), \quad R(\Delta x_n^2) \xrightarrow{(\Delta x_n \rightarrow 0)} 0$$

La fonction de reste $R(\Delta x_n^2)$ va avec Δx_n carré vers 0. A propos de la preuve, nous renvoyons à la littérature.

Les points (x_0, y_0) , (x_1, y_1) , \dots , (x_n, y_n) calculés ainsi forment les sommets d'une ligne polygonale.



Définition:

Nous appelons cette ligne polygonale (brisée) **ligne polygonale d'Euler**.

Exemple: Eq.diff. $y' - y = x$, $y(0) = 1$

Solution exacte connue:

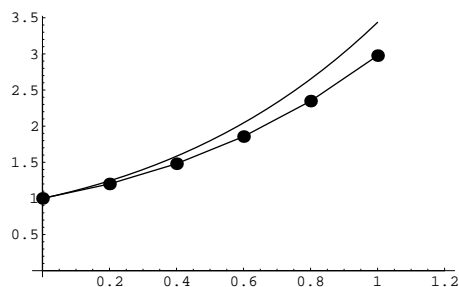
$$y_{hom} = C \cdot e^x, \quad y_p = -x - 1 \Rightarrow y_{inhom} = C \cdot e^x - x - 1, \quad y(0) = 1 \Rightarrow C = 2 \Rightarrow y_{inhom} = 2 \cdot e^x - x - 1$$

Approximation numérique d'après Euler:

$$y' = y + x = f(x, y), \quad \Delta x = const., \quad y_{k+1} \approx y_k + \Delta y_k = y_k + f(x_k, y_k) \Delta x_k = y_k + (y_k + x_k) \Delta x_k$$

Soit $x_0 = 0$, $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$, $x_5 = 1.0$

x_k	x_k
0.0	1.000
0.2	1.200
0.4	1.480
0.6	1.856
0.8	2.347
1.0	2.976



Valeur exacte: $y_5 \approx 3.42!!$

\leadsto Erreur grande

Par conséquent une version corrigée de la méthode d'Euler est mieux convenable pour la pratique: La méthode de **Runge–Kutta**.

2.8.2 La méthode de Runge–Kutta

Equation d'ordre 1^{er}

Soit donné le PVI suivant: $y' = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$

Calculer pour: $j = 0, 1, 2, \dots, n - 1$:

$$\begin{aligned}
 k_{1,j} &= f(x_j, y_j) \\
 k_{2,j} &= f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, y_j + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,j}\right) \\
 k_{3,j} &= f\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, y_j + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,j}\right) \\
 k_{4,j} &= f(x_j + \Delta x, y_j + \Delta x \cdot k_{3,j}) \\
 y_{j+1} &= y_j + \frac{\Delta x}{6} \cdot (k_{1,j} + 2k_{2,j} + 2k_{3,j} + k_{4,j}) + R(\Delta x^5)
 \end{aligned}$$

Il est remarquable qu'ici, la fonction de reste R va vers 0 avec Δx^5 , tandis qu'à la méthode d'Euler, seulement avec Δx^2 . Ici, $f(x_j, y_j)$ est remplacé par une valeur moyenne pondérée.

Recommandement pour le choix de la longueur de l'intervalle Δx :

Soit $L =$ constante de Lipschitz \leadsto Choisir: $\Delta x \leq \frac{L}{10}$

Indication: f dérivable $\leadsto L = \text{Max}\left(\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{x=\text{const}}\right)$

Exemple: Eq.diff.

$y' - y = x$, $y(0) = 1$, $x \in [0, 0.4000] \leadsto y' = f(x, y) = y + x$

$\frac{\partial f}{\partial y} = 1 \leadsto$ Choisir: $\Delta x \leq \frac{1}{10} = 0.1$, $I = [0, 0.4]$,

4 Intervalles partiels: $x_0 = 0.0$, $x_1 = 0.1$, $x_2 = 0.2$, $x_3 = 0.3$, $x_4 = 0.4$

Calcul:

$y_0 = 1, y_1 = y_{0+1}$ pour $j = 0$

$$\begin{aligned} k_{1,0} &= f(x_0, y_0) = f(0, 1) = 0 + 1 &= 1.0 \\ k_{2,0} &= f\left(0, \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 1\right) = 0.05 + 1.05 &= 1.1 \\ k_{3,0} &= f\left(0, \frac{0.1}{2}, 1 + \frac{1}{2} \cdot 0.1 \cdot 1.1\right) = 0.05 + 1.055 &= 1.105 \\ k_{4,0} &= f(0, 0.1, 1 + 0.1 \cdot 1.105) = 0.1 + 1.1105 &= 1.2105 \\ y_1 &= 1 + \frac{0.1}{6} (1.0 + 2 \cdot 1.1 + 2 \cdot 1.105 + 1.2105) &= 1.1103 \end{aligned}$$

En outre: $y_2 = y_{1+1}, j = 1$

$$\rightsquigarrow k_{1,1} = 1.210, k_{2,1} = 1.321, k_{3,1} = 1.326, k_{4,1} = 1.443, y_2 = 1.2429$$

$$\rightsquigarrow k_{1,2} = 1.443, k_{2,2} = 1.567, k_{3,2} = 1.571, k_{4,2} = 1.700, y_3 = 1.3998$$

$$\rightsquigarrow k_{1,3} = 1.700, k_{2,3} = 1.835, k_{3,3} = 1.840, k_{4,3} = 1.984, y_4 = 1.5836$$

Comparaison pour $x = 0.4$

$$\begin{aligned} y_{exact} &\approx 1.5836 \\ y_{Runge-Kutta} &\approx 1.5836 (!) \\ y_{Euler} &\approx 1.48 \dots \end{aligned}$$

Systèmes d'ordre 1^{er}

$$\text{Soit } \left\{ \begin{array}{l} z'_1(x) = f_1(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \\ \vdots = \vdots \\ z'_m(x) = f_m(x, z_1(x), z_2(x), \dots, z_m(x)) \end{array} \right\} \quad \text{ç. v. d. } \vec{z}' = \vec{f}(x, \vec{z})$$

PVI $\rightsquigarrow z_i(x_0) = z_{i,0}, i = 1, \dots, m$

Idée:

Appliquer la méthode discutée en haut parallèlement pour toutes les équations.

procédé:

Calculer $\{z_{1,1}, \dots, z_{m,1}\}$ de $\{z_{1,0}, \dots, z_{m,0}\}$ avec Runge–Kutta. Pour cela on doit calculer pour chaque $z_{i,1}$ les $k_{1,(i,1)}, \dots, k_{4,(i,1)}$ dans l'ordre suivant: D'abord calculer $k_{1,(1,1)}, \dots, k_{1,(m,1)}$. Après calculer $k_{2,(1,1)}, \dots, k_{2,(m,1)}$ etc.. Puis on calcule $z_{1,2}, \dots, z_{m,2}$ de $z_{1,1}, \dots, z_{m,1}$.

Formules: Soient $j = 1, \dots, n, i = 0, \dots, m$

$n =$ nombre d'intervalles partiels

$$\begin{aligned} k_{1,(i,j)} &= f_i(x_j, z_1(x_j), \dots, z_m(x_j)) \\ k_{2,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, z_1(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{1,(m,j)}\right) \\ k_{3,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \frac{\Delta x}{2}, z_1(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \frac{1}{2} \Delta x \cdot k_{2,(m,j)}\right) \\ k_{4,(i,j)} &= f_i\left(x_j + \Delta x, z_1(x_j) + \Delta x \cdot k_{3,(i,j)}, \dots, z_m(x_j) + \Delta x \cdot k_{3,(m,j)}\right) \\ z_{i,(j+1)} &= z_i(x_{j+1}) = z_{i,(j)} + \frac{\Delta x}{6} \cdot (k_{1,(i,j)} + 2k_{2,(i,j)} + 2k_{3,(i,j)} + k_{4,(i,j)}) \end{aligned}$$

Remarque:

On constate tout de suite qu'aujourd'hui, dans le siècle des ordinateurs, probablement personne n'applique plus ces formules pour les calculs à la main. Ce serait une perte de temps. Cependant les connaissances de la théorie sont indispensables pour les programmations dans cette direction. Dans beaucoup de systèmes d'algèbre d'ordinateur, on trouve aujourd'hui des modules correspondants intégrés, par exemple dans Mathematica. (Voir cours de Mathematica.)

La section suivante est prise du script d'algèbre:

2.8.3 D'Gl und Differenzenmethode — Equation différentielle et méthode d'équations aux différences

Exemple:

Nous étudions l'équation différentielle suivante (problème de valeur aux limites):

$$3y''(x) - 5y'(x) + y(x) + 2x = 0, \quad a = 0, \quad b = 10, \quad y(a) = -2; y(b) = 5;$$

Maintenant nous discrétisons le problème en partageant l'intervalle $I = [a, b]$ en n segment de longueur h égale (points de section x_k).

$$\leadsto x_0 = a, \quad x_n = b, \quad h = \frac{b-a}{n}, \quad x_k = a + k \cdot h$$

Maintenant nous remplaçons les quotients différentiels par les quotients des différences:

$$\begin{aligned} y'(x_k) &\approx \frac{y(x_k) - y(x_{k-1})}{h}, \quad y''(x_k) \approx \frac{y'(x_{k+1}) - y'(x_k)}{h} = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} \\ \frac{2x_k h^2 + (5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} &= 0, \\ \Rightarrow \frac{(5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} &= -2x_k \end{aligned}$$

Nous étudions d'abord l'exemple avec $n = 11$. $y_0 = y(x_0) = y(a)$ et $y_{11} = y(x_{11}) = y(b)$ sont données. Par conséquent il faut encore calculer y_1, y_2, \dots, y_{10} . Dans cette intention nous utilisons les équations mentionnées en haut. Celles-ci forment un système:

$$\begin{aligned} \frac{(5h + 3)y_0 + (h^2 - 5h - 6)y_1 + 3y_2}{h^2} &= -2x_1 \\ &\vdots \\ \frac{(5h + 3)y_{k-1} + (h^2 - 5h - 6)y_k + 3y_{k+1}}{h^2} &= -2x_k \end{aligned}$$

$$\begin{array}{c} \vdots \\ \frac{(5h+3)y_9 + (h^2 - 5h - 6)y_{10} + 3y_{11}}{h^2} = -2x_{10} \end{array}$$

Comme on voit, dans chaque ligne il y a seulement trois inconnus y_k . Par conséquent la matrice des coefficients est une matrice de bande qui a les éléments $\neq 0$ seulement dans trois diagonales, la diagonale principale et les deux diagonales secondaires voisines. Les systèmes d'équation avec les telles matrices sont résolubles de façon simple.

Remarque:

Si l'éq. diff. n'est pas linéaire, on ne peut pas utiliser la méthode de matrice sans d'autres méthodes, cela ne va pas aussi facilement. Il faut donc réfléchir si éventuellement on pourrait par exemple linéariser l'équation à l'aide d'un série de puissances.

Résultat le calcul:

$$M \cdot \vec{y} = \vec{b} \Rightarrow M \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \\ y_6 \\ y_7 \\ y_8 \\ y_9 \\ y_{10} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18086 \\ 4000 \\ 6000 \\ 8000 \\ 10000 \\ 12000 \\ 14000 \\ 16000 \\ 18000 \\ 39965 \end{pmatrix},$$

$$M = \begin{pmatrix} 12936 & -3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 & 3993 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10043 & -12936 \end{pmatrix}$$

Solution exacte:

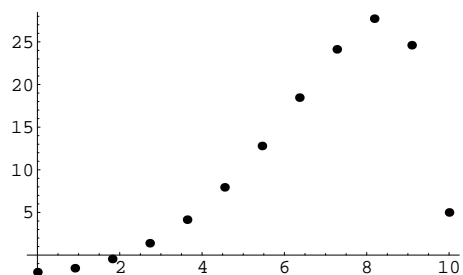
$$y(x) =$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{6}(-5+\sqrt{13})x} \left(2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+50)}(x+5) - 2e^{\frac{1}{6}((-5+\sqrt{13})x+20\sqrt{13}+50)}(x+5) + 35e^{\frac{1}{3}\sqrt{13}(x+5)} - 8e^{\frac{1}{3}(\sqrt{13}x+25)} + 8e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})} - 35e^{\frac{5\sqrt{13}}{3}} \right)}{-e^{25/3} + e^{\frac{5}{3}(5+2\sqrt{13})}}$$

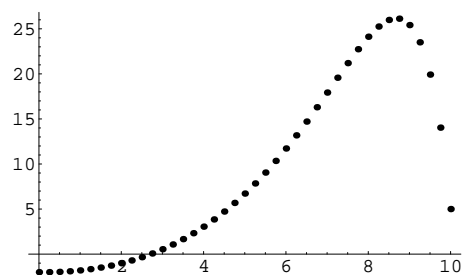
$$\approx -2x + 8.00002759115 e^{0.2324081207560x} - 0.0000275911538341 e^{1.43425854591x} - 10$$

Dans les diagrammes suivants, on voit la comparaison des résultats du calcul pour $n = 11$, $n = 40$ et du

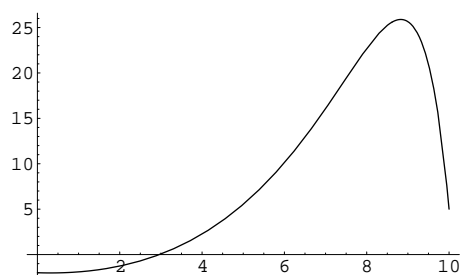
résultat exact:



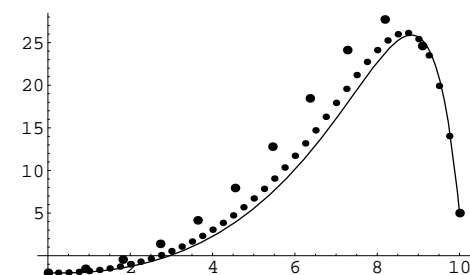
12 points, $n = 11$



41 points, $n = 40$



Solution exacte



Tout ensemble

2.9 Solutions générales par l'ordinateur

2.9.1 Solutions par *Mathematica*

Exemple 1: $y'(x) + \alpha y(x) = f(x)$

Code de base de *Mathematica*:

```
solv1 = DSolve[ y'[x] + \[Alpha] y[x] == f[x], y, x];
u[x_] := y /. solv1[[1]];
a = (u[x][x] // InputForm)[[1]][[2]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. a -> t;
Print["y(x) = ", v[x] // Simplify];
```

Output: $y(x) = e^{-x\alpha} \left(c_1 + \int_1^x e^{t\alpha} f(t) dt \right)$

Exemple 2: $y''(x) + \alpha y'(x) + \beta y(x) = f(x)$

Code de *Mathematica*:

```
Remove["Global' *"];
solv2 = DSolve[y''[x] + \[Alpha] y'[x] + \[Beta] y[x] == f[x], y, x][[1]];
u[x_] := y /. solv2[[1]];
a = u[x][[2]][[3]][[2]][[2]][[1]];
b = u[x][[2]][[4]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. {a -> t, b -> t};
Print["y(x) = ", v[x] // Simplify]
```

Output:

$$y(x) = e^{-\frac{1}{2}x(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} \left(c_1 + e^{x\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} c_2 + e^{x\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} \int_1^x \frac{e^{\frac{1}{2}t(\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} f(t)}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} dt + \int_1^x -\frac{e^{\frac{1}{2}t(\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta})} f(t)}{\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}} dt \right)$$

Exemple 3: $y''(x) + 2y'(x) + (-1)y(x) = \cos(x)$, $y(0) = 2.86909$, $y'(0) = -4.80015$

Code de *Mathematica*:

```
Remove["Global' *"];
solv2 = DSolve[y''[x] + \[Alpha] y'[x] + \[Beta] y[x] == f[x], y, x][[1]];
u[x_] := y /. solv2[[1]];
a = u[x][[2]][[3]][[2]][[2]][[1]];
b = u[x][[2]][[4]][[2]][[2]][[1]];
v[x_] := u[x][x] /. {a -> t, b -> t};
s[u_] := v[x] /. {x -> u, \[Alpha] -> 2, \[Beta] -> -1, C[1] -> 1, C[2] -> 1, f[t] ->
Cos[t]};
Print["y(x) = ", s[x] // N // Simplify];
Print["y(0) = ", s[0] // N];
Print["y'(0) = ", (D[s[m], m] /. m -> 0) // N];
Plot[s[m], {m, 0, Pi}, AspectRatio->1];
```

Output: (Sans toutes les places possibles)

$$y(x) = 0.25 \cos(x) + 2.24228 e^{-2.414218x} + 0.87682 e^{0.414212x} + 0.25 \sin(x)$$

$$y(0) = 2.86909, \quad y'(0) = -4.80015$$

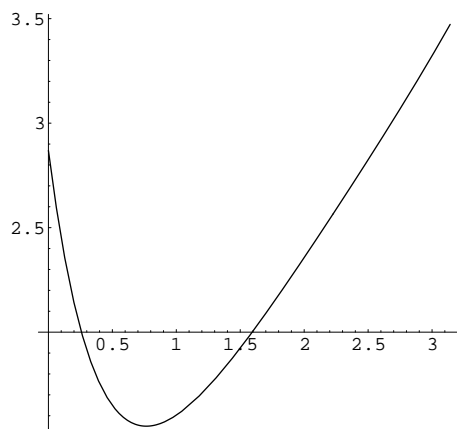
(Plot voir ci-dessous, image à gauche.)

Directement dessiner la solution exacte:

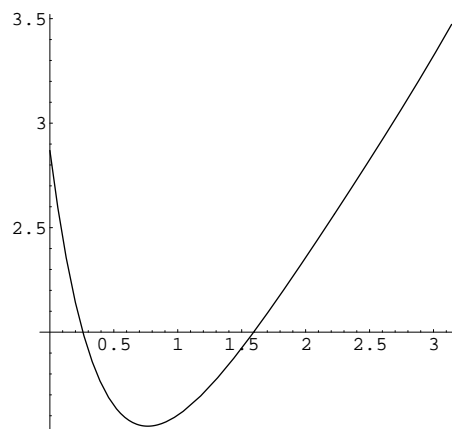
```
Remove["Global`*"];
solv = Flatten[DSolve[{y''[x]+2 y'[x]-1 y[x]==Cos[x],
y[0]==2.86909,y'[0]==-4.80015},y,x]];
y = y/.solv;
Plot[y[x],{x,0,Pi},AspectRatio->1];
```

Directement dessiner la solution exacte:

```
Remove["Global`*"];
solution=NDSolve[{y''[x]+2 y'[x]-1 y[x]==Cos[x],y[0]==2.86909,
y'[0]==-4.80015},y,{x,0,4 Pi}];
Plot[y[x]/. solution,{x,0,Pi},AspectRatio->1];
```



Solution exacte



Solution numérique

2.9.2 Solution calculée personnellement

Considérons exemple 3:

$$y''(x) + 1 y'(x) + (-1) y(x) = \cos(x + 1) = \cos(x) \cos(1) - \sin(x) \sin(1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Homogene Lösung Solution homogène

y_{hom} solution du problème homogène.

1. $y''(x) + y'(x) - y(x) = 0$

↪ Polynôme caractéristique $\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \rightsquigarrow y_{hom} = c_1 e^{\frac{1}{2}(-1-\sqrt{5})x} + c_2 e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})x}$$

2. Question: $y_{part} = ?$ ↪ Essayer:

$$(a) \quad y_1(x) = \cos(x) \Rightarrow A(y_1(x)) := y_1''(x) + y_1'(x) - y_1(x) \\ = -\cos(x) - \sin(x) - \cos(x) = -2 \cos(x) - \sin(x)$$

$$y_2(x) = \sin(x) \Rightarrow A(y_2(x)) := y_2''(x) + y_2'(x) - y_2(x) \\ = -\sin(x) + \cos(x) - \sin(x) = \cos(x) - 2 \sin(x)$$

Remarque:

A est opérateur linéaire!

$$y_{part}(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

$$\Rightarrow A(y_{part}(x)) = A(\alpha y_1(x) + \beta y_2(x)) = \alpha A(y_1(x)) + \beta A(y_2(x)) = \\ \alpha(-2 \cos(x) - \sin(x)) + \beta(\cos(x) - 2 \sin(x)) = (-2\alpha + \beta) \cos(x) + (-\alpha - 2\beta) \sin(x) \\ := \cos(x) \cos(1) - \sin(x) \sin(1)$$

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta &= \cos(1) & \alpha &= \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1)), \\ -\alpha - 2\beta &= -\sin(1) & \beta &= \frac{1}{5}(\cos(1) + 2 \sin(1)) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y_{part}(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x) = \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1)) \cos(x) + \frac{1}{5}(\cos(1) + 2 \sin(1)) \sin(x)$$

$$\Rightarrow y_{allg}(0) = 1, \quad y'_{allg}(0) = 0, \quad y_{allg}(x) = y_{hom}(x) + y_{part}(x) = \\ \frac{1}{5} \left(5 e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} (c_1 + c_2 e^{\sqrt{5}x}) - 2 \cos(x+1) + \sin(x+1) \right)$$

$$y'_{allg}(x) = \frac{1}{10} (2 \cos(x+1) + e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} (4 e^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} \sin(x+1) - 5((1+\sqrt{5})c_1 \\ - (-1+\sqrt{5})c_2 e^{\sqrt{5}x})))$$

$$y_{allg}(0) = 1 = c_1 + c_2 + \frac{1}{5}(-2 \cos(1) + \sin(1))$$

$$y'_{allg}(0) = 0 = \frac{1}{10}(-5((1+\sqrt{5})c_1 - (-1+\sqrt{5})c_2) + 4 \sin(1) + 2 \cos(1))$$

$$c_1 = \frac{1}{10} (5 - \sqrt{5} + 2 \cos(1) + (-1 + \sqrt{5}) \sin(1))$$

$$c_2 = \frac{1}{10} (5 + \sqrt{5} + 2 \cos(1) - (1 + \sqrt{5}) \sin(1)) \rightsquigarrow$$

$$y(x) = \frac{1}{10} (2(-2 \cos(1) + \sin(1)) \cos(x) + 2(\cos(1) + 2 \sin(1)) \sin(x) + e^{\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5})x} \\ * (5 + \sqrt{5} + 2 \cos(1) - (1 + \sqrt{5}) \sin(1)) + e^{-\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})x} (5 - \sqrt{5} + 2 \cos(1) + (-1 + \sqrt{5}) \sin(1)))$$

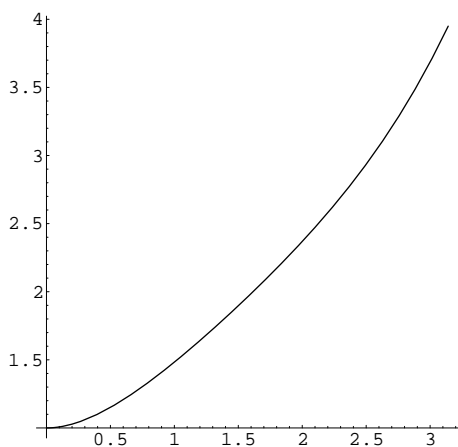
$$y(x) = -0.04783 \cos(x) + 0.48847 e^{-1.61803x} + 0.55936 e^{0.61803x} + 0.44465 \sin(x)$$

Comparer avec la solution par machine:Code de *Mathematica*:

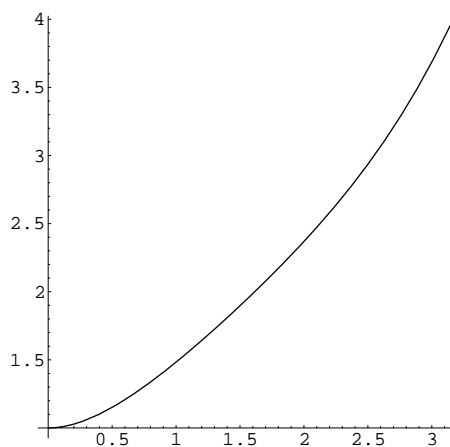
```
Remove[x,y];
solv = Flatten[DSolve[{y''[x] + y'[x] - y[x]==Cos[x+1], y[0]==1, y'[0]==0},y,x]];
y = y/.solv;
(* Print["y(x) = ",Simplify[y[x]]]; *)
Print["Numerisch y(x) = ",Simplify[y[x]]//N];
Plot[y[x],{x,0,Pi},AspectRatio->1];
```

Output: (Numérique \rightsquigarrow plus court.)

$$y(x) = -0.1 * 2.71828^{-1.61803x} (4.0 * 2.71828^{1.61803x} \cos(x + 1.) - 5.59366 * 2.71828^{2.23607x} - 2.0 * 2.71828^{1.61803x} \sin(x + 1.0) - 4.88465)$$



Solution calculée ci-dessus



Solution par machine

 \rightsquigarrow Diagrammes identiques!

ligne élastique ou axe neutre

2.10 Méthode selon l'artillerie

La méthode qu'on va traiter ici s'appelle aussi "shooting method".

On aimerait résoudre le **problème de valeurs aux limites** suivant (problème de flambage):

$$y''(x) + \frac{F}{(EI_y)} y(x) (1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_L) = 0$$

D'abord nous étudions une équation simplifiée qui est linéaire ($|y'(x)| \ll 1$):

$$y''(x) + \frac{F}{(EI_y)} y(x) = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(x_L) = 0$$

Tout de suite on trouve la solution générale:

$$y_{gen}(x) = c_1 \cos\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right) + c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right)$$

Pour les constants on prend les valeurs numériques suivantes (m, N etc.):

$$x_L = 5, I_y = \frac{Pi}{4} (R^4 - r^4), R = 0.1, r = 0.01, E = 210000 * 1000^2, F = 5 * 10^6$$

~> Solution générale:

$$y_{gen}(x) = c_1 \cos(0.55062 x) + c_2 \sin(0.55062 x)$$

Mais la situation change, si l'on choisit des conditions aux limites.

Soit $y(0) = 0$

$$\Rightarrow y_{gen}(0) = 0 = c_1 \cos(0) + c_2 \sin(0) = c_1 \cdot 1 + c_2 \cdot 0 = c_1 = 0 \Rightarrow y_{gen}(0) = c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right)$$

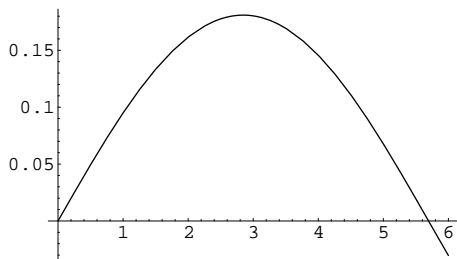
Soit $y(x_L) = 0$

$$\Rightarrow y_{gen}(0) = 0 = c_2 \sin\left(\frac{\sqrt{F} x_L}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}\right) \Rightarrow \frac{\sqrt{F} x_L}{\sqrt{E} \sqrt{I_y}} = \pi \Rightarrow x_L = \pi \frac{\sqrt{E} \sqrt{I_y}}{\sqrt{F}} \quad \text{oder} \quad \text{ou} \quad F = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_x}{x_L^2}$$

Pour un x_L donné F est déterminé et ne peut donc plus être choisit librement.

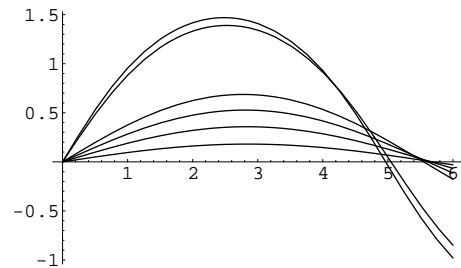
Par contre, on ne peut pas calculer c_2 sans condition supplémentaire.

Pour pouvoir continuer, nous nous occupons de nouveau du problème initial. A la place de la deuxième condition aux limites nous postulons une deuxième condition initiale que nous allons ajuster jusqu'à la deuxième condition au limite va être satisfaite. Nous allons calculer la solution numériquement.

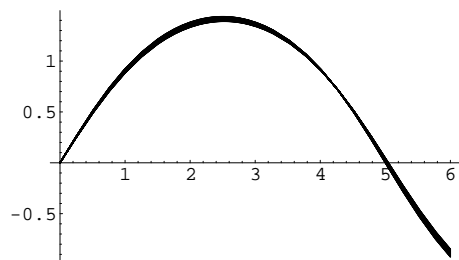


$$y''(x) + y(x) \frac{F}{(E \cdot I_y)} (1 + (y'(x))^2)^{\frac{3}{2}} = 0,$$

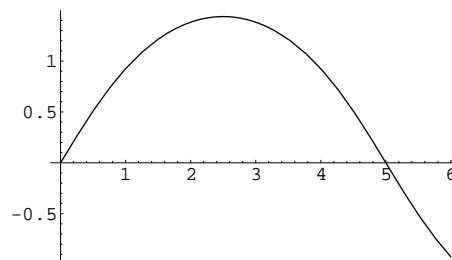
$$y(0) = 0, y'(0) = 0.1$$



$$y'(0) = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 1.0, 1.1$$



$$y'(0) = 1.000, 1.001, 1.002, \dots, 1.057$$



$$y'(0) = 1.057$$

Ici pour calculer on a utilisé *Mathematica*. Voici le programme:

```
Remove["Global`*"]
```

```
(* Initialisierung *)
```

```
xL = 5; R = 0.1; r = 0.01; Iy = Pi/4 (R^4 - r^4);
```

```
eE = 210000 *1/(1/1000^2); F = 5 10^6;
```

```
M[y_] := F y;
```

```
ys0=1; i=1;
```

```
solution=
```

```
NDSolve[{y''[x] + F y[x]/(eE Iy) (1+(y'[x])^2)^(3/2) == 0,
```

```
y[0] == 0, y'[0] == ys0 },y,{x,0,1.2 xL}];
```

```
Endwert=(y[x]/.solution)/.x->xL;
```

```
If[Endwert[[1]] > 0, steuerung = 1, If[Endwert[[1]] < 0,
```

```
steuerung = -1, steuerung = 0]];
```

```
h=steuerung;
```

```
pl[i]=Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL},DisplayFunction->Identity];
```

```
Print[{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0}];
```

```
(* Loop *)
```

```
While[(h-steuerung) == 0 ,
```

```
Print["Vor ",{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0//N}];
```

```
ys0=1+i/1000;
```

```
i++;
```

```
h=steuerung;
```

```
solution=
```

```
NDSolve[{y''[x] + F y[x]/(eE Iy) (1+(y'[x])^2)^(3/2) == 0,
```

```
y[0] == 0, y'[0] == ys0 },y,{x,0,1.2 xL}];
```

```
Endwert=(y[x]/.solution)/.x->xL;
```

```
If[Endwert[[1]] > 0, steuerung = 1, If[Endwert[[1]] < 0,
```

```
steuerung = -1, steuerung = 0]];
```

```
pl[i]=Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL},DisplayFunction->Identity];
```

```
Print["Nach ",{i,h,steuerung,Endwert " = y[xL]",ys0//N},
```

```
If[(h-steuerung) == 0,""," Umschlagpunkt"]];
```

```
];
```

```
Show[Table[pl[n],{n,1,i}],DisplayFunction->$DisplayFunction];
```

```
Plot[y[x]/.solution,{x,0,1.2 xL}];
```

2.11 Applications

2.11.1 Ligne élastique ou axe neutre

Output de *Mathematica* voir:

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Biegelinie.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Biegelinie.nb>

2.11.2 Problème de flambage

Output de *Mathematica* voir:

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Knickung.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/MathematicaPackages/Knickung.nb>

Kapitel • Chapitre 3

Transformations de Laplace

3.1 Introduction

3.1.1 Vue générale

Quant aux transformations de Laplace, il s'agit d'une méthode symbolique, qui rend de grands services pour résoudre des équations différentielles. Les éq.diff. transcendantes se laissent transformer en équations algébriques et résoudre algébriquement. Ainsi on arrive à construire un calcul, ce qui rend la méthode extrêmement efficace.

Nous trouvons déjà l'origine des transformations de Laplace chez Euler. Aujourd'hui on les nomme d'après Laplace qui, contemporain d'Euler, était aussi actif, comme celui-ci à Berlin. L'idée a été reprise par Heaviside³. Nous en trouvons les fruits dans le calcul connu et utilisé aujourd'hui.

Concernant la littérature il faut consulter la littérature pour ingénieurs ou les manuels de Doetsch sur les transformations de Laplace.

3.1.2 Le truc

Exemple: Sans d'abord connaître le calcul, nous voulons démontrer progressivement la méthode à l'exemple d'une éq.diff..

Exemple:

PVI $y'' - y' - 6y - e^{-x} = 0, x \geq 0, y(0) = 1, y'(0) = 0, y(x) = ?$

Idée: : Calculer: $\int_0^{\infty} e^{-sx} (y'' - y' - 6y - e^{-x}) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot 0 dx = 0 \rightsquigarrow$

1. Soit $F(s) := \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y(x) dx$ (Supposition: $\exists_{s \in \mathbb{C}} : F(s)$ existe)

2. Intégration partielle:

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx = e^{-sx} y(x) \Big|_0^{\infty} - (-s) \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y(x) dx = e^{-sx} y(x) \Big|_0^{\infty} - (-s) \cdot F(s)$$

Soient : $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y(x) = 0$ et $\lim_{x \downarrow 0} y(x) = y(0)$ existe

$$\rightsquigarrow e^{-sx} y(x) \Big|_0^{\infty} = 0 - e^{-s \cdot 0} y(0) = -y(0) \Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx = -y(0) + s \cdot F(s)$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y(x) = 0$ signifie que la fonction de solution $y(x)$ croît plus faiblement que e^{sx} , ce qui est raisonnable dans la pratique. s peut être choisi librement ($\operatorname{Re}(s) > 0$).

3. Soit $\lim_{x \rightarrow \infty} e^{-sx} y'(x) = 0$ ($\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx$ doit exister!)

↪ Intégration partielle:

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y''(x) dx &= e^{-sx} y'(x) \Big|_0^{\infty} - (-s) \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx = -y'(0) + s \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y'(x) dx \\ &= -y'(0) + s(-y(0) + s \cdot F(s)) = -y'(0) - sy(0) + s^2 \cdot F(s) \end{aligned}$$

4. $\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-(s+1)x} dx = -\frac{1}{s+1} \cdot e^{-(s+1)x} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{s+1}$ pour $\operatorname{Re}(s) > -1$

Appliquer ces résultats à l'éq.diff.:

$$\begin{aligned} (-y'(0) - sy(0) + s^2 \cdot F(s)) - (-y(0) + s \cdot F(s)) - 6 \cdot F(s) - \frac{1}{s+1} &= 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0 \\ \Rightarrow -s + s^2 \cdot F(s) + 1 - s \cdot F(s) - 6 \cdot F(s) &= \frac{1}{s+1} \end{aligned}$$

Maintenant, cette équation est **résoluble de façon algébrique!**

$$\Rightarrow F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2 - s - 6)} := \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y(x) dx$$

Si nous arrivons maintenant à calculer $y(x)$ de cette équation, nous avons **résolu le PVI!**

Il est prudent de décomposer $F(s)$ en fractions partielles:

$$F(s) = \frac{s^2}{(s+1)(s^2 - s - 6)} = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1}$$

Calculer $y(x)$ de $F(s)$:

Truc: $\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{\alpha x} dx = \int_0^{\infty} e^{(\alpha-s)x} dx = \frac{1}{s-\alpha}$ pour $\operatorname{Re}(\alpha - s) > 0$, $\operatorname{Re}(\alpha) > \operatorname{Re}(s)$

$$\begin{aligned} \sim F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y(x) dx = \frac{9}{20} \cdot \frac{1}{s-3} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{s+1} \\ &= \frac{9}{20} \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{3x} dx + \frac{4}{5} \cdot \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{-2x} dx - \frac{1}{4} \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot e^{-1x} dx \quad (\alpha = 3, -2, -1) \end{aligned}$$

$$\sim F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot \left(\frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x} \right) dx = \int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot y(x) dx \Rightarrow$$

$$\int_0^{\infty} e^{-sx} \cdot \left(\frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x} - y(x) \right) dx \equiv 0 \forall s, \quad y(x) \in \mathcal{C}^2 \Rightarrow y(x) = \frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x}$$

$$\sim \text{Solution: } y(x) = \frac{9}{20} \cdot e^{3x} + \frac{4}{5} \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} \cdot e^{-1x}$$

Par la dérivation d'un ensemble de règles, c.-à.-d. d'un calcul, une telle déduction du résultat peut être raccourci énormément. Par conséquent, nous devons d'abord chercher des règles avant de pouvoir utiliser

cette méthode.

3.2 Probl. d'existence et d'univocité

3.2.1 Définitions

Définition:

Soit $s \in \mathbb{C}$

$$\mathcal{L}\{f\} := F(s) := \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \quad \text{s'appelle transformée de Laplace de } f(t).$$

On peut comprendre \mathcal{L} comme opérateur:

$$\mathcal{L}: f(t) \mapsto F(s), \quad f \in \{f_i \mid i \in M\}, \quad F \in \{F_i \mid i \in M\}$$

f : Fonction originale

F : Fonction image, $s \in \mathbb{C}$

\mathcal{L} : s'appelle **transformation de Laplace**.

e^{-st} s'appelle **terme amortisseur**.

Symbole: Dans la littérature, on utilise des symboles très différents:

$$\begin{array}{llll} 1) & f(t) & \mapsto & F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}, \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \\ 2) & f(t) & \xrightarrow{\mathcal{L}} & F(s) \\ 3) & f(t) & \circ \bullet & F(s) \\ 4) & f(t) & \mapsto & F(s) \\ 5) & f(t) & \sqsubset & F(s) \end{array}$$

Remarque:

A côté de \mathcal{L} , nous utiliserons en particulier les symboles suivants:
 $f(t) \circ \bullet F(s)$, $F(s) \bullet \circ f(t)$.

3.2.2 Problèmes d'existence

Problème: Quand $F(s)$ existe-t-il?

\leadsto Il faut exiger pour $f(t)$:

1) $f(t) \cdot e^{-st}$ intégrable (p.ex. f continue par morceaux).

2) $\forall s \in D_{\mathcal{L}} \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} f(t) = 0$

Remarque:

$$s = \operatorname{Re}(s) + i \operatorname{Im}(s) \Rightarrow e^{-st} = e^{-t \cdot \operatorname{Re}(s)} \cdot (\cos(t \cdot \operatorname{Im}(s)) - \sin(t \cdot \operatorname{Im}(s)))$$

$\leadsto \operatorname{Re}(s) > 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t \cdot \operatorname{Re}(s)} = 0$ comme désiré!

Théorème:**Théorème de convergence****Hyp.:**

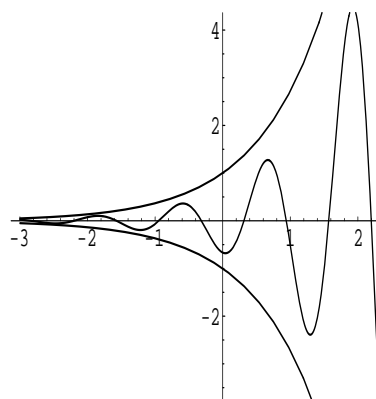
- 1) f continue par morceaux
- 2) f croît au maximum de façon exponentielle.
ç. v. d.
 $\exists_{M, \gamma \in \mathbb{R}^+} : |f(t)| \leq M \cdot e^{\gamma t}, t \in \mathbb{R}^+$

Thè.:

- 1) $\forall_s : \operatorname{Re}(s) > \gamma : F(s)$ existe
- 2) $\lim_{\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty} F(s) = 0$ pour $\operatorname{Re}(s) > \gamma$

Remarque:

Au sujet du renversement du théorème, rien n'est dit.

**Indication quant à la preuve:**

$$\begin{aligned} \text{Ad 2)} \quad F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt \leq \int_0^{\infty} |e^{-st}| \cdot |f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-t \operatorname{Re}(s)} \cdot M \cdot e^{\gamma t} dt = M \cdot \int_0^{\infty} e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t} dt \\ &= \frac{M \cdot e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t}}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \Big|_0^{\infty} \stackrel{\operatorname{Re}(s) > \gamma}{=} \frac{M}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \cdot (0 - 1) = \frac{M}{\operatorname{Re}(s) - \gamma} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

pour $\operatorname{Re}(s) \rightarrow \infty$ ($\operatorname{Re}(s) - \gamma > 0$)

$$\text{Ad 1)} \quad F(s) = \int_0^{t_0} e^{-st} \cdot f(t) dt + \int_{t_0}^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt = k(t_0) + R(t_0), \quad k(t_0) \in \mathbb{R}$$

$$R(t_0) \leq \int_{t_0}^{\infty} |e^{-st}| \cdot |f(t)| dt \leq M \cdot \int_{t_0}^{\infty} e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t} dt = \frac{M}{\gamma - \operatorname{Re}(s)} \cdot (0 - e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t_0}) < \varepsilon_0$$

pour $\gamma - \operatorname{Re}(s) < 0$, $t_0 > k$, $e^{(\gamma - \operatorname{Re}(s)) \cdot t_0} > \varepsilon_1 \rightsquigarrow t_0 > k \Rightarrow R(t_0) < \varepsilon_0$

Beispiele: Exemples:

1. $f(t) =$ polynôme en $t \rightsquigarrow F(s)$ existe
2. $f(t) = q \cdot e^{k \cdot t} \rightsquigarrow F(s)$ existe
3. $f(t) = e^{(t^2)} \rightsquigarrow F(s)$ n'existe pas!

3.2.3 Problèmes d'univocité

Une application profitable des transformations de Laplace aux équations différentielles n'est possible que si la fonction originale $f(t)$ peut être récupérée de forme univoque de $F(s)$.

C'est pourquoi nous examinons d'abord la bijectivité de \mathcal{L} .

Soit $\mathcal{F} = \{f \mid \mathcal{L}\{f\} \text{ ex.}\}$, $\Phi = \{F = \mathcal{L}\{f\} \mid f \in \mathcal{F}\}$, $D_f = \mathbb{R}_0^+$

\leadsto Il vaut: $\mathcal{L} : \mathcal{F} \longmapsto \Phi$ avec $\mathcal{L} : f \longmapsto F = \mathcal{L}\{f\}$

Définition:

Nous appelons deux fonctions f_1, f_2 sur D_f **presque identiques**

: $\Leftrightarrow f_1(t) = f_2(t)$ pour presque tous les $t \in D_f$

Vu de façon exacte, deux fonctions presque identiques ne peuvent être différentes que sur un ensemble de la "mesure 0".

Par conséquent, cette définition est sensée, parce qu'un changement d'une fonction sur un ensemble de mesure 0 n'influence pas "l'intégrale de Lebesgue". $\mathcal{L}\{f\}$ ne change donc pas à un tel changement. Déjà pour l'intégrale de Riemann, la valeur de l'intégrale ne change pas si on modifie la fonction intégrée dans un point isolé, par exemple si on y double la valeur.

Définition:

Nous appelons un opérateur $\mathcal{O} : f(t) \longmapsto F(s)$ **presque bijectif**

: $\Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}$ ramène toujours à une fonction presque identique à la fonction originale.

Théorème:

La transformation de Laplace est presque bijective sur $D_{\mathcal{L}}$.

\leadsto Par conséquent, deux inverses $f_1 = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$ et $f_2 = \mathcal{L}^{-1}\{f\}$ ne sont différentes que sur un ensemble de mesure zéro. Si on restreint donc \mathcal{F} aux fonctions continues sur \mathbb{R}_0^+ , on atteint l'univocité.

Corollaire:

Pour les fonctions continues sur \mathbb{R}_0^+ , la transformation de Laplace est bijective.

Indication pour la preuve:

1.

D'après la construction il vaut $\mathcal{L}\{\mathcal{F}\} = \Phi$, ça veut dire \mathcal{L} est surjective.

2. Soit $f_1 \neq f_2$ et $\mathcal{L}\{f_1\} \equiv \mathcal{L}\{f_2\} \Rightarrow \mathcal{L}\{f_1 - f_2\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot (f_1(t) - f_2(t)) dt$

e^{-st} est analytique.

Si f_1, f_2 sont aussi analytiques, il vaut:

$$(f_1(t) - f_2(t)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \neq 0$$

Plus tard nous allons démontrer: $\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}}$

Si la convergence n'est pas problématique, il vaut: $\mathcal{L}\{f_1 - f_2\} = \mathcal{L}\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{n!}{s^{n+1}} = F(s) \equiv 0, s \in \mathbb{C} (\operatorname{Re}(s) > 0 \dots) \Rightarrow \forall_n : a_n = 0$

\leadsto Contradiction!

Les fonctions analytiques et presque identiques sont identiques.

3.

f_1, f_2 non analytiques: Argumenter avec approximations par fonctions analytiques.

4.

À cause de $D_f = \mathbb{R}_0^+$, le comportement de f sur \mathbb{R}^- n'importe pas.

3.3 Construction de la théorie formalisée

3.3.1 Règles élémentaires

Exemple 1:

$$f(t) = e^{at} \Rightarrow F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot e^{at} dt = \int_0^{\infty} e^{(a-s)t} dt = \frac{e^{(a-s)t}}{a-s} \Big|_0^{\infty} = \frac{1}{a-s} (\lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-s)t} - e^0)$$

$$\text{Soit } \operatorname{Re}(a-s) < 0 \text{ oder } \operatorname{Re}(a) < \operatorname{Re}(s) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} e^{(a-s)t} = 0 \Rightarrow F(s) = \frac{1}{s-a}$$

Exemple 2: $f(t) = c \cdot t^n, n \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow F(s) = c \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^n dt = -\frac{c}{s} \cdot e^{-st} \cdot t^n \Big|_0^{\infty} + \frac{n \cdot c}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^{n-1} dt = \frac{n \cdot c}{s} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^{n-1} dt$$

pour $\operatorname{Re}(s) > 0$

$$\text{Itération: } \Rightarrow F(s) = \frac{n(n-1) \cdot c}{s^2} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^{n-2} dt = \dots = \frac{n! \cdot c}{s^n} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot t^{n-n} dt =$$

$$= \frac{n! \cdot c}{s^n} \cdot \int_0^{\infty} e^{-st} dt = \frac{n! \cdot c}{s^n \cdot (-s)} e^{-st} \Big|_{t=0}^{\infty} = \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}} \Rightarrow F(s) = \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Exemple 3: $f(t) = \sin(\omega \cdot t) \Rightarrow$

$$\mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \sin(\omega \cdot t) dt = -\frac{1}{s} e^{-st} \cdot \sin(\omega \cdot t) \Big|_0^{\infty} + \frac{1}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t) dt$$

$$= \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \cos(\omega \cdot t) dt = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} = 0 + \frac{\omega}{s} \left(-\frac{1}{s} e^{-st} \cdot \cos(\omega \cdot t) \Big|_0^{\infty} - \frac{\omega}{s} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t) dt \right)$$

$$= \frac{\omega}{s} \left(\frac{1}{s} - \frac{\omega}{s} F(s) \right) = \frac{\omega}{s^2} - \frac{\omega^2}{s^2} F(s) \Rightarrow F(s) = \frac{\omega}{s^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\omega^2}{s^2}} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$\Rightarrow F(s) = \mathcal{L}\{\sin(\omega \cdot t)\} = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} = \frac{\omega}{s} \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} \Rightarrow \mathcal{L}\{\cos(\omega \cdot t)\} = \frac{s\omega}{\omega(s^2 + \omega^2)} = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

pour $Re(s) > 0$

Ainsi nous connaissons quelques transformations de fonctions élémentaires. Les transformations d'un tas d'autres fonctions usuelles peuvent être dérivées à l'aide de règles et de ces transformations élémentaires.

- Règles:**
- (1) $e^{a \cdot t} \circ \bullet \frac{1}{s - a}$ pour $Re(s) > Re(a)$
 - (2) $c \cdot t^n \circ \bullet \frac{n! \cdot c}{s^{n+1}}$ pour $Re(s) > 0$
 - (3) $\sin(\omega \cdot t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ pour $Re(s) > 0$
 - (4) $\cos(\omega \cdot t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}$ pour $Re(s) > 0$

- Corollaire:**
- (2') $c \circ \bullet \frac{c}{s}$ pour $Re(s) > 0$
 - (2'') $0 \circ \bullet 0$ (Cas spécial)
 - (2''') $t \circ \bullet \frac{1}{s^2}$ pour $Re(s) > 0$

3.3.2 Linéarité

De la linéarité de l'opérateur d'intégrale on déduit tout de suite la linéarité de la transformation.

- Théorème:**
- Hyp.:
- $$f_1 \circ \bullet F_1, \quad f_2 \circ \bullet F_2, \\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$$
- Thè.:
- $$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \circ \bullet \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 \quad \text{resp.} \\ \mathcal{L}\{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2\} = \lambda_1 \mathcal{L}\{f_1\} + \lambda_2 \mathcal{L}\{f_2\}$$

Conséquence:

$$f(t) = \sinh(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \frac{1}{2} e^t - \frac{1}{2} e^{-t} \circ \bullet \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-1} = \frac{1}{s^2 - 1}$$

- Règle:**
- (4) $\sinh(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2 - 1}$ pour $Re(s) > Re(\alpha) = 1$

3.3.3 Extension dans le domaine de définition

$\tau := \lambda t, \quad \lambda > 0$

$$\Rightarrow \mathcal{L}\{f(\lambda t)\} = \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(\lambda t) dt = \int_0^\infty e^{-s \frac{\tau}{\lambda}} \cdot f(\tau) \frac{d\tau}{\lambda} = \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty e^{-(\frac{s}{\lambda}) \cdot \tau} \cdot f(\tau) d\tau = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow f(\lambda t) \circ \bullet \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

Règle: Hyp.: $f(t) \circ \bullet F(s), \lambda > 0$

Thè.: $f(\lambda t) \circ \bullet \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$

Exemple: $\sinh(8t) \circ \bullet \frac{1}{8} \frac{64}{s^2 - 64} = \frac{8}{s^2 - 64}$

3.3.4 Règle de la dérivation (différentiation)

Règle: Hyp.: $f(t) \circ \bullet F(s)$

Thè.:

- (1) $f'(t) \circ \bullet s \cdot F(s) - f(0^+),$
 $f(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$
- (2) $f''(t) \circ \bullet s^2 \cdot F(s) - s f(0^+) - f'(0^+)$
- \vdots
- (n) $f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n \cdot F(s) - s^{(n-1)} f(0^+) -$
 $s^{(n-2)} f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$

Quant à la preuve:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{f'\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot f'(t) dt = e^{-st} \cdot f(t) \Big|_0^\infty + s \cdot \int_0^\infty e^{-st} \cdot f(t) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-st} \cdot f(t) - \lim_{t \downarrow 0} e^{-st} \cdot f(t) + s \cdot F(s) \\ &= 0 - e^0 \cdot f(0^+) + s \cdot F(s) \end{aligned}$$

De même pour : $f'', \dots, f^{(n)}(t)$.

Symbole: $f(0)$ existe $\rightsquigarrow f(0^+) := f(0)$, si non $f(0^+) := \lim_{t \downarrow 0} f(t)$.

Exemple: $f'(t) = \cos(\omega t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right), f(t) = \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
 $\Rightarrow f'(t) = \cos(\omega t) \circ \bullet s \cdot \frac{1}{\omega} \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{\omega} \sin(\omega \cdot 0^+) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} - 0 = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$

3.3.5 Application pour une éq.diff.

PVI: $y'' + \omega^2 y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$

Soit $y(t) \circ \bullet Y(s)$

$$\Rightarrow y'' + \omega^2 y = 0 \circ \bullet s^2 Y(s) - y(0^+) \cdot s - y'(0^+) + \omega^2 Y(s) = s^2 Y(s) - 1 \cdot s - 0 + \omega^2 Y(s) = 0$$

(à cause de $0 \circ \bullet 0$)

$$\Rightarrow Y(s)(s^2 + \omega^2) = s, Y(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2} \bullet \circ y(t) = \cos(\omega t)$$

\rightsquigarrow **Solution:** $y(t) = \cos(\omega t)$

3.3.6 Règle d'intégration

Du renversement de règle de la dérivation (différentiation) résulte la règle d'intégration:

$$\text{Soit } g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet G(s), \quad f(t) \circ \bullet F(s) \rightsquigarrow G(s) = ?$$

$$\rightsquigarrow g'(t) = f(t) \bullet \circ F(s) \wedge g'(t) = f(t) \bullet \circ s \cdot G(s) - g(0^+) = s \cdot G(s) \Rightarrow F(s) = s \cdot G(s)$$

Règle:

Hyp.:

$$f(t) \circ \bullet F(s)$$

Thè.:

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{F(s)}{s}$$

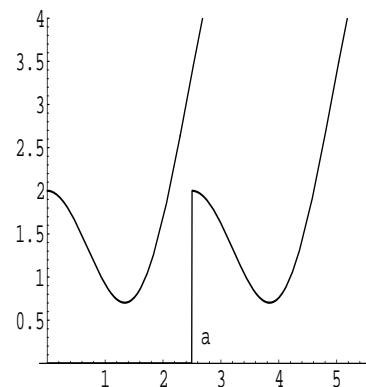
Exemple: (Equation d'intégrale)

$$\begin{aligned} \int_0^t y(\tau) d\tau = y(t) + 1 \circ \bullet \frac{Y(s)}{s} = Y(s) + \frac{1}{s} &\Rightarrow Y(s) \left(\frac{1}{s} - 1 \right) = \frac{1}{s} \Rightarrow Y(s) \left(\frac{1-s}{s} \right) = \frac{1}{s} \\ \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1-s} = \frac{-1}{s-1} \bullet \circ y(t) = -e^t &\rightsquigarrow \text{Solution: } y(t) = -e^t \end{aligned}$$

3.3.7 Théorème de retard

A Fonction originale déplacée:

$$f(t) \mapsto \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ f(t-a) & t > a > 0 \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\tilde{f}(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st} \cdot \tilde{f}(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} \cdot \tilde{f}(t) dt = \int_a^\infty e^{-st} \cdot f(t-a) dt = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)} \cdot f(\tau) d\tau \\ &= e^{-sa} \int_0^\infty e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau = e^{-sa} \cdot F(s) \end{aligned}$$

Règle:**Hyp.:**

$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ f(t-a) & t > a > 0 \end{cases}$$

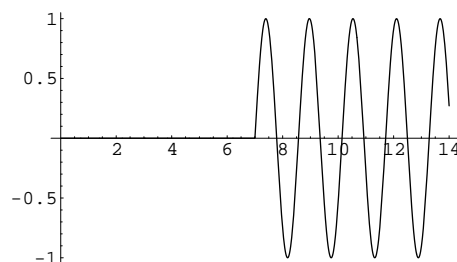
Thè.:

$$\tilde{f}(t) \circ \bullet e^{-s a} \cdot F(s)$$

Exemple:

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 7 \\ \sin(4 \cdot (t-7)) & t > 7 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin(4 \cdot t) &\circ \bullet \frac{4}{s^2 + 16} \\ \Rightarrow \tilde{f}(t) &\circ \bullet e^{-s 7} \cdot \frac{4}{s^2 + 16} \end{aligned}$$

**B Fonction image déplacée:**

↪ Affaiblissement exponentiel

$$\begin{aligned} \text{Soit } \mathcal{L}\{e^{c \cdot t} \cdot f(t)\} &= \int_0^{\infty} e^{-s t} \cdot e^{c \cdot t} \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{(c-s)t} \cdot f(t) dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-c)t} \cdot f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\tilde{s} t} \cdot f(t) dt = F(\tilde{s}) = F(s-c) \quad \text{pour } \operatorname{Re}(s-c) > 0 \end{aligned}$$

Règle:**Hyp.:**

$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad c \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(s-c) > 0, \quad s \in \mathbb{C}$$

Thè.:

$$e^{c \cdot t} \cdot f(t) \circ \bullet F(s-c)$$

$$\text{Exemple: } e^{c \cdot t} \cdot f(t) = e^{c \cdot t} \cdot \sin(\omega t) \circ \bullet \frac{\omega}{(s-c)^2 + \omega^2}$$

3.3.8 Règle de la multiplication

(Aussi règle de la différentiation de la fonction image)

Soit f une fonction raisonnable, p.ex. continue:

$$\begin{aligned} -\frac{dF(s)}{ds} &= -\frac{d}{ds} \left(\int_0^{\infty} e^{-s t} \cdot f(t) dt \right) = -\int_0^{\infty} \frac{d e^{-s t}}{ds} \cdot f(t) dt = -\int_0^{\infty} e^{-s t} \cdot (-t) \cdot f(t) dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s t} \cdot (t \cdot f(t)) dt = \mathcal{L}\{t \cdot f(t)\} \end{aligned}$$

Règle: Hyp.: $f(t) \circ \bullet F(s), \quad f \text{ raisonnable}$

Thè.: $t^n \cdot f(t) \circ \bullet (-1)^n \cdot \frac{d^n F(s)}{d s^n}$

Corollaire: Hyp.: $f_n(t) \circ \bullet F_n(s), \quad f_n \text{ raisonnable}$

Thè.: $\sum_{n=0}^N f_n(t) \cdot t^n \circ \bullet \sum_{n=0}^N (-1)^n \cdot \frac{d^n F_n(s)}{d s^n}$

Beispiele: Exemples:

$$(1) \quad t \cdot \sin(t) \circ \bullet - \frac{d \frac{1}{s^2+1}}{d s} = \frac{2 s}{(s^2 + 1)^2}$$

$$(2) \quad t^n \cdot e^{a \cdot t} \circ \bullet (-1)^n \frac{d^n \frac{1}{s-a}}{d s^n} = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$$

Analoguement à la règle de la multiplication il existe aussi une règle de la division:

3.3.9 Règle de la division

Etudier: $f(t) \circ \bullet F(s),$

$$\int_s^\infty F(\tau) d\tau = \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\tau t} \cdot f(t) dt \right) d\tau = \int_0^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\tau t} \cdot f(t) d\tau \right) dt = \int_0^\infty \left(-\frac{1}{t} e^{-\tau t} \cdot f(t) \Big|_{\tau=s}^{\tau=\infty} \right) dt$$

Soit $\lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{e^{-\tau t} \cdot f(t)}{t} = 0$

$$\Rightarrow \int_s^\infty F(\tau) d\tau = \int_0^\infty e^{-\tau s} \cdot \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{L}\left\{ \frac{f(t)}{t} \right\} \quad \text{si } \lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ existe}$$

Règle: Hyp.: $f(t) \circ \bullet F(s),$
 $\lim_{t \downarrow 0} \frac{f(t)}{t} \text{ existe}$

Thè.: $\frac{f(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty F(\tau) d\tau$

Exemple: $f(t) = \sin(t) \circ \bullet F(s) = \frac{1}{s^2 + 1}, \quad \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$

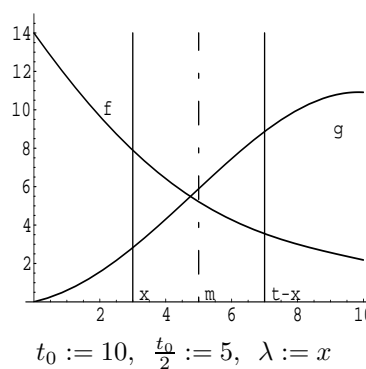
$$\Rightarrow \frac{\sin(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty \frac{1}{\tau^2 + 1} d\tau = \arctan(\tau) \Big|_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = \arctan\left(\frac{1}{s}\right)$$

3.3.10 Plissement

Définition: $f(t) * g(t) := \int_0^t f(\lambda) \cdot g(t - \lambda) d\lambda$

s'appelle **plissement**⁴ (convolution) de f et g .

Soit le système de coordonnées tracé sur le bord d'une feuille de papier. Le papier avec le graphe va être plié longitudinalement la verticale m par $\frac{t_0}{2}$ sur l'axe t . Ainsi les valeurs de fonction $g(t_0 - \lambda)$ et $f(\lambda)$ sont sur la même ordonnée.



Règle: Hyp.:

$$f(t) \circ \bullet F(s), \quad g(t) \circ \bullet G(s)$$

Thè.:

$$f(t) * g(t) \circ \bullet F(s) \cdot G(s)$$

Remarque:

1. Cette règle facilite une transformation inverse de produits.

2. **Attention:**

$$f(t) \equiv g(t) \equiv 1 \circ \bullet F(s) \equiv G(s) \equiv \frac{1}{s}, \quad F(s) \cdot G(s) \equiv \frac{1}{s^2}$$

$$f(t) \cdot g(t) = 1 \circ \bullet \frac{1}{s}$$

$$f(t) \cdot g(t) \neq t \circ \bullet F(s) \equiv G(s) \equiv \frac{1}{s^2}$$

Quant à la preuve:

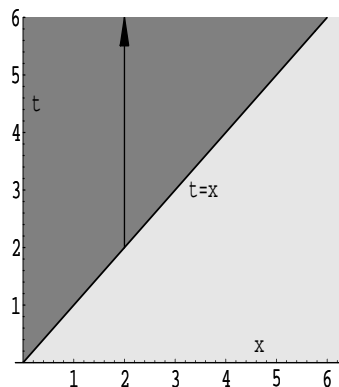
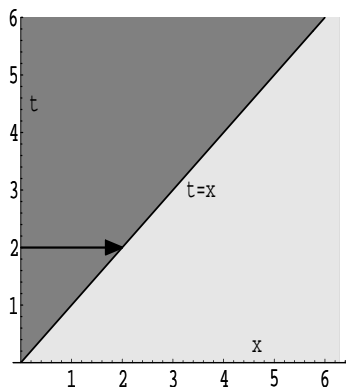
$$\mathcal{L}\{f * g\} = \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^t f(\lambda) \cdot g(t - \lambda) d\lambda \right) dt = \int_0^\infty \int_0^t e^{-st} f(\lambda) \cdot g(t - \lambda) d\lambda dt \rightsquigarrow 0 \leq \lambda \leq t \rightsquigarrow D$$

Théorème de Fubini: \rightsquigarrow Possibilités:

1) D'abord intégrer sur λ de 0 à t et ensuite sur t — ou:

2) D'abord intégrer sur t de λ à ∞ et ensuite sur λ .

⁴ de Emilie Borel, 1871 – 1956



$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathcal{L}\{f * g\} &= \int_0^\infty \int_\lambda^\infty e^{-st} f(\lambda) \cdot g(t - \lambda) dt d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot \left(\int_\lambda^\infty e^{-st} \cdot g(t - \lambda) dt \right) d\lambda \\ &= \int_0^\infty f(\lambda) \cdot \left(\int_0^\infty e^{-s(\tau+\lambda)} \cdot g(\tau) d\tau \right) d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} \cdot \left(\int_0^\infty e^{-s\tau} \cdot g(\tau) d\tau \right) d\lambda = \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} \cdot G(s) d\lambda \\ &= G(s) \cdot \int_0^\infty f(\lambda) \cdot e^{-\lambda s} d\lambda = G(s) \cdot F(s) \end{aligned} \quad \text{☺}$$

Exemple: On sait: $\sin(t) \circ \bullet \frac{1}{s^2 + 1}$

Problème: $\frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{1}{(s^2 + 1)^2} \bullet \circ ?$

A l'aide du plissement:

$$\frac{1}{(s^2 + 1)^2} \bullet \circ \sin(t) * \sin(t) = \int_0^t \sin(\lambda) \cdot \sin(t - \lambda) d\lambda = \frac{1}{2} (\sin(t) - t \cdot \cos(t))$$

Remarque:

Les fonctions qui sont presque partout identiques et admissibles ont des plissements presque partout identiques. Les transformés des produits de plissement sont identiques.

Symbole: Pour marquer particulièrement une transformation presque bijective, nous utilisons les symboles $\circ \sim \bullet$, $\bullet \sim \circ$. Pour presque identique nous utilisons \simeq .

Nous étudions:

1. $f * g \circ \sim \bullet F \cdot G = G \cdot F \bullet \sim \circ g * f \Rightarrow f * g \simeq g * f$
2. $(f * g) * h \circ \sim \bullet \mathcal{L}\{f * g\} \cdot H = (F \cdot G) \cdot H = F \cdot (G \cdot H) \bullet \sim \circ f * (g * h) \Rightarrow (f * g) * h \simeq f * (g * h)$
3. $f * (g + h) \circ \sim \bullet F \cdot \mathcal{L}\{f + h\} = F \cdot (G + H) = F \cdot G + F \cdot H \bullet \sim \circ f * g + f * h \Rightarrow f * (g + h) \simeq f * g + f * h$

Théorème:

Dans le sens de "presque identique", il vaut pour le produit de plissement:

1. $f * g \simeq g * f$ (commutativité)
2. $(f * g) * h \simeq f * (g * h)$ (associativité)
3. $f * (g + h) \simeq f * g + f * h$ (distributivité)

Exemple: Equation d'intégrale:

$$t^2 + \int_0^t y(\lambda) \cdot \sin(t - \lambda) d\lambda = y(t) \circ \bullet \frac{2}{s^3} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = Y(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{s^3} \cdot \frac{s^2 + 1}{s^2} = 2 \frac{s^2 + 1}{s^5} = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s^5} \bullet \circ y(t) \simeq t^2 + \frac{t^4}{12}$$

Pour l'univocité d'y on peut demander p.ex. la continuité.

3.3.11 Fonctions périodiques

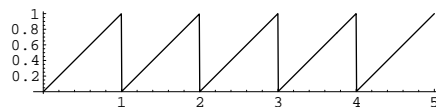
On trouve des fonctions périodiques souvent en particulier dans l'électrotechnique. . .

Exemple:

$$f(t) = f(t + nT), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt = \int_0^T e^{-st} \cdot f(t) dt +$$

$$+ \int_T^{2T} e^{-st} \cdot f(t) dt + \int_{2T}^{3T} e^{-st} \cdot f(t) dt + \dots$$



Terme général de la somme: $t := \tau + nT$

$$\tau = t - nT \Rightarrow \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} \cdot f(t) dt = \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} \cdot f(\tau + nT) d\tau = e^{-snT} \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau =$$

$$= (e^{-sT})^n \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau := \rho(s)^n \cdot \varphi(s)$$

$$\Rightarrow F(s) = \varphi(s) \cdot (1 + \rho(s) + \rho(s)^2 + \rho(s)^3 + \dots) = \varphi(s) \cdot \frac{1}{1 - \rho(s)} \quad \text{pour } |\rho(s)| < 1$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{1 - \rho(s)} \cdot \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau \quad \text{pour } |e^{-sT}| = e^{-\operatorname{Re}(s)T} < 1, \quad \text{ç. v. d. } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Règle:

Hyp.:

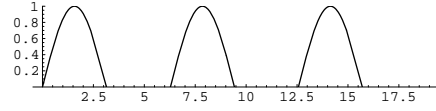
$f(t)$ périodique avec T ,
 $t \geq 0$, $f(t) \circ \bullet F(s)$, $\operatorname{Re}(s) > 0$
 $\rho(s) = e^{-sT}$

Thè.:

$$F(s) = \frac{1}{1 - \rho(s)} \cdot \int_0^T e^{-s\tau} \cdot f(\tau) d\tau$$

Exemple:

$$f(t) = \begin{cases} \sin(t) & t \in [0, \pi] \\ 0 & t \in (\pi, 2\pi] \end{cases}$$



$$f(t) = f(t + 2n\pi), \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} e^{-s\tau} \cdot \sin(\tau) d\tau = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{e^{-st} (-s \sin(t) - \cos(t)) \Big|_{t=0}^{t=\pi}}{s^2 + 1} \\ &= \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(1 + e^{-\pi s}) \cdot \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}} = \frac{1}{(1 - e^{-\pi s})(s^2 + 1)} \end{aligned}$$

3.3.12 Valeurs initiales et finales

Ici nous voulons étudier le rapport entre $f(t)$ et $F(s)$ pour $s \rightarrow \infty$ et $s \downarrow 0$.

Soit $s \in \mathbb{C}$ admissible pour l'existence de $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$. En outre soit que $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe.

Soit $\langle s_n \rangle$ une suite quelconque et admissible avec la qualité $s_n \rightarrow \infty$. S'il vaut pour toutes les suites $\langle s_n \rangle$ de ce genre: l'expression $e^{-s_n t} \cdot f'(t)$ converge de façon uniforme sur $[0, \infty]$, on peut intégrer la relation limite suivante terme par terme:

$$0 = 0 \cdot f'(t) = e^{-\infty} \cdot f'(t) = e^{-t \cdot (\lim_{n \rightarrow \infty} s_n)} \cdot f'(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-s_n t} \cdot f'(t)$$

Nous appliquons cela à la règle de différentiation:

$$\begin{aligned} s_n \cdot F(s_n) &= \int_0^{\infty} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_0^{\infty} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \right) = \int_0^{\infty} \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ &= \int_0^{\infty} e^{-\infty} \cdot f'(t) dt + f(0^+) = \int_0^{\infty} 0 \cdot f'(t) dt + f(0^+) = 0 + f(0^+) = f(0^+) = \lim_{t \downarrow 0} f(t) \end{aligned}$$

Sous les mêmes conditions initiales nous obtenons:

$$\begin{aligned} \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) &= \lim_{s_n \downarrow 0} \left(\int_0^{\infty} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) \right) = \int_0^{\infty} \lim_{s_n \downarrow 0} e^{-s_n t} \cdot f'(t) dt + f(0^+) = \int_0^{\infty} e^0 \cdot f'(t) dt + f(0^+) \\ &= \int_0^{\infty} f'(t) dt + f(0^+) = f(t) \Big|_0^{\infty} + f(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(0^+) + f(0^+) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \end{aligned}$$

Règle:**Hyp.:**

$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe
 $s, s_n \in \mathbb{C}$
admissible

Les valeurs limites utilisées existent
 $\forall \langle s_n \rangle, s_n \rightarrow \infty : e^{-s_n \cdot t} \cdot f'(t)$ converge de façon
uniforme sur $[0, \infty]$

Thè.:

$$(1) \quad \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$$

$$(2) \quad \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$$

Conséquence:

Si on veut évaluer le comportement d'une solution $y(t)$ d'une éq.diff. pour des valeurs t qui sont grandes et si $Y(s)$ peut être calculée, cette règle rend ainsi la transformation inverse $Y \bullet \circ y$ inutile. L'expérience montre que souvent exactement cette transformation inverse pose des problèmes.

Beispiele: Exemples:

Nous savons: $e^{at} \circ \bullet \frac{1}{s-a}$ pour $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$.

Soit $a = 1 \Rightarrow f(t) = e^t \circ \bullet \frac{1}{s-1}$

$$1. \quad \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s_n \rightarrow \infty} s_n \cdot \frac{1}{s_n - 1} = \lim_{s_n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{s_n}} = 1 = e^0 = \lim_{t \downarrow 0} e^t \quad \text{☺}$$

$$2. \quad \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \cdot \frac{1}{s_n - 1} = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t = \infty \neq 0 \Rightarrow ?? \quad \text{☹}$$

Pourquoi la chose ne tient-elle pas dans le deuxième exemple? – Est-ce que la règle est fautive malgré toute la logique?

Explication:

Ici, $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(a)$ signifie $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(1)$. Ensuite nous calculons $\lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n)$. Ainsi s_n est situé dans un domaine non-admissible. Une hypothèse est violée, et la règle n'est pas du tout applicable dans ce cas! On voit donc de manière frappante l'importance des hypothèses...

$$3. \quad \text{Soit } a = -1 \Rightarrow f(t) = e^{-t} \circ \bullet \frac{1}{s+1}, \quad \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(-1), \quad 0 = \lim_{s_n \downarrow 0} s_n \not> -1$$

La condition violée en haut est satisfaite maintenant.

$$\rightsquigarrow \lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot F(s_n) = \lim_{s \downarrow 0} s_n \cdot \frac{1}{s_n + 1} = 0 = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) \quad \text{☺}$$

3.3.13 Transformation de quelques fonctions rationnelles

Formules

Soient $\Phi := \frac{C - B \cdot p}{\omega}$, $\omega := \sqrt{q - p^2}$

Consécutivement on voit une liste choisie de transformations inverses. Le lecteur peut contrôler les formules par la transformation du côté droit. On peut en effet aussi simplifier la chose en utilisant un programme d'algèbre sur ordinateur (par exemple Mathematica) pour calculer les intégrales de Laplace du côté droit.

Règles:

1. $\frac{Bs + C}{s^2 + 2ps + q} \circ \bullet e^{-p \cdot t} (\Phi \sin(\omega t) + B \cdot \cos(\omega t))$
2. $\frac{Bs + C}{(s^2 + 2ps + q)^2} \circ \bullet e^{-p \cdot t} \left(\left(\frac{B \cdot t}{2\omega} + \frac{\Phi}{2\omega^2} \right) \Phi \sin(\omega t) - \frac{\Phi}{2\omega^2} \cdot t \cdot \cos(\omega t) \right)$
3. $\frac{Bs + C}{(s^2 + 2ps + q)^3} \circ \bullet \frac{e^{-p \cdot t}}{8\omega^3} \cdot \sin(\omega t) \cdot (B \cdot t + \Phi \cdot \left(\frac{3}{\omega} - \omega^2 \cdot t - (B \cdot \omega \cdot t^2 + 3\Phi \cdot \omega \cdot t) \cdot \cos(\omega t) \right))$

Remarque:

L'expérience montre que l'éq.diff. $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ devient souvent rationnelle. De même la transformation d'une éq.diff linéaire aux coefficients constants (PVI) mène toujours à une expression de la forme $Y(s) \cdot P(s) = F(s) + Q(s)$, $P(s), Q(s)$ polynômes. On doit donc trouver la transformée inverse de $\frac{Q(s)}{P(s)}$.

Nous connaissons déjà les transformées inverses des expressions suivantes:

$$\frac{c}{s^n}, \frac{c}{(s-a)^n}, \frac{\omega \cdot c}{s^2 + \omega^2}, \frac{s \cdot c}{s^2 + \omega^2} \quad \text{etc..}$$

C'est pourquoi on peut bien s'en tirer avec la **règle de linéarité** et la **décomposition en fractions partielles** de $\frac{Q(s)}{P(s)}$. Généralement on fait l'expérience que le problème compliqué est toujours de trouver $y(s) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$.

Exemple

PVI: $E(y) \equiv a \cdot y'' + b \cdot y' + c \cdot y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$

$$E(y) \circ \bullet a(s^2 Y - s y_0 - y'_0) + b(s Y - y_0) + c Y = F(s) \Rightarrow Y(s) = \frac{F(s)}{a s^2 + b s + c} + \frac{a \cdot s \cdot y_0 + a \cdot y'_0 + b \cdot y_0}{a s^2 + b s + c}$$

L'expérience nous montre que F est souvent rationnelle.

Pour la solution des éq.diff. linéaires avec les coefficients constants, il est par conséquent important de maîtriser la transformation inverse de "fractions de base", qu'on obtient comme résultat de la décomposition en fractions partielles.

Méthodes pour la transformation inverse

1. Utiliser des programmes d'algèbre sur ordinateur (p.ex. Mathematica).
2. Tableaux de transformations de Laplace (Lexiques).
3. Utiliser des règles (voir en haut).
4. Transformations, par exemple à l'aide de décomposition en fractions partielles, pour arriver à des transformées connues.
5. Utiliser le théorème de plissement.
6. Calculer explicitement, voir en bas.

Calcul explicite

À l'aide de connaissances dans la théorie des fonctions complexes, on réussit à calculer explicitement la transformée inverse à l'aide du théorème des résidus. (Analoguement aux transformations de Fourier, intégrales de Mellin–Fourier, C : courbe de Browich.)

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C e^{st} F(s) ds$$

3.4 Exemples modèles**3.4.1 Transformations inverses**

1. $F(s) = \frac{3s+7}{s^2-2s-3} = \frac{3s+7}{(s+1)(s-3)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-3} = \frac{-1}{s+1} + \frac{4}{s-3}$
 $\Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -1 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s+1}\right\} + 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s-3}\right\} = -e^{-t} + 4e^{3t}$
2. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{4}{s-2} - \frac{3s}{s^2+16} + \frac{5}{s^2+4}\right\} = 4 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+16}\right\} + \frac{5}{2} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}$
 $= 4e^{2t} - 3 \cos 4t + \frac{5}{2} \sin(2t)$
3. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-2s+5}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 \cdot \frac{2}{2}}{(s-1)^2+4}\right\} = \frac{1}{2} e^t \cdot \sin(2t)$
4. $\mathcal{L}^{-1}\left\{e^{-\frac{\pi}{3}s} \cdot \frac{s}{s^2+4}\right\} = \tilde{f}(t) = \begin{cases} 0 & t \leq \frac{\pi}{3} \\ \cos(2t - \frac{2\pi}{3}) & t > \frac{\pi}{3} \end{cases}$
5. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{s^2-4s+20}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6s-4}{(s-2)^2+16}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{6(s-2)}{(s-2)^2+16}\right\} + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{8}{(s-2)^2+16}\right\}$
 $= 6e^{2t} \cos 4t + 2e^{2t} \sin(4t) = 2 \cdot e^{2t} (3 \cos(4t) + \sin(4t))$
6. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1 \cdot \frac{\omega}{\omega}}{s(s^2+\omega^2)}\right\} = \frac{1}{\omega} \int_0^t \sin(\omega \tau) d\tau = -\frac{1}{\omega^2} \cos(\omega \tau) \Big|_0^t = \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos(\omega t))$
7. $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s+1)}\right\} = \int_0^t e^{-\tau} d\tau = -e^{-\tau} \Big|_0^t = 1 - e^{-t}$

3.4.2 Résoudre des éq.diff.

1. **PVI:** $E(y) \equiv y' - 7y = e^{7t}, y(0) = 0$

Solution: $E(y) \circ \bullet s \cdot Y(s) - 0 - 7Y(s) = \frac{1}{s-7} \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{(s-7)^2}$
 $\Rightarrow y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-7)^2}\right\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\left(\frac{-1}{s-7}\right)\right\} = t \cdot e^{7t}$

2. **PVI:** $E(y) \equiv y' + y = \sin(t), y(0) = 1$

Solution:

$$E(y) \circ \bullet s \cdot Y(s) - 1 + Y(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \Rightarrow Y(s) = \frac{s^2 + 2}{(s+1)(s^2 + 1)}$$

Décomposition en fractions partielles:

$$Y(s) = \frac{3}{2} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{2} \frac{1}{s^2+1}$$

$$\Rightarrow y(t) = 1.5 e^{-t} - 0.5 \cos(t) + 0.5 \sin(t)$$

3. **PVI:** $E(y) \equiv y''' - 3y'' + 3y' - y = t^2 \cdot e^t, y(0) = 1, y'(0) = 0, y''(0) = -2$

Solution: $E(y) \circ \bullet H(Y) =$

$$s^3 \cdot Y(s) - s^2 \cdot y(0^+) - s \cdot y'(0^+) - y''(0^+) - 3(s^2 \cdot Y(s) - s \cdot y(0^+) - y'(0^+)) + 3(s \cdot Y(s) - y(0^+)) - Y(s)$$

$$= \frac{2}{(s-1)^3} \Rightarrow (s^3 - 3s^2 + 3s - 1)Y(s) - s^2 + 2 + 2s - 3 = \frac{s^2 + 2}{(s-1)^3}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{(s^2 - 3s + 1)(s-1)^3 + 2}{(s^3 - 3s^2 + 3s - 1)(s-1)^3} = \frac{(s^2 - 3s + 1)(s-1)^3 + 2}{(s-1)^6}$$

Décomposition en fractions partielles:

$$Y(s) = \frac{2}{(s-1)^6} - \frac{1}{(s-1)^3} - \frac{1}{(s-1)^2} + \frac{1}{s-1}$$

$$\Rightarrow y(t) = \frac{2t^5 \cdot e^t}{5!} - \frac{t^2 \cdot e^t}{2} - t \cdot e^t + e^t$$

3.4.3 Equations différentielles d'ordre 2^{ème}

Dans la physique ou l'électrotechnique, on a souvent des problèmes de la sorte suivante:

PVI: $E(y) \equiv ay'' + by' + cy = f(t), y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0, a, b, c = \text{const.}, f(t)$
fonction ou distribution

Nous définissons:

Définition:

$f(t)$ s'appelle **stimulation** ou **fonction input**

$y(t)$ s'appelle **réponse** ou **fonction output**

a, b, c s'appellent **paramètres du système**

Généralement il vaut: $(t = t_0)$

$$\begin{aligned}
 E(y) \circ \bullet a(s^2 Y - s y_0 - y'_0) + b(s Y - y_0) + c Y &= F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} \\
 \Rightarrow Y(s)(a s^2 + b s + c) &= F(s) + y_0(a s + b) + a y'_0 \\
 \Rightarrow Y(s) = Y_{inhom}(s) &= \underbrace{\frac{F(s)}{a s^2 + b s + c}}_{=Y_p(s)} + \underbrace{y_0 \frac{a s + b}{a s^2 + b s + c} + y'_0 \frac{a}{a s^2 + b s + c}}_{=Y_{hom}(s)}
 \end{aligned}$$

Cas spéciaux:

1. $f(t) \equiv 0 \Rightarrow Y = Y_{hom}$, $a y'' + b y + c y = 0 \rightsquigarrow$ Eq.diff. homogène, conditions initiales non forcément homogènes.
2. $y_0 = y'_0 = 0$, $f(t) \neq 0 \Rightarrow Y = Y_p \rightsquigarrow$ Eq.diff. non-homogène.
3. $y_0 = y'_0 = 0$, $f(t) \equiv 0 \Rightarrow Y(s) \equiv 0 \Rightarrow y(t) \equiv 0 \rightsquigarrow$ Eq.diff. homogène.

Définition:

$p(s) = a s^2 + b s + c$ s'appelle **polynôme caractéristique** de l'éq.diff.

$Y_{inhom}(s) \bullet \circ y_{inhom}(t) =$ réponse **forcée**

$Y_{hom}(s) \bullet \circ y_{hom}(t) =$ réponse **libre**

Exemple:

PVI $E(y) \equiv y'' + y = \sin(t)$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1 \circ \bullet s^2 Y - 1 + Y = \frac{1}{s^2 + 1}$

$$\begin{aligned}
 Y(s) &= \frac{1}{(s^2 + 1)^2} + \frac{1}{s^2 + 1} = Y_p + Y_{hom} \bullet \circ y(t) = \underbrace{-\frac{1}{2}(\sin(t) + t \cos(t))}_{y_p(t)} + \underbrace{\sin(t)}_{y_{hom}(t)} \\
 \Rightarrow y(t) &= \frac{1}{2} \sin(t) - \frac{1}{2} t \cdot \cos(t)
 \end{aligned}$$

3.4.4 Application pour systèmes d'éq.diff.

Au lieu de transformer seulement une éq.diff unique, on peut aussi transformer tout de suite plusieurs éq.diff., c.-à.-d. on transforme un système. Une éq.diff. d'ordre supérieur se laisse également transformer en la changeant en un système d'ordre premier et en transformant ce système-ci.

Exemple 1:

$$\begin{aligned}
 x''(t) - y(t) &= 0 \\
 9 \cdot x'(t) - y'(t) &= 0
 \end{aligned}$$

$x(0) = 1$, $x'(0) = 0$, $y(0) = 6$, $\rightsquigarrow E(x, y)$: PVI, système

Transformer: $x(t) \circ \bullet X(s)$, $y(t) \circ \bullet Y(s)$

$$\rightsquigarrow E(x, y) \circ \bullet \begin{aligned}
 s^2 \cdot X(s) - s - Y(s) &= 0 & \Rightarrow & s^2 \cdot X(s) - Y(s) = s \\
 9(s \cdot X(s) - 1) - s \cdot Y(s) + 6 &= 0 & & 9s \cdot X(s) - s \cdot Y(s) = 3
 \end{aligned}$$

Solution d'après Cramer:

$$X(s) = \frac{\begin{vmatrix} s & -1 \\ 3 & -s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & -1 \\ 9s & -s \end{vmatrix}} = \frac{-s^2 + 3}{-s^3 + 9s} = \frac{-s^2 + 3}{s(3+s)(3-s)} = \frac{1}{3s} + \frac{1}{3(s+3)} + \frac{1}{3(s-3)}$$

$$\bullet \circ x(t) = \frac{1}{3}(1 + e^{3t} + e^{-3t})$$

$$Y(s) = \frac{\begin{vmatrix} s^2 & s \\ 9s & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s^2 & -1 \\ 9s & -s \end{vmatrix}} = \frac{3s^2 - 9s^2}{-s^3 + 9s} = -\frac{6s}{9 - s^2} = 6 \frac{s}{s^2 - 9} \bullet \circ y(t) = 6 \cosh(3t) = 3(e^{3t} + e^{-3t})$$

Exemple 2:

Exemple avec des pendule accouplés directement par un ressort voir annexe page 300.

3.4.5 Application du plissement

Nous étudions le PVI suivant:

$$E(y) \equiv a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

$$E(y) \circ \bullet a s^2 Y(s) + b s Y(s) + c Y(s) = F(s) + a(s y_0 + y'_0) + b = F(s) + R(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{F(s) + R(s)}{a s^2 + b s + c} = \frac{F(s) + R(s)}{P(s)} = F(s) \cdot \frac{1}{P(s)} + R(s) \cdot \frac{1}{P(s)}$$

$P(s)$ est un polynôme du deuxième degré (**polynôme caractéristique**), $R(s)$ un polynôme du premier degré.

\leadsto La Transformation inverse de $\frac{R(s)}{P(s)}$ et de $\frac{1}{P(s)}$ est possible d'après la théorie traitée. Il reste le problème de la transformation inverse de $\frac{F(s)}{P(s)}$.

$$\text{Soient : } \frac{1}{P(s)} = G(s) \bullet \circ g(t) \Rightarrow \frac{F(s)}{P(s)} = F(s) \cdot \frac{1}{P(s)} = F(s) \cdot G(s) \bullet \circ f(t) * g(t)$$

Spécialement pour $y_0 = y'_0$ il vaut donc $R(s) = 0$. Ainsi il vaut:

Théorème:

Hyp.:

$$a y''(t) + b y'(t) + c y(t) = f(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$$

$$\frac{1}{a s^2 + b s + c} \bullet \circ g(t)$$

Thè.:

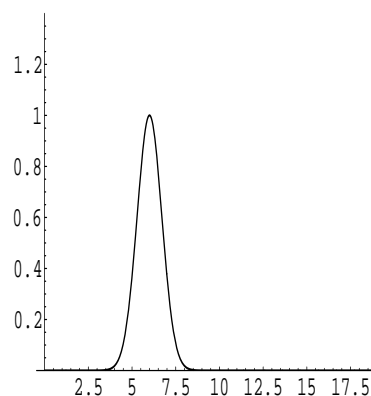
$$y(t) = f(t) * g(t)$$

Remarque:

Ce théorème est aussi connu comme **principe de Duhamel**.

3.5 Distributions**3.5.1 Idée, impulsion unité de Dirac**

P.ex. dans la mécanique on a parfois la situation que sur une masse m il se manifeste une force très grande pendant un temps très court.



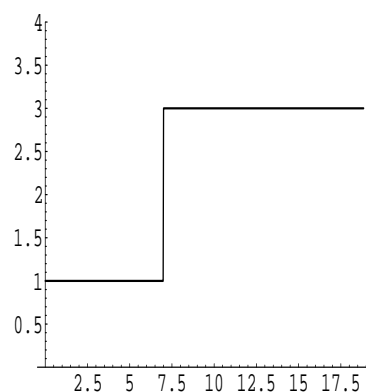
Comme on sait, il vaut: $F(t) = m \cdot a(t) = m \cdot \ddot{s} = m \cdot \dot{v}(t)$

L'impulsion de m est donc:

$$\Delta P = m \cdot v(t_1) - m \cdot v(0) = \int_0^{t_1} m \cdot \dot{v}(t) dt = \int_0^{t_1} F(t) dt$$

Ça correspond au contenu de la surface sous la courbe dans le diagramme F - t . (Impulsion).

Par ailleurs on a souvent la situation dans l'électrotechnique que p.ex. la tension monte soudainement par bonds, p. ex. lors d'un enclenchement d'interrupteur.

**Problème:**

Comment est-ce qu'on manie ce comportement mathématiquement?

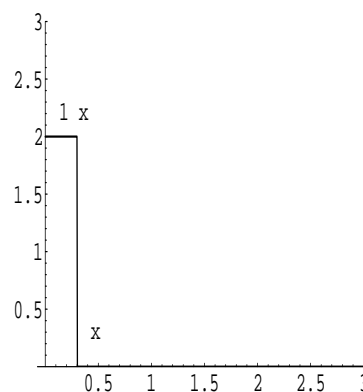
L'accès mathématique à cela est fourni par la théorie des distributions bien exigeante.

Ici, nous voulons étudier seulement l'exemple d'une distribution tout à fait simple, la fonction de Dirac. Nous partons de l'idée d'une impulsion de sorte particulière:

Soit

$$f_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & t \in [0, \varepsilon] \\ 0 & t \notin [0, \varepsilon] \end{cases}$$

$$\leadsto A = \varepsilon \cdot \frac{1}{\varepsilon} = 1$$



$$\text{Il vaut: } \int_0^\infty f_\varepsilon(t) dt = \int_0^\varepsilon \frac{1}{\varepsilon} dt = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1 \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty f_\varepsilon(t) dt = 1$$

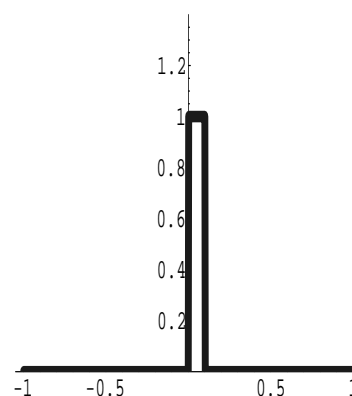
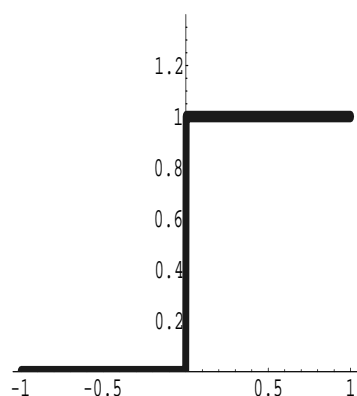
Sans tenir compte de la sévérité mathématique, nous pouvons définir par conséquent plutôt de manière heuristique:

Définition: $f_0(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} f_\varepsilon(t) := \delta(t)$ s'appelle **Fonction de Dirac**

$\delta(t)$ appartient à la classe des **distributions**. On peut comprendre $\delta(t)$ comme fonction généralisée.

Remarque:

On peut aussi comprendre $\delta(t)$ comme "dérivée" de la fonction de saut (de Heaviside) $h(t)$ pour $\Delta t \rightarrow 0$.



Remarque:

Ici, nous avons présenté la fonction delta mathématiquement d'une façon décontractée. Pour le niveau des hautes écoles spécialisées ça peut aller, car ça ne dérange pas. La manière qu'on trouve dans la littérature spécialisée irréprochable et usuelle ne coïncide pas absolument avec cela. Le lecteur trouve une remarque précise dans l'annexe. (Voir à la page 283.)

3.5.2 La transformée de la fonction de Dirac

Sans avoir examiné les détails mathématiques pour l'échange des limites etc., on peut accepter probablement la déduction suivante:

$$\begin{aligned} \delta(t) \circ \bullet \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t) dt &= \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f_{\varepsilon}(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot f_{\varepsilon}(t) dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} e^{-st} \cdot \frac{1}{\varepsilon} dt = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot e^{-st} \cdot \frac{-1}{s} \Big|_0^{\varepsilon} = \frac{-1}{s} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} (e^{-s\varepsilon} - e^0) \stackrel{\text{Bernoulli}}{=} \frac{-1}{s} \cdot \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{1} \cdot (-s \cdot e^{-s\varepsilon}) = \frac{-1}{s} \cdot (-s) \cdot 1 = 1 \end{aligned}$$

pour $Re(s) > 0$

Règle: $\delta(t) \circ \bullet \Delta(s) = 1$

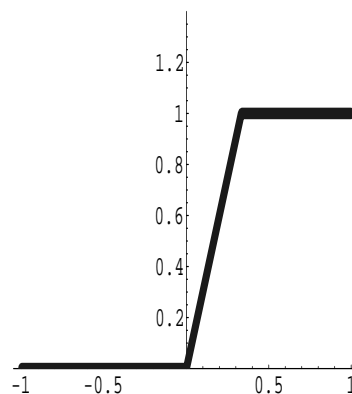
Remarque:

Purement formellement on déduit de cette règle pour la fonction de saut $h(t)$ à l'aide de la règle de la dérivation:

$$h(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$

Soit $h'(t) = \delta(t) \Rightarrow \delta(t) \circ \bullet s \cdot \mathcal{L}\{h(t)\} - h(0^+) = s \cdot H(s) - 0 = \Delta(s) = 1$, $H(s) = \frac{1}{s}$

On peut comprendre $h(t)$ comme valeur limite ($\varepsilon \downarrow 0$) de la section de la droite entre $(0, 0)$ et $(\varepsilon, 1)$, ce qui mène à $h(0^+) = 0$.



Le résultat concorde avec: $h(t) \circ \bullet \int_0^{\infty} e^{-st} \cdot 1 dt = \frac{1}{s}$

Comme on voit, $h(t)$ et $f(t) = 1$ ont la même transformée.

Formellement nous pouvons calculer maintenant aussi la transformée de l'expression provisoirement formelle $\delta'(t) := \lambda(t)$:

$$\delta'(t) := \lambda(t) \circ \bullet \Lambda(s) = s$$

Ainsi il est évident que finalement aussi des polynômes peuvent apparaître comme transformées de Laplace si on poursuit le chemin que nous avons commencé ici.

En outre il vaut:

$$f(t) \cdot \delta(t) = f(t) \cdot 0 = 0 = f(0) \cdot 0 = f(0) \delta(t) \quad \text{pour } t \neq 0$$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} f(t) \cdot \delta(t) dt = \int_0^{\infty} f(0) \cdot \delta(t) dt = f(0) \int_0^{\infty} \delta(t) dt = f(0) \cdot 1 = f(0)$$

Règle:

(Qualité de supprimer ce qui n'intéresse pas)

$$\int_0^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$$

3.5.3 Application pour un PVI

3.5.4 Coup au temps 0

PVI $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \delta(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$

Nous savons: $\frac{1}{as^2 + bs + c} \circ \bullet g(t), \quad 1 \bullet \circ f(t) = \delta(t)$

\leadsto **Solution:** $y(t) = f(t) * g(t) = \delta(t) * g(t) = \int_0^t \delta(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda$

Il vaut:

$$\delta(\lambda) \cdot g(t - \lambda) = \begin{cases} 0 = 0 \cdot g(t) = 0 = \delta(\lambda) \cdot g(t) & \lambda \neq 0 \\ \delta(0) \cdot g(t) & \lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow y(t) = f(t) * g(t) = g(t) \cdot \int_0^t \delta(\lambda) d\lambda = g(t) \cdot 1 = g(t) \Rightarrow y(t) = g(t)$$

Règle: Hyp.: $ay''(t) + by'(t) + cy(t) = \delta(t), \quad y_0 = y'_0 = 0$

Thè.: $y(t) = g(t)$

3.5.5 Coup au temps t_0

Coups au temps $t = t_0$ de la grandeur 1: $\delta(t) \circ \bullet 1$

$$\Rightarrow \delta(t - t_0) \circ \bullet \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - t_0) dt \stackrel{t-t_0=\tau}{=} \int_{-t_0}^{\infty} e^{-s(\tau+t_0)} \delta(\tau) d\tau = e^{-st_0} \int_{-t_0}^{\infty} e^{-s\tau} \delta(\tau) d\tau = e^{-st_0} \cdot 1$$

pour $t_0 > 0$

Règle: Hyp.: $t_0 \geq 0$

Thè.: $\delta(t - t_0) \circ \bullet e^{-st_0}$

Beispiele: Exemples:

1. $E(y) \equiv y'' + y = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k \cdot \pi) = \delta(t) + \delta(t - \pi) + \delta(t - 2\pi) + \dots, \quad y(0) = y'(0) = 0$

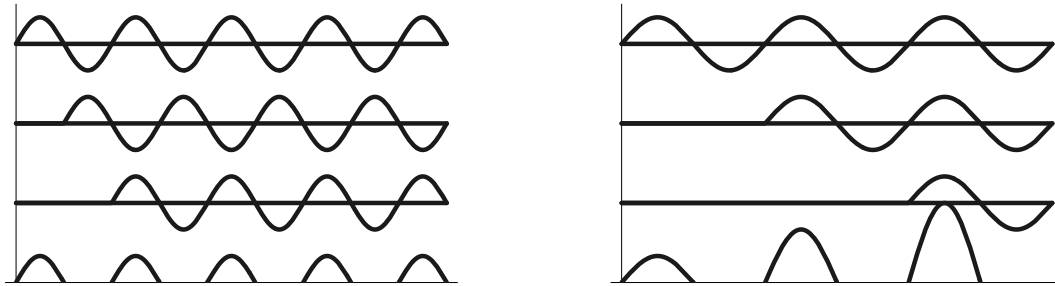
$E(y) \circ \bullet s^2 Y + Y = 1 + e^{-s\pi} + e^{-2s\pi} + e^{-3s\pi} + \dots \rightsquigarrow$ série géométrique avec $q = e^{-s\pi}$

$\text{Re}(s) > 0 \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-2s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-3s\pi}}{1+s^2} + \dots \bullet \circ y(t) \Rightarrow$

$y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq \pi \\ \sin(t - \pi), & t > \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t - 2\pi), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 3\pi \\ \sin(t - 3\pi), & t > 3\pi \end{pmatrix} + \dots$

$\Rightarrow y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq \pi \\ -\sin(t), & t > \pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 3\pi \\ -\sin(t), & t > 3\pi \end{pmatrix} + \dots$

Vue du graphe:



2. $E(y) \equiv y'' + y = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k \cdot 2\pi) = \delta(t) + \delta(t - 2\pi) + \delta(t - 4\pi) + \dots, \quad y(0) = y'(0) = 0$

$E(y) \circ \bullet s^2 Y + Y = 1 + e^{-2s\pi} + e^{-4s\pi} + e^{-6s\pi} + \dots \rightsquigarrow$ série géométrique avec $q = e^{-2s\pi}$

$\text{Re}(s) > 0 \Rightarrow |q| < 1 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{1+s^2} + \frac{e^{-2s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-4s\pi}}{1+s^2} + \frac{e^{-6s\pi}}{1+s^2} + \dots \bullet \circ y(t) \Rightarrow$

$y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t - 2\pi), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 4\pi \\ \sin(t - 4\pi), & t > 4\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 6\pi \\ \sin(t - 6\pi), & t > 6\pi \end{pmatrix} + \dots$

$\Rightarrow y(t) = \sin(t) + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 2\pi \\ \sin(t), & t > 2\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 4\pi \\ \sin(t), & t > 4\pi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0, & t \leq 6\pi \\ \sin(t), & t > 6\pi \end{pmatrix} + \dots$

$\rightsquigarrow y(t) = (n + 1) \sin(t) \quad \text{pour } t \in [2n\pi, 2(n + 1)\pi]$

\rightsquigarrow L'amplitude grandit avec n .

3. L'oscillateur harmonique avec affaiblissement et changement d'impulsion:

$E(y) \equiv y'' + 2y' + y = 3\delta(t - 1) + e^{-t}, \quad y(0) = y'(0) = 0$

$\Rightarrow Y(s) = \frac{3e^{-s}}{(s+1)^2} + \frac{1}{(s+1)^3} \bullet \circ y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ 3 \cdot (t-1) \cdot e^{-(t-1)} & t > 1 \end{cases} + \frac{1}{2} e^{-t} \cdot t^2$

$$\Rightarrow y(t) = \begin{cases} 0 & t \leq 1 \\ e^{-t} \left(3 \cdot e^{(t-1)} + \frac{1}{2} t^2 \right) & t > 1 \end{cases}$$

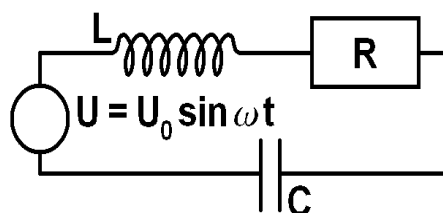
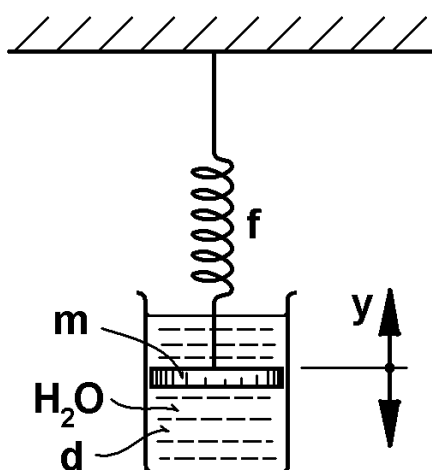
3.6 Problèmes de la pratique

3.6.1 Oscillations et oscillateurs

Nous rencontrons des oscillations p.ex. aux ressorts, pendules, circuits RCL, affaiblissement de courant parasite (de Foucault), oscillations de molécule, oscillations de torsion etc..

Exemple 1:

Supposition: La force d'affaiblissement \sim vitesse constante de proportionnalité d (constante d'affaiblissement)



A l'aide de la loi des ressorts on obtient:

$$m \cdot \ddot{y} + d \cdot \dot{y} + f \cdot y = 0, \quad f = \text{constante de rappel (flexibilité d'un ressort)}$$

$$\text{Soit } 2\rho = \frac{d}{m}, \quad \omega_0^2 = \frac{f}{m} \Rightarrow \ddot{y} + 2\rho \cdot \dot{y} + \omega_0^2 \cdot y = 0$$

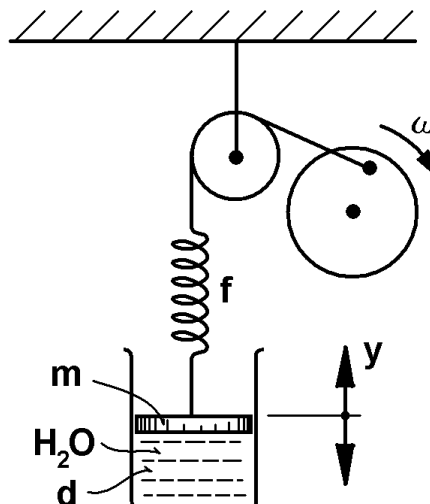
L'expérience montre qu'il convient de traiter les cas suivants séparément (diskriminant!):

1. $\omega_0^2 - \rho^2 > 0$: Affaiblissement **faible**
2. $\omega_0^2 - \rho^2 = 0$: Affaiblissement **critique**
3. $\omega_0^2 - \rho^2 < 0$: Affaiblissement **fort**

Exemple 2:

Si l'on a en plus une force stimulante F , p.ex. par un disque excentrique, on obtient ainsi l'éq.diff. suivante:

$$F(t) = k \cdot \sin(\omega t) \Rightarrow$$



$$E(y) \equiv \ddot{y} + 2\rho\dot{y} + \omega_0^2 y = k \cdot \sin(\omega t), \quad y(0) = y'(0) = 0$$

On peut supposer pour des raisons de physique:

$$y(t) = A \cdot \sin(\Omega \cdot t + \varphi)$$

Les études du comportement de la solution dépendant des paramètres spéciaux (comportement de résonance etc.) est un petit projet traité dans le laboratoire de mathématiques (par exemple avec Mathematica). Par conséquent ici on ne traite plus cela.

3.6.2 Comportement de stabilité de solutions

Problème: Si on stimule brièvement un système qui se trouve dans l'état de repos, on s'attend à ce que le système se dirige vers la condition de repos après un certain temps. Si ça n'arrive pas ainsi, le système montre un comportement instable ou un comportement instable analogue aux équilibres dans la statique. Nous assumons ce langage de la statique. Avant de pouvoir traiter des problèmes pratiques, nous devons clarifier encore le problème de la signification de la "stimulation".

Exemple:

$$\text{Système} \rightsquigarrow \text{éq.diff.:} \quad a y'' + b y' + c y = f(t), \quad y(0) = y_0, \quad y'(0) = y'_0$$

"Le système en état de repos" peut avoir deux significations:

1. $f(t) \equiv 0$ (pas de stimulation de l'extérieur)

$$\Rightarrow Y = \frac{a \cdot s \cdot y_0 + a \cdot y'_0 + b \cdot y_0}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c} \bullet \circ y(t)$$

2. $y_0 = y'_0, f(t) = \delta(t)$ (ou un coup comparable)

$$\rightsquigarrow f(t) = 0 \quad \text{pour } t > 0 \Rightarrow Y(s) = \frac{1}{a \cdot s^2 + b \cdot s + c} \bullet \circ y(t)$$

On reconnaît tout de suite que le cas (2) pour Y est un cas spécial du cas 1:

$$y_0 = 0, \quad a \cdot y'_0 = 1, \quad y'_0 = \frac{1}{a}$$

Une situation correspondante vaut pour des éq.diff d'ordre supérieur.

Sous une "stimulation courte", nous pouvons donc nous imaginer un coup de Dirac — ou bien des conditions initiales qui correspondent à un tel coup.

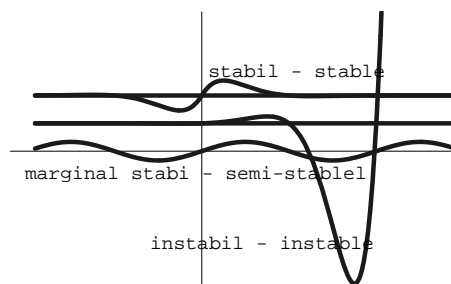
On obtient donc la fonction de solution $y(t)$ d'un système animé tellement brièvement comme transformée inverse d'une fonction rationnelle $Y(s) = \frac{p_m(s)}{q_n(s)}$.

Maintenant nous pouvons expliquer l'idée de la stabilité plus exactement :

Définition: Une solution d'une éq.diff. d'un système brièvement animé s'appelle:

1. **stable** $\Leftrightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = c, |y(t)| < k \in \mathbb{R}$
2. **semi-stabilisé**
 $\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : y(t) \in [c_1, c_2], |y(t)| < k \in \mathbb{R}$
3. **instable** dans tous les autres cas

L'ensemble des fonctions stables est un sous-ensemble des fonctions semi-stabilisées.



Beispiele: Exemples:

1. $\frac{c}{(s+a)^n} \bullet \circ \frac{(-1)^{n-1} c}{(n-1)!} e^{-at} \cdot t^{n-1} \rightsquigarrow$
 - (a) stable, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{(-1)^{n-1} c}{(n-1)!} e^{-at} \cdot t^{n-1} = 0$ pour $Re(a) > 0$
 - (b) instable pour $(Re(a) < 0) \vee (a = 0 \wedge n > 1)$ etc.
2. $\frac{1}{s^2+1} \bullet \circ \sin(t) \rightsquigarrow$ semi-stabilisé

Remarque:

(a) Soit $y(t)$ continue par morceaux et semi-stable ou bien stable. $\Rightarrow y(t)$ bornée à $\mathbb{R}_0^+ \cup \{\infty\}$

$$\Rightarrow \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt = Y(s) \quad \text{existe pour } Re(s) > 0$$

(b) Voir exemples dans la littérature, p.ex. Glyn James, *Advanced Modern Engineering Math.*, p.185 ff.

3. $E(y) \equiv y'' + 9y = \cos(2t), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

$$E(y) \circ \bullet s^2 Y - s + 9Y = \frac{s}{s^2 + 4}$$

$$\Rightarrow Y = \frac{s^3 + 5s}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = \frac{4}{5} \frac{s}{s^2 + 9} + \frac{1}{5} \frac{s}{s^2 + 4} \bullet \circ y(t) = \frac{4}{5} \cos(3t) + \frac{1}{5} \cos(2t)$$

\rightsquigarrow Stimulation sans arrêt.

4. $E(y) \equiv y'' + 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

$$E(y) \circ \bullet s^2 Y - s + 9Y = 0 \Rightarrow Y = \frac{s}{(s^2 + 9)} \bullet \circ y(t) = \cos(3t)$$

$\rightsquigarrow y(t)$ semi-stable.

3.6.3 Critère de stabilité

Comme chacun sait, nous appelons un système **stable**, si la réponse d'impulsion sur le coup $\delta(t)$ à $t = 0$ va avec le temps de nouveau vers l'équilibre. Pour l'éq.diff. linéaire avec des coefficients constants ça signifie:

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_0 y = \delta(t) \circ \bullet a_n s^n Y + a_{n-1} s^{n-1} Y + \dots + a_0 Y = 1$$

$$\Rightarrow Y = \frac{1}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0} = \frac{1}{a_n (s - s_1) \dots (s - s_n)} = \frac{1}{a_n} \left(\frac{A_1}{s - s_1} + \dots + \frac{A_n}{s - s_n} \right)$$

(dans le cas de places de zéro s_i toutes différentes)

$$Y \bullet \circ y(t) = \frac{1}{a_n} (A_1 e^{s_1 t} + \dots + A_n e^{s_n t}), \quad A_k, s_k \in \mathbb{C}$$

Dans le cas de places de zéro qui coïncident, il y a encore des termes de la forme suivante: $A_k t^j \cdot e^{s_k t}$

Maintenant tous les termes $e^{s_i t}$ et $t^j \cdot e^{s_k t}$ avec $t \rightarrow \infty$ vont vers 0, s'il vaut $Re(s_i) < 0$ resp. $Re(s_k) < 0$.
Le système trouve le repos: $y(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$

Théorème:	Critère de stabilité	
	<u>Hyp.:</u>	
		s_k zéro du polynôme caractéristique
		$\forall_{k=1}^n Re(s_k) < 0$
	<u>Thè.:</u>	stable

Attention:

Le théorème des valeurs limites $\lim_{s \downarrow 0} s \cdot Y(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t)$ est applicable selon les hypothèses sans problème seulement si $y(t)$ ne croît pas de façon exponentielle. Si on connaît seulement $Y(s)$ et non pas $y(t)$, un examen des places de zéro du dénominateur est recommandable pour décider de la stabilité.

3.6.4 Problèmes de valeurs aux limites

Exemple:

$$E(x) \equiv t \cdot y'' + 2y' + ty = 0, \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = 0 \quad (\text{valeurs aux limites})$$

Ici, $y'(0)$ manque. Mais on a donné $y(\pi) = 0$.

Méthode: Calculer comme d'habitude à l'aide d'un paramètre $y'(0) = \lambda$. Ensuite choisir λ de façon que $y'(0) = \lambda$ soit satisfait.

Règle de la multiplication:

$$y'' \circ \bullet s^2 Y - s \cdot 1 - \lambda \Rightarrow t \cdot y'' \circ \bullet - 2sY - s^2 \cdot \frac{dY}{ds} + 1$$

$$2y' \circ \bullet 2(sY - 1), \quad t \cdot y \circ \bullet - \frac{dY}{ds} = -Y'$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(x) \circ \bullet Y'(-s^2 - 1) + Y(-2s + 2s) + 1 - 2 &= Y'(-s^2 - 1) - 1 = 0 \Rightarrow Y' = -\frac{1}{s^2 + 1} \\ \Rightarrow Y(s) = \int Y'(s) ds = \int -\frac{1}{s^2 + 1} ds &= -\arctan(s) + C, \quad C = \text{const.} = ? \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Il faut obtenir: } \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} Y(s) &= \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} y(t) dt = 0 \\ & \quad (\text{il vaut naturellement: } t \in \mathbb{R}^+ \Rightarrow \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} e^{-st} = 0) \end{aligned}$$

$$\text{Indication: } 1 = y(0) = \lim_{t \downarrow 0} y(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) \Rightarrow \lim_{s \rightarrow \infty} Y(s) = 0$$

$$\Rightarrow 0 = \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} Y(s) = \lim_{\text{Re}(s) \rightarrow \infty} -\arctan(s) + C = -\frac{\pi}{2} + C \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{\pi}{2} - \arctan(s), \quad \int_s^{\infty} \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma = \frac{\pi}{2} - \arctan(s) = Y(s) \circ \bullet ?$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y(s) &= -\int_s^{\infty} Y'(\sigma) d\sigma = -\int_s^{\infty} \frac{-1}{1 + \sigma^2} d\sigma, \quad Y'(s) = \frac{dY}{ds} = \frac{d\frac{\pi}{2} - \arctan(s)}{ds} = -\frac{1}{1 + s^2} \\ \Rightarrow Y'(s) &= \frac{-1}{1 + s^2} \bullet \circ -\sin(t) = -t \cdot y(t) \Rightarrow Y(s) \bullet \circ \frac{\sin(t)}{t} \end{aligned}$$

Il est intéressant que dans $y(t)$, λ n'apparaît plus! Mais nous avons de la chance: $y(t)$ satisfait les conditions aux limites $y(\pi) = \frac{\sin(\pi)}{\pi} = 0$. A cause de la règle de Bernoulli, l'autre condition aux limites est aussi satisfaite: $y(0) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1 \Rightarrow y(t) = \frac{\sin(t)}{t}$ est solution!

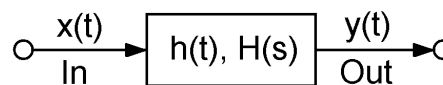
3.7 Systèmes LTI

3.7.1 Fondements

Signification: Systèmes LTI: Systèmes de transmission linéaires et invariants par rapport au temps, importants dans la technique des signaux et de la radio.

Nous étudions le type suivant:

$x(t)$: Signal au début
 $y(t)$: Signal à la fin
 $H(s)$: **Fonction de transmittance**



Ici nous voulons étudier seulement les fonctions avec la qualité suivante:

$$y(t) \circ \bullet Y(s) = H(s) \cdot X(s) \bullet \circ h(t) * x(t) = y(t), \quad H(s) \bullet \circ h(t), \quad X(s) \bullet \circ x(t)$$

Au temps $t = 0$ on trouve **la condition de zéro** (Zero state).

Le système soit de telle manière que $y(t)$ et $x(t)$ soient liées par une éq.diff. aux coefficients constants. Les conditions initiales soient en plus homogènes.

\leadsto Soit $E(x, y) \equiv x(t) = \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y^{(1)} + \alpha_0 y$, $y(0) = \dots = y^{(n-1)}(0) = 0$
 \leadsto PVI, conditions zéro homogènes.

Puis il vaut: $E(x, y) \circ \bullet X(s) = \alpha_n s^n Y + \dots + \alpha_1 s Y + \alpha_0 Y$

$$\leadsto X(s) = P(s) \cdot Y(s) \quad \text{avec } P(s) = \alpha_n s^n + \dots + \alpha_1 s + \alpha_0,$$

$$Y(s) = \frac{X(s)}{P(s)} := H(s) \cdot X(s) \Rightarrow H(s) = \frac{1}{P(s)}, \quad H(s) \cdot P(s) = 1$$

Transformation inverse:

$$\alpha_n s^n H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s) = H(s) \cdot P(s) = 1 \bullet \circ \delta(t) = \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y$$

avec $h(0) = \dots = h^{(n-1)}(0) = 0$

Signification de $h(t)$ La transformée inverse $h(t)$ de la fonction de transmittance est donc la réponse au signal d'entrée $\delta(t)$ (coup de Dirac).

Autre interprétation de $h(t)$:

$$H(s) \cdot P(s) - 1 = \alpha_n s^n H(s) - 1 + \alpha_{n-1} s^{n-1} H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s)$$

$$= \alpha_n \left(s^n H(s) - \frac{1}{\alpha_n} \right) + \alpha_{n-1} s^{n-1} H(s) + \dots + \alpha_1 s H(s) + \alpha_0 H(s) = 0 \circ \bullet \alpha_n y^{(n)} + \dots + \alpha_1 y' + \alpha_0 y = 0,$$

$$h(0) = h'(0) = \dots = h^{(n-2)}(0) = 0, \quad h^{(n-1)}(0) = \frac{1}{\alpha_n}$$

Nous définissons à cause de la première interprétation:

Définition: $h(t)$ s'appelle **réponse d'impulsion**

\leadsto fonction de transmittance $\bullet \circ$ réponse d'impulsion

3.7.2 Exemples, liaisons de systèmes

Filtre passe-bas

Exemple:

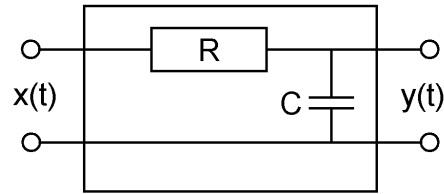
Il vaut:

$$R \cdot \dot{y} + \frac{y}{C} = \frac{x}{C}$$

Cond.lim. homogènes

$$\leadsto R \cdot C \cdot \dot{y} + y = x \quad \circ \bullet \quad (R \cdot C \cdot s + 1)Y = X$$

$$\Rightarrow H(s) = \frac{1}{R \cdot C \cdot s + 1} \quad \bullet \circ \quad \frac{1}{R \cdot C} \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}} = h(t) \leadsto \text{stable}$$



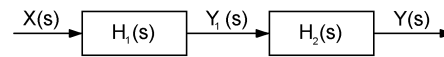
Circuit oscillant non-amorti

$$\ddot{y} + \omega^2 y = x(t) \quad \circ \bullet \quad s^2 Y + \omega^2 Y = X \Rightarrow H(s) = \frac{1}{s^2 + \omega^2} \quad \bullet \circ \quad \frac{1}{\omega} \sin(\omega t)$$

\leadsto semi-stable

Couplage en série

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= H_1(s) \cdot X(s), \\ Y(s) = Y_2(s) &= H_2(s) \cdot Y_1(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= H_2(s) \cdot H_1(s) \cdot X(s) \end{aligned}$$



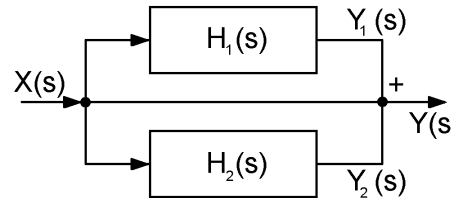
Règle:

$$H(s) = H_1(s) \cdot H_2(s)$$

Couplage en dérivation (montage en parallèle)

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) \quad \circ \bullet \quad Y_1(s) + Y_2(s)$$

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= H_1(s) \cdot X(s), \\ Y_2(s) &= H_2(s) \cdot X(s) \\ \Rightarrow Y(s) &= Y_1(s) + Y_2(s) \\ &= H_1(s) \cdot X(s) + H_2(s) \cdot X(s) \\ &= (H_1(s) + H_2(s)) \cdot X(s) \\ &= H(s) \cdot X(s) \end{aligned}$$

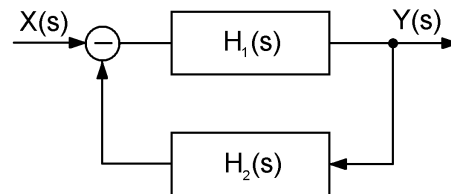


Règle:

$$H(s) = H_1(s) + H_2(s)$$

Couplage de retour

$$\begin{aligned} Y &= H \cdot X, \quad Y_2 = H_2 \cdot Y \\ \Rightarrow H_1 \cdot X - H_1 \cdot H_2 \cdot X \\ \Rightarrow H \cdot X &= H_1 \cdot X - H_1 \cdot H_2 \cdot H \cdot X \\ \Rightarrow H &= \frac{H_1}{1 + H_1 \cdot H_2} \end{aligned}$$



Règle:

$$H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1 \cdot H_2(s)}$$

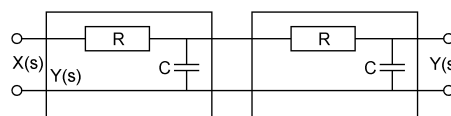
Série de filtres passe-bas

$$H_1 = \frac{1}{1 + sRC}, \quad H_2 = H_1$$

$$\Rightarrow H = H_1 \cdot H_2 = \left(\frac{1}{1 + sRC}\right)^2$$

↪ Réponse à l'impulsion:

$$h(t) = \frac{1}{(R \cdot C)^2} \cdot t \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}}$$

**Remarque:**

1.

Un système linéaire est stable, si pour la réponse à l'impulsion il vaut:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} h(t) = 0$$

2.

Souvent dans la littérature on trouve des transformations liées à la transformation de Laplace:

(a) Transformation de Laplace–Carson:

Déf.: $F_C(s) = F(s) \cdot s$

$F(s) \cdot s$ apparaît dans le théorème de valeurs au début ou à la fin.

P.ex. $\lim_{s \rightarrow \infty} s \cdot F(s) = \lim_{t \downarrow 0} f(t)$

(b) Transformation de Laplace à deux côtés:

Déf.: $F_2(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-st} \cdot f(t) dt$

Comme nous ne considérons que des fonctions avec $f(t) = 0$ pour $t < 0$, rien ne change avec cette transformation chez nous. L'avantage est qu'on obtient une orthographe qui est analogue à la transformation de Fourier.

Kapitel • Chapitre 4

Séries de Fourier

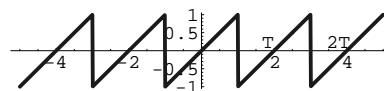
4.1 Introduction

4.1.1 Utilisation

On utilise les séries de Fourier dans beaucoup de domaines de la science et de la technique pour l'analyse et la description de processus périodiques. Un exemple important est le transfert de signaux.

4.1.2 Fonctions périodiques

Définition:



$f(t)$ s'appelle **périodique** avec T

$$\Leftrightarrow \forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(t + T)$$

T s'appelle **longueur de la période**

Problème: $f(t_0) = f(t_0 + T) \rightsquigarrow$ On aimerait avoir $T = 2\pi$

Substitution: $t' := t \cdot \frac{2\pi}{T}, t := t' \cdot \frac{T}{2\pi}$

Mettre: $f(t) = f\left(t' \cdot \frac{T}{2\pi}\right) := f_1(t')$

$$\Rightarrow f_1(t') = f(t) = f(t+T) = f\left(t' \cdot \frac{T}{2\pi} + T \cdot \frac{2\pi}{2\pi}\right) = f\left(\left(t' + 2\pi\right) \cdot \frac{T}{2\pi}\right) = f_1(t' + 2\pi) \Rightarrow f_1(t') = f_1(t' + 2\pi)$$

Lemme: Hyp.: $f(t) = f(t + T), t := t' \cdot \frac{T}{2\pi}, f(t) = f_1(t')$

Thè.: $f_1(t') = f_1(t' + 2\pi)$

f_1 est donc périodique avec la période 2π , c'est pourquoi nous pouvons mettre s.r.d.l.u.⁶ $T = 2\pi$.

4.1.3 Séries trigonométriques

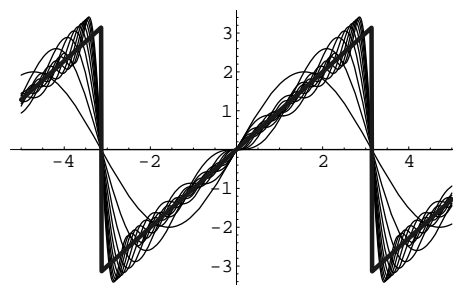
Définition: Les séries trigonométriques sont des expressions du genre suivant:

$$1. f(t) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(t) + b_1 \sin(t) + \dots + a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)$$

$$2. \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)), \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$3. 2(\sin(t) - \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) - \dots) = 2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin(kt)$$

Est-ce qu'une telle série converge-t-elle?



Lemme:

Hyp.:

Série trig conv. pour $t = t_0$

Thè.:

Série trig conv. pour $t = t_0 + T$ resp. $t = t_0 + 2\pi$

Lemme:

Les séries trigonométriques sont périodiques avec la période T resp. avec la période 2π .

Remarque:

Dans ce qui suit, nous considérons les séries trigonométriques qui sont techniquement raisonnables, c.-à.-d. continues par morceaux, intégrable sur une période etc..

4.2 Séries et analyse de Fourier

Remarque:

Au lieu de parler de l'analyse de Fourier, on parle aussi de **l'analyse harmonique** (voir chapitre prochain).

Convention: Soir s.r.d.l.u.: $\forall t \in \mathbb{R} : f(t) = f(t + 2\pi), T = 2\pi$

⁶sans restriction de l'universalité

4.2.1 Le problème de la représentation

Polynômes de Fourier

Définition: $f_n(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$ s'appelle **Polynôme de Fourier** du degré n .

Problème: Une fonction périodique f donnée doit être approximée aussi bien que possible par des polynômes de Fourier. On cherche des **critères pour une bonne approximation**.

Idée:

Chercher des approximations f_n avec une **somme minimale des carrés des résidus** (SEQR):

$$\leadsto \int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} \left(f - \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right) \right)^2 dt = \varphi(a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n) \rightarrow \text{Min}$$

φ est une fonction carrée avec $2n + 1$ variables. Si on met les dérivées partielles égales à 0 (condition pour le minimum), on obtient un système d'équations linéaires qui peut être résolu clairement. On va voir que le minimum ainsi trouvé représente une approximation idéale.

Formules d'Euler

Problème:

Calculer les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, \dots, b_n$ (variables dans φ)

Dans le calcul qu'il faut faire maintenant nous utilisons les **relations d'orthogonalité** (intégrale comme produit scalaire):

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \cdot \sin(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k-m) \cdot t) - \cos((k+m) \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq m, \quad k, m \in \mathbb{Z} \\ \pi & k = m \end{cases}$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(kt) \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sin((k-m) \cdot t) + \sin((k+m) \cdot t) dt = 0 \quad \forall k, m \in \mathbb{Z}$$

$$\int_0^{2\pi} \cos(kt) \cdot \cos(mt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((k-m) \cdot t) + \cos((k+m) \cdot t) dt = \begin{cases} 0 & k \neq m, \quad k, m \in \mathbb{Z} \\ \pi & k = m \end{cases}$$

Indication p.ex. pour la 2ème de ces formules:

$$\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = (\sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta)) + (\sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta)) = 2 \sin(\alpha) \cos(\beta)$$

Comme ça la déduction suivante devient possible:

$$1. \frac{\partial \varphi}{\partial a_k} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a_k} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial a_k} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \cos(kt) dt = 0 \text{ (Min.)}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^{2\pi} f \cdot \cos(k t) dt = \int_0^{2\pi} f_n \cdot \cos(k t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos(m t) + b_m \sin(m t)) \right) \cdot \cos(k t) dt \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \cos(k t) dt}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (a_k \int_0^{2\pi} \cos(m t) \cos(k t) dt)}_{=\pi, k=m} + \underbrace{b_k \int_0^{2\pi} \sin(m t) \cos(k t) dt}_{=0} = a_k \cdot \pi \\
&\Rightarrow a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \cos(k t) dt
\end{aligned}$$

$$2. \frac{\partial \varphi}{\partial b_k} = \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial b_k} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial b_k} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \sin(k t) dt = 0 \text{ (Min.)}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \int_0^{2\pi} f \cdot \sin(k t) dt = \int_0^{2\pi} f_n \cdot \sin(k t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^n (a_m \cos(m t) + b_m \sin(m t)) \right) \cdot \sin(k t) dt \\
&= \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} \sin(k t) dt}_{=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^n (a_k \int_0^{2\pi} \cos(m t) \sin(k t) dt)}_{=0} + \underbrace{b_k \int_0^{2\pi} \sin(m t) \sin(k t) dt}_{=\pi, k=m} = b_k \cdot \pi \\
&\Rightarrow b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f \cdot \sin(k t) dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
3. \frac{\partial \varphi}{\partial a_0} &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial a_0} (f - f_n)^2 dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{\partial}{\partial a_0} f_n dt = - \int_0^{2\pi} 2(f - f_n) \cdot \frac{1}{2} dt = 0 \\
&\rightsquigarrow \int_0^{2\pi} f dt = \int_0^{2\pi} f_n dt = \int_0^{2\pi} \frac{a_0}{2} dt + \sum_{k=1}^n (a_k \int_0^{2\pi} \cos(k t) dt) + b_k \int_0^{2\pi} \sin(k t) dt = \frac{1}{2} \cdot a_0 \cdot 2\pi + 0 + 0 = a_0 \cdot \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt, \quad \frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$$\rightsquigarrow a_0 = \text{valeur moyenne de } f \text{ sur } [0, 2\pi].$$

Ainsi nous connaissons la formule d'Euler pour l'approximation la plus idéale (SEQR)

Théorème: **Hyp.:**

f périodique avec 2π et raisonnable

Thè.:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt$$

Définition:

a_0, a_k, b_k s'appellent **coefficients de Fourier réels**

f_n s'appelle $n^{\text{ième}}$ **approximation**

Remarque:

1. a_0, a_k, b_k ne dépendent pas de n !
2. Si nous accroissons n , l'approximation s'améliore si les coefficients de Fourier qui s'ajoutent sont $\neq 0$. (Si non on aurait une meilleure approximation avec les nouveaux coefficients = 0.)

4.2.2 Le problème de la convergence

Séries de Fourier

Définition: Soit $\tilde{f}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) := f_\infty(t)$

\tilde{f} s'appelle **série de Fourier** de f .

Problème:

Quand est-ce que l'équation suivante vaut pour un $f(t)$ donné dans $[0, 2\pi]$ point par point?

$$\forall_t : f(t) = \tilde{f}(t) := \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) = f_\infty(t)$$

Hypothèse:

La suite de fonctions $\langle f_n \rangle$ converge de façon uniforme (*UNIFORM*) dans $[0, 2\pi]$ vers $\tilde{f}(t)$. Au cas de la convergence uniforme on peut intégrer les sommes infinies membre par membre. Par conséquent les coefficients de Fourier sont calculables d'après les formules d'Euler.

Examination:

Soit f continue dans $[0, 2\pi]$.

f_n était définie de manière que $\int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt$ était minimal (SEQR). A cause de la convergence uniforme on peut donc déduire:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} \lim_{n \rightarrow \infty} (f - f_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt = \int_0^{2\pi} \varphi(t)^2 dt, \quad \varphi(t) = f(t) - \tilde{f}(t)$$

A cause de la convergence uniforme, si $f(t)$ est continue, $\tilde{f}(t)$ est aussi continue, donc aussi $f(t) - \tilde{f}(t) = \varphi(t)$.

Si on avait $\int_0^{2\pi} \varphi(t)^2 dt \neq 0$, la fonction continue $\varphi(t)$ serait $\neq 0$ dans $[0, 2\pi]$. On pourrait donc approximer $\varphi(t)$ dans $[0, 2\pi]$ par des polynômes de Fourier $\varphi_n(t) \neq 0$.

Pour la SEQR cela signifierait:

$$\int_0^{2\pi} (\varphi - \varphi_n)^2 dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f} - \varphi_n)^2 dt < \int_0^{2\pi} \varphi^2(t) dt = \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt \Rightarrow \int_0^{2\pi} (f - (\tilde{f} + \varphi_n))^2 dt < \int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt$$

$(\tilde{f} + \varphi_n)$ approximerait donc f mieux que \tilde{f} toute seule. Donc \tilde{f} ne serait plus l'approximation la meilleure, la SEQR ne serait donc pas minimale.

\leadsto Contradiction!

Lemme:

Hyp.:

$f \text{ cont}([0, 2\pi]), \quad f \text{ périodique}, T = 2\pi$
 $\langle f_n \rangle \in \text{UNIFORM}\mathcal{V}([0, 2\pi])$

Thè.:

$\int_0^{2\pi} (f - \tilde{f})^2 dt = 0, \quad \tilde{f} \in \text{cont}([0, 2\pi])$

Conséquence: $f \text{ cont}([0, 2\pi]), \langle f_n \rangle \in \text{UNIFORM}\mathcal{V}([0, 2\pi]) \Rightarrow$

$$\forall t \in [0, 2\pi] \quad f(t) = \tilde{f}(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

Par conséquent il se pose la question:

Quand est-ce que $\langle f_n \rangle$ converge de façon iniforme dans $[0, 2\pi]$?

Théorème de Dirichlet

Examination:

On peut calculer les dérivées de séries convergentes de façon uniforme avant de calculer ou après avoir calculé la somme. C'est en effet seulement sensé quand les termes de la série sont dérivables et si la série des dérivées converge. En outre une série de fonctions continues qui converge sur un intervalle fermé converge aussi de façon uniforme.

Il va de soi que les polynômes de Fourier sont dérivables. C'est pourquoi au cas de la convergence dans $[0, 2\pi]$ il faut exiger: $f'_n \rightarrow \tilde{f}'$. Pour $f = \tilde{f}$, la dérivabilité de f est donc nécessaire.

Comme les conditions suffisantes sont beaucoup plus difficiles à traiter que les conditions nécessaires, nous voulons discuter d'abord un cas plus simple:

Théorème:

Hyp.:

f périodique avec 2π

f deux fois dérivable de façon continue dans $[0, 2\pi]$

Thè.:

La série de Fourier \tilde{f} de f converge de façon uniforme et absolue.

Quant à la preuve:

Utiliser $\cos(0) = \cos(k 2\pi)$, $f'(0) = f'(k 2\pi)$.

$$\begin{aligned} \text{P.ex. } a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt = \frac{f(t)}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \sin(kt) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_0^{2\pi} f'(t) \cdot \sin(kt) dt \\ &= 0 + \frac{1}{k\pi} f'(t) \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos(kt) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} f''(t) \cdot \cos(kt) dt = -\frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} f''(t) \cdot \cos(kt) dt \\ \Rightarrow |a_k| &\leq \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| \cdot |\cos(kt)| dt \leq \frac{1}{k^2\pi} \int_0^{2\pi} |f''(t)| dt = \frac{1}{k^2\pi} k_1 \Rightarrow |a_k| \leq \frac{1}{k^2\pi} k_1 \forall k \end{aligned}$$

De même: $|b_k| \leq \frac{1}{k^2\pi} k_2 \forall k$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \frac{a_0}{2} + \sum_0^\infty (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) \right| &\leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^\infty (|a_k| |\cos(kt)| + |b_k| |\sin(kt)|) \leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^\infty (|a_k| + |b_k|) \\ &\leq \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{k^2\pi} k_1 + \frac{1}{k^2\pi} k_2 \right) = \left| \frac{a_0}{2} \right| + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{1}{k^2\pi} \underbrace{(k_1 + k_2)}_{=c} \right) = \left| \frac{a_0}{2} \right| + c \cdot \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2\pi} \end{aligned}$$

$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2\pi}$ est une série p convergente avec $p = 2$.

Si les coefficients de Fourier sont remplacés par leurs valeurs absolues, on obtient la même majorante, ce

qui prouve la convergence absolue.



De ce théorème et du dernier lemme on obtient tout de suite:

Corollaire:

Hyp.:

f périodique avec 2π

f deux fois dérivable de façon continue dans $[0, 2\pi]$

Thè.:

$$(1) \quad f(t) \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$(2) \quad a_0, a_k, b_k \text{ calculable d'après Euler}$$

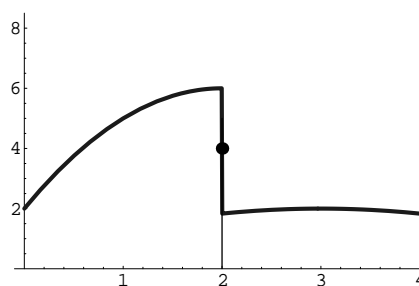
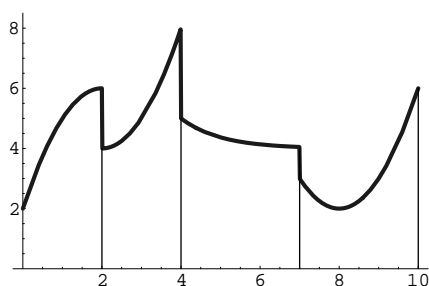
On peut encore étendre ces résultats obtenus jusqu'ici. Ainsi on obtient le **théorème de convergence de Dirichlet** pour des fonctions lisses par morceaux resp. **normales**. Pour ce qui concerne la preuve, il faut consulter la littérature.

Définition:

Nous appelons une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ **lisse par morceaux** sur un intervalle, si elle y est dérivable de façon continue dans presque tous les points, sauf éventuellement à des points d'exception isolés. Dans ces points d'exception il existe la valeur limite de droite et de gauche pour la fonction et la dérivée.

Correspondamment nous définissons pour les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$.

Illustration:



Théorème: **de Dirichlet**

Hyp.:

f lisse par morceaux dans $[0, 2\pi]$

$$\tilde{f} = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(t)$$

Thè.:

1. $\tilde{f} = f(t)$ dans tous les points de continuité de f

2. Dans les places de saut ξ la série de Fourier converge vers la moyenne arithmétique des valeurs limites de fonction:

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2} (f(\xi^+) + f(\xi^-))$$

Remarques:

1. Avec cela, la classe des fonctions, qui peuvent être développées dans une série de Fourier convergente, n'est pas du tout épuisée. P.ex. Weierstrass a donné une fonction qui est continue partout, mais qui n'est dérivable dans aucun point et cependant qui peut être développée partout dans une série de Fourier convergente.

2. (a) Dans l'**analyse harmonique**, il s'agit de trouver les coefficients de Fourier pour une fonction donnée, c.-à.-d., effectuer le développement de Fourier.

(b) Dans la **synthèse harmonique**, on se pose le problème de trouver la fonction dont on connaît les coefficients de Fourier (appelé le spectre).

4.2.3 Conclusions et conséquences

Corollaire: **Hyp.:**

Soient
 $a, b \in \mathbb{R}$, f dérivable, f' borné($[a, b]$)

Thè.:

$$(1) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cdot \cos(k \cdot t) dt = 0$$

$$(2) \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_a^b f(t) \cdot \sin(k \cdot t) dt = 0$$

Quant à la preuve: P.ex. (1):

$$\begin{aligned} \leadsto \left| \int_a^b f(t) \cdot \sin(k \cdot t) dt \right| &= \left| -\frac{1}{k} f(t) \cos(k t) \Big|_a^b + \frac{1}{k} \int_a^b f(t)' \cdot \cos(k \cdot t) dt \right| \\ &\leq \frac{1}{k} (|f(a)| |\cos(k a)| + |f(b)| |\cos(k b)|) + \frac{1}{k} \int_a^b |f(t)'| \cdot |\cos(k \cdot t)| dt \leq \frac{1}{k} (|f(a)| + |f(b)|) + \frac{1}{k} \int_a^b |f(t)'| dt \\ &= \frac{1}{k} \cdot (f(a) + f(b) + C) \rightarrow 0 \quad \text{avec } k \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Maintenant nous étudions quelques trucs pour obtenir de nouvelles séries de Fourier par intégration et dérivées de séries données:

Corollaire:

Hyp.:

La série de Fourier $\tilde{f}(t)$ converge de façon uniforme dans l'intervalle I .

Thè.:

$\tilde{f}(t)$ est intégrable terme par terme. Pour calculer la constante d'intégration, une condition secondaire est nécessaire. Le résultat est de nouveau une série de Fourier pour $a_0 = 0$.

Corollaire:

Hyp.:

La série de Fourier $\tilde{f}(t)$ et aussi sa dérivée $\tilde{f}'(t)$ convergent de façon uniforme dans l'intervalle I .

Thè.:

$\tilde{f}'(t)$ peut être obtenu en calculant la dérivée terme par terme dans $\tilde{f}(t)$.

L'exemple suivant montre que la série des dérivées des termes ne doit pas converger nécessairement:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k t)}{k} = \tilde{f}(t) \text{ conv}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(k t)}{k} = \tilde{f}(t) = -\ln\left(2 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right), \quad 0 < t < 2\pi, \text{ siehe}^7. \quad \text{voir}^7.$$

⁷ Voir: Meyberg–Vachenauer, Höhere Math. 2, p.313

En calculant la dérivée terme par terme, on obtient:

$$\tilde{f}'(t) \stackrel{?}{=} - \sum_{k=1}^{\infty} \sin(kt) \rightsquigarrow \quad \text{Mais il vaut: } g(t, n) = \sum_{k=1}^n \sin(kt) = \frac{\cos(\frac{t}{2})}{2 \sin(\frac{t}{2})} - \frac{\cos((n + \frac{1}{2}) \cdot t)}{2 \sin(\frac{t}{2})}$$

\rightsquigarrow **Problème:** $\cos((n + \frac{1}{2}) \cdot t)$ n'est pas convergent pour $n \rightarrow \infty$.

En outre il vaut p.ex.⁷:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{\pi - t}{2}, \quad 0 < t < 2\pi \quad \text{und} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} r^k \sin(kt) = \frac{r \sin(t)}{1 - 2r \cos(t) + r^2}, \quad |r| < 1$$

Beispiele: Exemples:

$$(1) \quad f(t) = \begin{cases} t & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ \pi - t & t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}, \quad f(t) = \tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1^2} - \frac{\sin(3t)}{3^2} + \frac{\sin(5t)}{5^2} - \frac{\sin(7t)}{7^2} \pm \dots \right)$$

$$(2) \quad f(t) = \begin{cases} +1 & t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ -1 & t \in (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \end{cases}, \quad f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos(t)}{1} - \frac{\cos(3t)}{3} + \frac{\cos(5t)}{5} - \frac{\cos(7t)}{7^2} \pm \dots \right)$$

Dans l'exemple 2 nous avons une place de saut, donc nous écrivons " \sim ".

4.2.4 Séries de sinus et cosinus

1. (a) **Fonctions paires:** $f(t) = f(-t)$

Ici on obtient:

$$\begin{aligned} \pi \cdot b_k &= \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt \stackrel{t' \equiv -t}{=} (-1) \cdot \int_{t=-\pi}^{t=\pi} \underbrace{f(-t')}_{=f(t')} \cdot \underbrace{\sin(k(-t'))}_{=-\sin(kt')} dt' \\ &= \int_{\pi}^{-\pi} f(t') \cdot \sin(k(t')) dt' = - \int_{-\pi}^{\pi} f(t') \cdot \sin(k(t')) dt' \stackrel{t' \equiv t}{=} - \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(k(t)) dt = -\pi \cdot b_k \\ &\Rightarrow \pi \cdot b_k = -\pi \cdot b_k \Rightarrow \forall_k : b_k = 0 \Rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt) \end{aligned}$$

2. (b) **Fonctions impaires:** $f(t) = -f(-t)$

Ici un calcul analogue comme dans (a) nous montre: $\forall_k : a_k = 0 \Rightarrow \tilde{f}(t) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$

Définition: $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin(kt)$... s'appelle **série de sinus**.

$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kt)$... s'appelle **série de cosinus**.

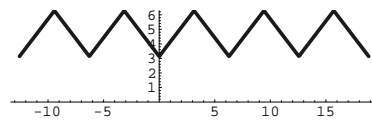
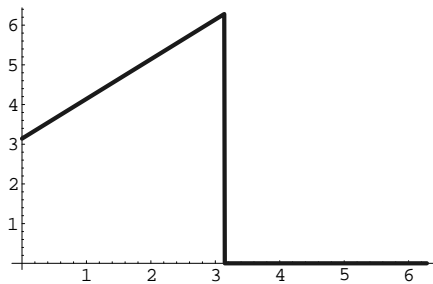
Corollaire:

Hyp.:On peut développer $f(t)$ en une série de Fourier $\tilde{f}(t)$.Thè.:

- (1) $f(t)$ paire
 $\Rightarrow \tilde{f}(t)$ Série de cosinus
- (2) $f(t)$ impaire
 $\Rightarrow \tilde{f}(t)$ Série de sinus

Beispiele: Exemples:

La fonction $f(t) = t + \pi$ mentionnée ci-dessous doit être représentée sur $[0, \pi]$ par une série de cosinus. Pour cela nous élargissons la fonction à une fonction paire qui est périodique avec 2π et définie sur \mathbb{R} . Ensuite nous développons cette fonction en une série de Fourier \leadsto série de cosinus.



$$\tilde{f}(t) = \frac{3\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos((2k-1)t)$$

Application: Développement de signaux sur des intervalles fins dans des séries de Fourier simples, c.-à.-d. des séries de sinus-ou cosinus. Alors la transmission de signaux se réduit à la transmission d'une suite de coefficients de Fourier qu'on interrompt plus tôt ou plus tard selon l'erreur risquée.

4.2.5 Formules d'Euler, période T

Soit $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$

Pour les coefficients il vaut donc:

Règle:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_c^{c+T} f(t) dt$$

$$a_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \cos(\omega k t) dt$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_c^{c+T} f(t) \cdot \sin(\omega k t) dt$$

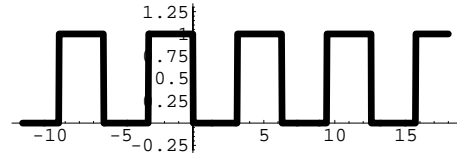
4.3 Analyse harmonique

4.3.1 Exemples

Exemple 1:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & 0 \leq t < \pi \\ 1 & \pi \leq t < 2\pi \end{cases}$$

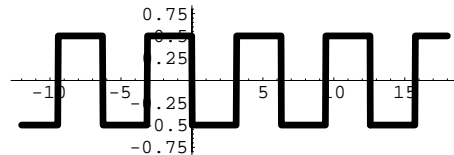
$$\Rightarrow T = 2\pi$$



$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) dt = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

Soit $f(t) = f_1(t) + 0.5$
 $\Rightarrow f_1(t) = f(t) - 0.5$

$\leadsto f_1(t), f_1(t) \cdot \cos(kt)$ impaire



$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \cos(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f_1(t) + 0.5) \cdot \cos(kt) dt = \underbrace{\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f_1(t) \cdot \cos(kt) dt}_{=0} + \frac{1}{\pi} \cdot 0.5 \cdot \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos(kt) dt}_{=0} = 0$$

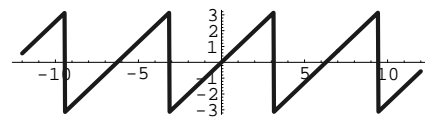
$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin(kt) dt = -\frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{k} \cdot \cos(kt) \Big|_{\pi}^{2\pi} = \frac{1}{k\pi} \cdot (\cos(k\pi) - \cos(2k\pi)) = \begin{cases} 0 & k = 2n \\ -\frac{2}{k\pi} & k = 2n - 1 \end{cases}$$

\leadsto Série de sinus: $f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\sin(t)}{1} + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \dots \right)$

Exemple 2:

$f(t) = t$ pour $t \in (-\pi, \pi]$, $T = 2\pi$

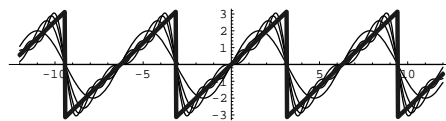
$\leadsto f$ impaire (hormis les places de saut)



$$\Rightarrow a_n = 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t \cdot \sin(kt) dt = \frac{1}{\pi} \left(-\frac{1}{k} t \cos(kt) \right) \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{-1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(kt) dt = -\frac{1}{k\pi} (\pi \cdot (-1)^k) - (-\pi)(-1)^k = -\frac{1}{k\pi} \pi \cdot (-1)^k \cdot 2 = \frac{2(-1)^{k+1}}{k}$$

$$\tilde{f}(t) = 2(\sin(t) - \frac{1}{2}\sin(2t) + \frac{1}{3}\sin(3t) - \dots)$$



Une conséquence pour calculer π :

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) (= t|_{t=\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2}) = 2\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{1}{2}\sin\left(2\frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{3}\sin\left(3\frac{\pi}{2}\right) - \dots\right) = 2\left(1 - \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{4}\cdot 0 + \frac{1}{5}\cdot(+1) - \dots\right)$$

Formule:
$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots\right)$$

Remarque:

La convergence de cette série pour π n'est pas particulièrement bonne. Nous trouverons plus tard d'autres séries de Fourier pour π qui convergent mieux.

Exemple 3:

$$f_1(x) = |x|, \quad x \in [-\pi, \pi), \quad T = 2\pi$$

Selon formules d'Euler ou tableau

$$\leadsto \tilde{f}_1(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos(x) + \frac{\cos(3x)}{3^2} + \frac{\cos(5x)}{5^2} + \dots \right)$$

On cherche maintenant la série de Fourier de la fonction apparentée suivante:

$$f_2(x) = x^2, \quad x \in [-\pi, \pi), \quad T = 2\pi$$

Il n'est pas possible de trouver la série de f_2 par intégration terme par terme de la série de Fourier de f_1 , car ces séries sont paires toutes les deux. L'intégration, par contre, d'une fonction paire (série de cosinus) fait une série de sinus. Mais il est possible d'obtenir le résultat en utilisant ce qu'on a trouvé dans l'exemple 2. Là, on a une fonction impaire utilisable:

$$\int x \, dx = \frac{x^2}{2} + C_0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = \int x \, dx - C_0 = \int x \, dx + C \quad \text{Voir ex. 2:}$$

$$\leadsto a_k \cos(kx) = 2 \cdot \int -(-1)^k \cdot 2 \cdot \frac{1}{k} \sin(kx) \, dx + C_k = (-1)^k \cdot 4 \cdot \frac{1}{k^2} \cos(kx) + C_k$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_2(x) = -\frac{4 \cdot \cos(1x)}{1^2} + \frac{4 \cdot \cos(2x)}{2^2} - \frac{4 \cdot \cos(3x)}{3^2} + \frac{4 \cdot \cos(4x)}{4^2} - \dots + C$$

$$\Rightarrow \frac{a_0}{2} = C, \quad a_1 = -\frac{4}{1^2}, \quad a_2 = +\frac{4}{2^2}, \quad a_3 = -\frac{4}{3^2}, \quad a_4 = +\frac{4}{4^2} \dots$$

Il faut calculer $C = \frac{a_0}{2}$ de façon spéciale:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{2}{3} \cdot \pi^3 = \frac{\pi^2}{3} \Rightarrow f_2(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos(1x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} + \dots \right)$$

Remarque:

$$x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos(1 \cdot 0)}{1^2} - \frac{\cos(2 \cdot 0)}{2^2} + \frac{\cos(3 \cdot 0)}{3^2} - \frac{\cos(4 \cdot 0)}{4^2} + \dots \right) = \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)$$

Formule:
$$\pi = \sqrt{12 \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots \right)}$$

4.3.2 Combinaisons linéaires

Les séries convergentes de façon uniforme peuvent s'additionner terme par terme etc., comme nous savons. Par conséquent il vaut:

Théorème: Hyp.: $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

f et g possèdent des séries de Fourier convergentes de façon uniforme:

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$g(t) \sim \tilde{g}(t) = \frac{a_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^* \cos(kt) + b_k^* \sin(kt))$$

$$\lambda f(t) + \mu g(t) \sim \frac{A_0^*}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k^* \cos(kt) + B_k^* \sin(kt))$$

Thè.:

$$\begin{aligned} A_k &= \lambda a_k + \mu a_k^* & k = 0, 1, 2, \dots \\ B_k &= \lambda b_k + \mu b_k^* & k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Application: Soit $T = 2\pi$

\leadsto Maintenant, à l'aide de ce théorème, on peut calculer la série de $f(t) = t^2 + t$ des séries de $f_1(t) = t$ et $f_2(t) = t^2$ par l'addition terme par terme.

Dans ce cadre on tient compte de:

Si une série de Fourier converge sur un intervalle fermé, alors la série converge de façon absolue.

Exemple: Séries de $1, t, t^2, \dots, t^n, t \in [-\pi, \pi], t = 2\pi$

\leadsto Série de $1 + t + t^2 + \dots + t^n = \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}, t \in [-\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon].$

4.3.3 Equation de Parseval

4.3.4 La formule

Dans ce qui suit, les séries soient convergentes de façon absolue et régulière. Avec de telles séries, comme

nous savons maintenant on peut pratiquer l'arithmétique comme avec les séries finies.

Nous utilisons (relations d'orthogonalité):

$$\int_0^T \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 dt = \left(\frac{a_0}{2}\right)^2 \cdot T, \quad \int_0^T \cos^2(k\omega t) dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \sin^2(k\omega t) dt = \frac{T}{2}, \quad \int_0^T \sin(k_1\omega t) \cdot \sin(k_2\omega t) dt = 0, \\ \int_0^T \sin(k_1\omega t) \cdot \cos(k_2\omega t) dt = 0, \quad \dots$$

Par conséquent on obtient:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{a_0}{2} + \sum_0^\infty (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))\right)^2 dt = \frac{1}{T} \left(T \cdot \frac{a_0^2}{4} + \frac{T}{2} (a_1^2 + b_1^2) + \frac{T}{2} (a_2^2 + b_2^2) + \dots\right)$$

Car en faisant l'intégrale, seulement les termes suivants fournissent une contribution:

$$\left(\frac{a_0}{2}\right)^2, \quad (a_k \cos(\omega k t))^2, \quad (b_k \sin(\omega k t))^2 \quad \rightsquigarrow \quad \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$$

Pour que cette équation soit valable, la somme $\sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$ doit être finie.

Théorème:

Equation de Parseval

Hyp.:

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_0^\infty (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$\sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2) \quad \text{finie}$$

Thè.:

$$\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^\infty (a_k^2 + b_k^2)$$

4.3.5 Application

On trouve souvent des intégrales de forme $\frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt$, s'il s'agit d'énergie.

P.ex. $\bar{E}_{kin} = \frac{1}{T} \cdot m \cdot \int_0^T v(t)^2 dt$ oder ou

$$P(t) = U(t) \cdot I(t) = R \cdot I^2(t) \quad (U = R \cdot I), \quad W = \int_{t_1}^{t_2} P(t) dt$$

$$\rightsquigarrow W = \int_0^T P(t) dt = R \cdot \int_0^T I^2(t) dt, \quad \bar{P} = \frac{1}{T} \cdot R \cdot \int_0^T I^2(t) dt$$

La série de Fourier soit donnée par:

$$I(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$$

$$\Rightarrow \bar{P} = \frac{W}{T} = \frac{1}{T} \cdot R \cdot (T \cdot (\frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2))) = R \cdot (\frac{a_0^2}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2))$$

$$\text{En outre: } U_{eff} = \left(\frac{1}{T} \cdot \int_0^T U(t)^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = \dots, \quad I_{eff} = \dots$$

Exemple:

$$f_2(x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi], \quad T = 2\pi, \quad \Rightarrow f_2(x) \sim \frac{\pi^2}{3} - 4 \left(\frac{\cos(1x)}{1^2} - \frac{\cos(2x)}{2^2} + \frac{\cos(3x)}{3^2} - \frac{\cos(4x)}{4^2} + \dots \right)$$

$$\rightsquigarrow \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f_2^2(x) dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} x^4 dx = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{5} \cdot \pi^5 \cdot 2 = \frac{\pi^4}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{a_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\pi^4}{5} = \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4}, \quad \frac{\pi^4}{5} - \left(\frac{\pi^2}{3}\right)^2 = \frac{4\pi^4}{45} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4^2}{k^4} = 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \Rightarrow \pi = \sqrt[4]{\frac{8 \cdot 45}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}}$$

Formule:

$$\pi = \sqrt[4]{90 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}} \approx \sqrt[4]{90 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^4}}$$

\rightsquigarrow

P.ex. pour $n = 100$ on a 7 places exactes:

$$\pi \approx \underline{3.141592654}, \quad \pi_{10} \approx \underline{3.141592415}, \quad n = 100$$

4.4 Représentation complexe de séries de Fourier

4.4.1 Coefficients de Fourier complexes

$$\text{Soit } \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{Utiliser: } \cos(\omega kt) = \frac{e^{i\omega kt} + e^{-i\omega kt}}{2}, \quad \sin(\omega kt) = \frac{e^{i\omega kt} - e^{-i\omega kt}}{2i} = \frac{-i e^{i\omega kt} + i e^{-i\omega kt}}{2}$$

$$\rightsquigarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega kt) + b_k \sin(\omega kt)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t),$$

$$q_k(t) = a_k \cdot \frac{e^{i\omega k t} + e^{-i\omega k t}}{2} + b_k \cdot \frac{-i e^{i\omega k t} + i e^{-i\omega k t}}{2} = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) e^{i\omega k t} + \frac{1}{2} (a_k + i b_k) e^{-i\omega k t} \\ := c_k \cdot e^{i\omega k t} + \bar{c}_k \cdot e^{-i\omega k t}$$

Pour simplifier nous définissons:

Définition:

$$c_{-k} := \bar{c}_k, \quad c_0 = \frac{a_0}{2}$$

\rightsquigarrow coefficients de Fourier complexes

$$\rightsquigarrow \tilde{f}(t) \quad \text{Ecrit de façon complexe: } \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega k t}$$

4.4.2 Calculer les coefficients

$$c_k = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T f(t) (\cos(\omega k t) - i \sin(\omega k t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega k t} dt$$

$$c_{-k} = \bar{c}_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-(-i\omega k t)} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega (-k)t} dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt = \frac{2}{T} \cdot \frac{1}{2} \int_0^T f(t) e^{-i\omega \cdot 0 \cdot t} dt$$

C'est pourquoi pour tous les k on a la formule:

Formule:
$$c_k = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-i\omega k t} dt$$

Conséquence:

$$|c_k|^2 = c_k \cdot \bar{c}_k = \frac{1}{2} (a_k - i b_k) \cdot \frac{1}{2} (a_k + i b_k) = \frac{1}{4} (a_k^2 + b_k^2) := \frac{A_k^2}{4} \Rightarrow A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot |c_k|$$

Par l'orthographe complexe, les séries de Fourier gagnent de clarté. La représentation devient plus compacte.

P.ex. l'équation de Parseval écrite de manière complexe a la forme suivante:

$$|c_k|^2 = \frac{A_k^2}{4} = \frac{1}{4} (a_k^2 + b_k^2) \Rightarrow \frac{1}{T} \int_0^T f(t)^2 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega k t} \right)^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2$$

4.4.3

Donné:

$f(t)$, Intervalle fondamental $I = [a, b]$, période $T = b - a$.

Exemple 1: $f(t) = t$, $I = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, $T = 1$:

Programme en Mathematica:

```
<< Calculus`FourierTransform`;  
f[t_] := t;  
FourierTrigSeries[f[t], t, 10]
```

Output:

$$\frac{\sin(2\pi t)}{\pi} - \frac{\sin(4\pi t)}{2\pi} + \frac{\sin(6\pi t)}{3\pi} - \frac{\sin(8\pi t)}{4\pi} + \frac{\sin(10\pi t)}{5\pi} - \frac{\sin(12\pi t)}{6\pi} + \frac{\sin(14\pi t)}{7\pi} - \frac{\sin(16\pi t)}{8\pi} + \frac{\sin(18\pi t)}{9\pi} - \frac{\sin(20\pi t)}{10\pi}$$

Programme en Mathematica:

```
FourierSinCoefficient[f[t], t, 10]
```

Output:

$$-\frac{1}{10\pi}$$

Programme en Mathematica:

```
FourierCosCoefficient[f[t], t, 10]
```

Output:

$$0$$

Écrit de façon complexe:

Programme en Mathematica:

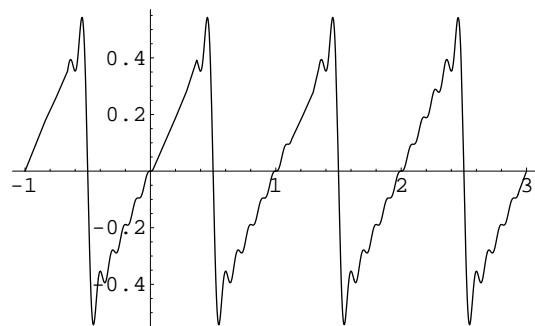
```
FourierSeries[f[t], t, 10]
```

Output:

$$\frac{ie^{-2i\pi t}}{2\pi} - \frac{ie^{2i\pi t}}{2\pi} - \frac{ie^{-4i\pi t}}{4\pi} + \frac{ie^{4i\pi t}}{4\pi} + \frac{ie^{-6i\pi t}}{6\pi} - \frac{ie^{6i\pi t}}{6\pi} - \frac{ie^{-8i\pi t}}{8\pi} + \frac{ie^{8i\pi t}}{8\pi} + \frac{ie^{-10i\pi t}}{10\pi} - \frac{ie^{10i\pi t}}{10\pi} - \frac{ie^{-12i\pi t}}{12\pi} + \frac{ie^{12i\pi t}}{12\pi} + \frac{ie^{-14i\pi t}}{14\pi} - \frac{ie^{14i\pi t}}{14\pi} - \frac{ie^{-16i\pi t}}{16\pi} + \frac{ie^{16i\pi t}}{16\pi} + \frac{ie^{-18i\pi t}}{18\pi} - \frac{ie^{18i\pi t}}{18\pi} - \frac{ie^{-20i\pi t}}{20\pi} + \frac{ie^{20i\pi t}}{20\pi}$$

Programme en Mathematica:

```
| Plot[Evaluate[FourierTrigSeries[f[t], t, 10]], {t, -1, 3}];
```



Image

Exemple 2: $f(t) = t$, $I = [-\pi, \pi]$, $T = 2\pi$:

Programme en Mathematica:

```
| << Calculus'FourierTransform';  
| f[t_] := t;  
| f1[u_] = 2Pi FourierTrigSeries[f[t], t, 10] /. t -> u/(2Pi) // Expand;  
| Print[f1[u]];
```

Output:

```
| 2 sin(u) - sin(2u) + 2/3 sin(3u) - 1/2 sin(4u) + 2/5 sin(5u) - 1/3 sin(6u) + 2/7 sin(7u) - 1/4 sin(8u) +  
| 2/9 sin(9u) - 1/5 sin(10u)
```

Programme en Mathematica:

```
| 2Pi(FourierSeries[f[t], t, 10] /. t -> u/(2Pi)) // Expand
```

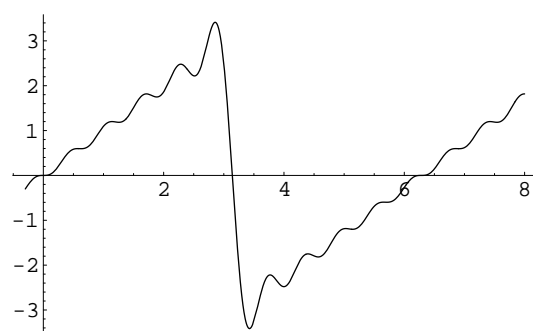
Ecrit de façon complexe:

Output:

```
| ie^{-iu} - ie^{iu} - 1/2 ie^{-2iu} + 1/2 ie^{2iu} + 1/3 ie^{-3iu} - 1/3 ie^{3iu} - 1/4 ie^{-4iu} + 1/4 ie^{4iu} + 1/5 ie^{-5iu} - 1/5 ie^{5iu} -  
| 1/6 ie^{-6iu} + 1/6 ie^{6iu} + 1/7 ie^{-7iu} - 1/7 ie^{7iu} - 1/8 ie^{-8iu} + 1/8 ie^{8iu} + 1/9 ie^{-9iu} - 1/9 ie^{9iu} - 1/10 ie^{-10iu} + 1/10 ie^{10iu}
```

Programme en Mathematica:

```
| Plot[f1[u], {u, -0.3, 8}];
```



Image

4.4.4 Spectre d'amplitude, spectre de phase

Les notions **spectre d'amplitude** et **spectre de phase** apparaissent avec les séries de Fourier dans la représentation complexe. Pour obtenir un accès à cette chose, nous regardons les dits **diagrammes vectoriels** (diagrammes de Fresnel):

Idée:

Considérons l'application bijective:

$$\Phi : \underbrace{a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t)}_{\in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}} \longmapsto z_k = \underbrace{a_k \cos(\omega k t) + i b_k \sin(\omega k t)}_{\in \mathbb{C}, t \in \mathbb{R}}$$

Définition:

$a_k \cos(\omega k t) + i b_k \sin(\omega k t)$ s'appelle **aiguille** (vecteur)

D'autre part nous pouvons interpréter $(a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$ comme vecteur sur la base suivante:

$$B = \{\cos(\omega k t), \sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\} := \{\cos(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\} \cup \{\sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$$

Correspondamment une aiguille est un vecteur sur la base B_i : $B_i = \{\cos(\omega k t), \underline{i} \sin(\omega k t) \mid k \in \mathbb{N}_0\}$

De même $\tilde{f}(t)$ devient, comme somme, un vecteur sur B , qui est interprété par l'application Φ comme aiguille correspondante ou un vecteur sur B_i .

On a ici par conséquent un isomorphisme d'espaces vectoriels, c.-à.-d. l'information concernant $f(t)$ ne change pas du côté de l'image. On peut travailler ainsi sans problèmes avec les aiguilles.

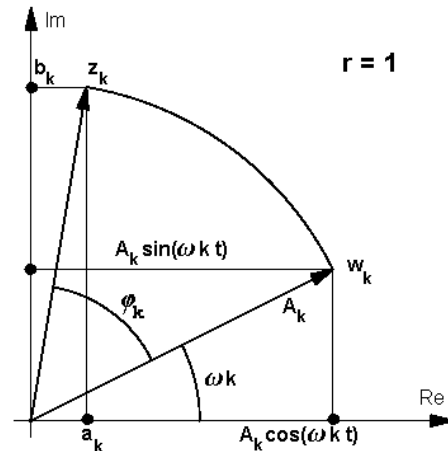
Considérer:

$$w_k := A_k \cdot e^{i \omega k t} \mapsto z_k = r (a_k + i b_k)$$

$$w_k = A_k \cdot e^{i \omega k t} = A_k \cos(\omega k t) + i A_k \sin(\omega k t)$$

$$\begin{aligned} z_k &= r (a_k + i b_k) \\ &= A_k (\cos(\omega k t + \varphi_k) + i \sin(\omega k t + \varphi_k)) \\ &= A_k \cdot e^{i(\omega k t + \varphi_k)} = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{i(\omega k t + \varphi_k)}, \\ A_k &= r_k = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} = 2 \cdot |c_k| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_k &= r (a_k + i b_k) = r \sqrt{a_k^2 + b_k^2} e^{i(\omega k t + \varphi_k)} \\ &= A_k e^{i \omega k t} e^{i \varphi_k} = w_k e^{i \varphi_k}, \quad w_k = z_k \cdot e^{-i \varphi_k} \end{aligned}$$



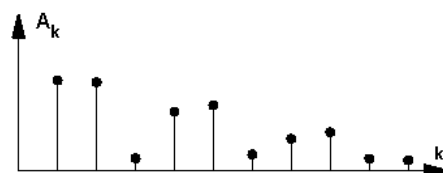
Conséquence: On peut décrire z_k par (a_k, b_k) aussi bien que par (A_k, φ_k, t) .

Application: Dans l'électrophysique, le courant et la tension sont souvent représentés de manière avantageuse par des aiguilles z_k (fonction complexes). Si on additionne de telles tensions et des courants, on obtient ainsi des séries de Fourier complexes de la forme suivante ($r = 1$):

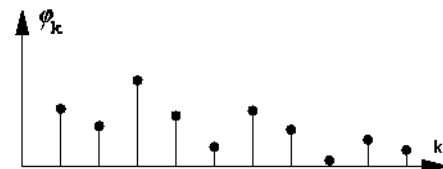
$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= \frac{a_0}{2} + i \frac{b_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + i b_k) e^{i \omega k t} = \frac{z_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} z_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} A_k e^{i(\omega k t + \varphi_k)} = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cdot e^{i \varphi_k}) e^{i \omega k t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (w_k) e^{i \omega k t} \end{aligned}$$

Ici, nous utilisons les notions suivantes:

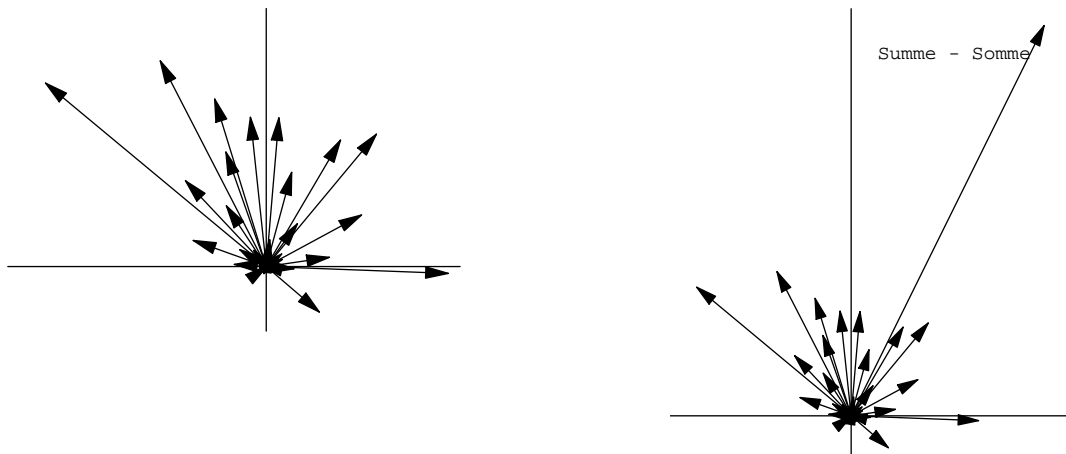
A_k s'appelle **amplitude**, $\{A_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ s'appelle **spectre d'amplitude**.



φ_k s'appelle **phase**, $\{\varphi_k \mid k \in \mathbb{N}_0\}$ s'appelle **spectre de phase**.



Exemple:



4.4.5 Interprétation réelle des spectres

Soit $\tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(\omega k t) + b_k \sin(\omega k t))$

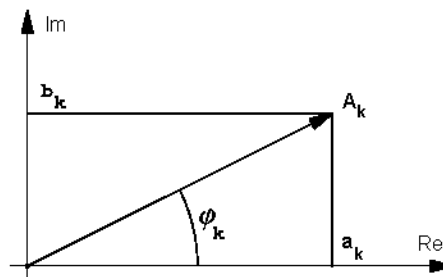
Pour $t = 0$ on obtient la situation suivante:

$$a_k + i b_k = A_k \underbrace{e^{i \omega k t}}_{e^0=1} \cdot \underbrace{e^{i \varphi_k}}_{\cos(\varphi_k) + i \sin(\varphi_k)}$$

Soit :

$$\begin{aligned} a_k &:= A_k \cos(\varphi_k) \\ b_k &:= A_k \sin(\varphi_k) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_k &= \sqrt{a_k^2 + b_k^2} \\ A_0 &= \frac{a_0}{2} \end{aligned}$$

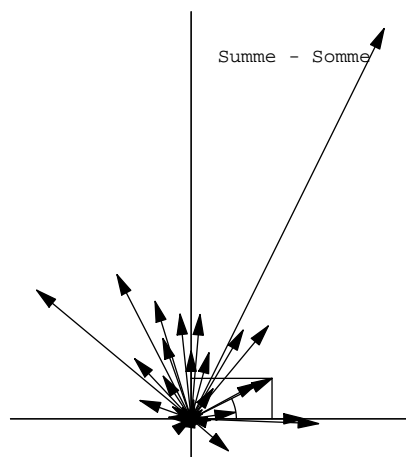


$\{(a_k, b_k)\}$ cartes. $\mapsto \{(A_k, \varphi_k)\}$ polaire

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \tilde{f}(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + A_k \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) \\ &= A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k (\cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos(\omega k t \underbrace{-\varphi_k}_{+\varphi_k^-}) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \tilde{f}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos(\varphi_k) \cos(\omega k t) + A_k \sin(\varphi_k) \sin(\omega k t)) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(\varphi_k^- + \omega k t)$$

Ici nous avons le **spectre des coefficients** $\{a_0, a_k, b_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ ainsi que les **spectres des amplitudes et des phases** $\{A_k, \varphi_k \mid k \in \mathbb{N}\}$.



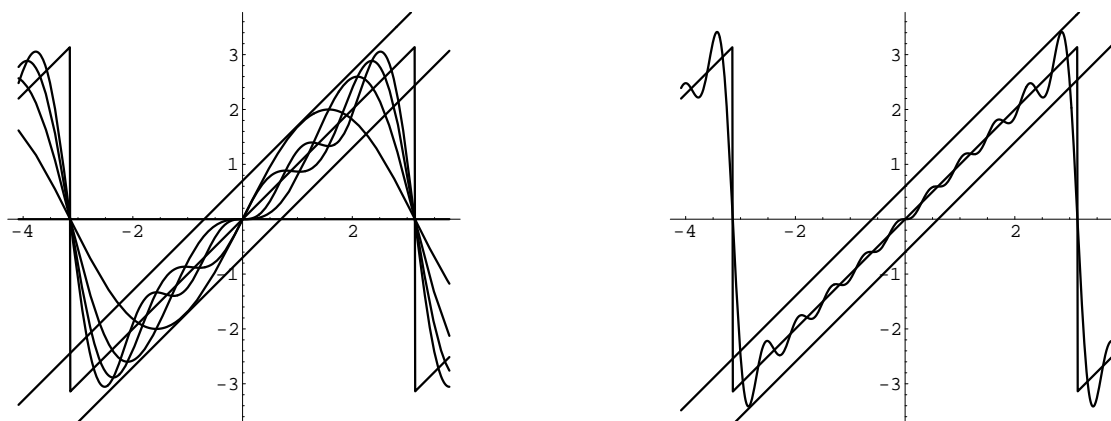
Ici on a donc une sorte de représentation alternative de la série de Fourier dans le réel comme série de sinus avec un déplacement de phase dépendant de l'index.

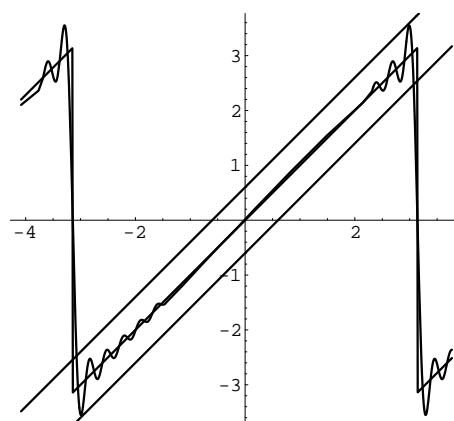
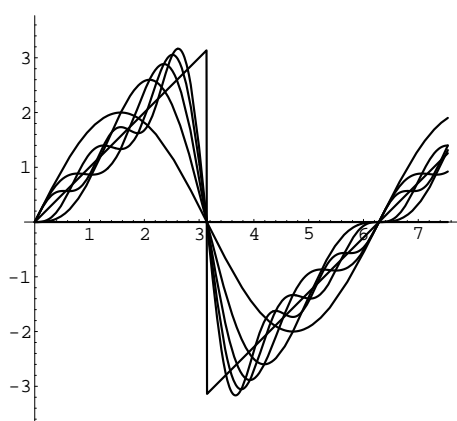
4.4.6 Le phénomène de Gibbs

Nous considérons la fonction

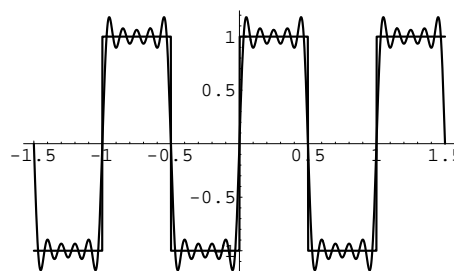
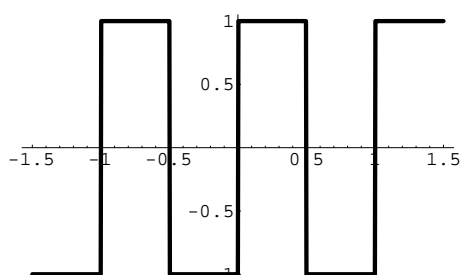
$$f(t) = t, \quad t \in [-\pi, \pi], \quad f(t + 2n\pi) = f(t), \quad n \in \mathbb{Z}$$

À la place de saut, on observe le phénomène suivant:

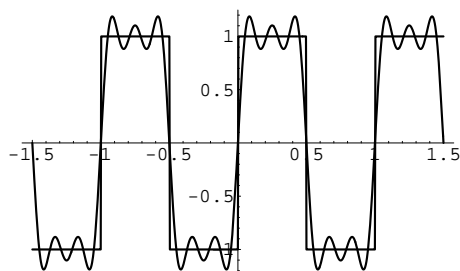




Si on approxime une fonction avec les places de saut, par exemple une fonction de dent de scie, par une série de Fourier, on constate une surélévation de marche aux places de saut, dit "overshoot" (dans le dernier exemple env. 18%). Cette observation s'appelle le **phénomène de Gibbs**. Si une fonction par exemple décrit la tension électrique, il apparaît donc une tension un peu plus haute aux places en question, à laquelle il faudrait penser...



...



4.4.7 Exemples

1. Applications pour la transmission de signaux.
2. Applications pour résoudre des équations différentielles, voir p.ex. page 224, équation de propagation de la chaleur.
3. Etc.

4.5 Transformation de Fourier discrète

4.5.1 DFT et synthèse de Fourier

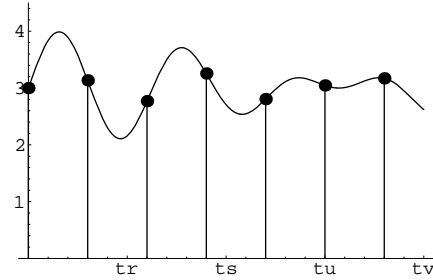
Théorie

Dans la pratique, on a souvent des séries de mesure $\{(t_k, y_k) \mid k \in \mathbb{N}\}$. On cherche une fonction périodique aussi bonne que possible avec une période connue qui passe par les points (t_k, y_k) .

Soient $[a, b] = [0, 2\pi]$:
 $T = 2\pi, a = 0 = t_0, b = 2\pi = t_n$

(On peut arranger cela ainsi.)

Soit $t_{k+1} - t_k = \frac{2\pi}{n} = h \forall k$
 \leadsto
 Mesurages à des distances égales.



Utiliser la règle du trapèze (intégration numérique). D'après cette règle il vaut, comme nous savons:

$$\int_a^b g(t) dt = \frac{h}{2} (g(a)+g(b)) + h \sum_{k=1}^{n-1} g(a+k \cdot h) + R = \frac{h}{2} (g(t_0)+g(t_n)) + h \sum_{k=1}^{n-1} g(t_k) + R, \quad |R| \leq \frac{h^2}{8} \int_a^b |g''(t)| dt$$

Pour pouvoir appliquer cette formule, il suffit de connaître les points de mesure $\{(t_k, y_k = f(t_k))\}$. Alors nous pouvons approcher numériquement le coefficients de Fourier à l'aide des points de mesure:

$$c_s = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cdot e^{-i s t} dt \approx \tilde{c}_s := \frac{h}{2\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot e^{-i s \frac{2\pi k}{n}} = \frac{2\pi}{n \cdot 2\pi} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i s \frac{2\pi k}{n}} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i s t_k}$$

Il était $f(a) = f(t_0)$ (périodicité). $f(b) = f(a)$ a été incorporé.

De manière analogue on déduit les formules pour les coefficients de Fourier réels a_k et b_k . Pour cela il faut remplacer la fonction exponentielle par cos et sin.

Si la durée de période est T au lieu de 2π , on obtient la formule suivante:

$$c_s \approx \tilde{c}_s := \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} f(t_k) \cdot e^{-i \cdot s \cdot \frac{2\pi}{T} \cdot t_k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot e^{-i \cdot s \cdot \omega \cdot t_k}, \quad t_k = \frac{k \cdot T}{n}$$

Pour simplifier le calcul, nous interprétons les coefficients de Fourier ainsi que les valeurs indiquées comme vecteurs dans \mathbb{C}^n :

$$\vec{y}^{(n)} := \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} := \vec{f}^{(n)} := \begin{pmatrix} f(t_0) \\ \vdots \\ f(t_{n-1}) \end{pmatrix}, \quad \vec{\tilde{c}}^{(n)} := \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad s = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Soit en outre: $r := e^{-i \frac{2\pi}{n}}$ $\Rightarrow \tilde{c}_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot r^{sk}$, $\tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\omega k t} \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \tilde{c}_k e^{i\omega k t}$

On voit que le vecteur $\vec{\tilde{c}}^{(n)}$ provient de $\vec{y}^{(n)}$ par la multiplication avec la matrice suivante:

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{\tilde{c}}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)}$$

Définition: $\mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ avec $\vec{y}^{(n)} \mapsto \vec{\tilde{c}}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)}$ s'appelle **transformation de Fourier discrète**

Symbole: $DFT(\vec{y}^{(n)}) := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)} = \sqrt{n} \cdot \vec{\tilde{c}}^{(n)}$, $DFT^{-1}(\vec{\tilde{c}}^{(n)}) = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \vec{y}^{(n)}$

Qualités:

1. $W^{-1} = \frac{1}{n} \cdot \bar{W}$, $\sqrt{n} \cdot W^{-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \bar{W}$, \bar{W} *konj.*
 $n \cdot W^{-1} = \bar{W}$, $(\bar{W})^{-1} = \frac{1}{n} \cdot W$
2. $\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W$ est unitaire $\leadsto |\det(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot W)| = 1$
3. $\vec{y}^{(n)} = \bar{W} \cdot \vec{\tilde{c}}^{(n)}$

Quant à la preuve:

Ad (1) On peut traiter (1) par calcul direct.

(Il est utile d'avoir des connaissances sur les racines d'unité complexes $r := e^{-i \frac{2\pi}{n}}$.)

Ad (2) $1 = \det(E) = \det(W \cdot W^{-1}) = \det\left(\frac{W \cdot \bar{W}}{n}\right) = \det\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right) \cdot \det\left(\frac{\bar{W}}{\sqrt{n}}\right) = \det\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right) \cdot \overline{\det\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right)} = |\det\left(\frac{W}{\sqrt{n}}\right)|^2$

Ad (3) $\vec{\tilde{c}}^{(n)} = \frac{1}{n} \cdot W \cdot \vec{y}^{(n)} \Rightarrow n \cdot \vec{\tilde{c}}^{(n)} = W \cdot \vec{y}^{(n)} \Rightarrow \vec{y}^{(n)} = n \cdot W^{-1} \cdot \vec{\tilde{c}}^{(n)} = \frac{n}{n} \cdot \bar{W} \cdot \vec{\tilde{c}}^{(n)} = \bar{W} \cdot \vec{\tilde{c}}^{(n)}$

Conclusion:

Maintenant, à l'aide des c_s on peut construire une série de Fourier dont la courbe passe par des points qui sont définis par $\vec{y}^{(n)}$. W a été construite en haut.

\leadsto **Formules:**

$$T = 2\pi, \quad \omega = 1, \quad \Delta t = \frac{2\pi}{n}, \quad r := e^{-i\frac{2\pi}{n}} = e^{-i\Delta t}, \quad W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix},$$

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & r & r^2 & \dots & r^{n-1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & r^{n-1} & \dots & \dots & r^{(n-1)^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r^{0\cdot 0} & r^{0\cdot 1} & r^{0\cdot 2} & \dots & r^{0\cdot(n-1)} \\ r^{1\cdot 0} & r^{1\cdot 1} & r^{1\cdot 2} & \dots & r^{1\cdot(n-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \vdots \\ r^{(n-1)\cdot 0} & r^{(n-1)\cdot 1} & \dots & \dots & r^{(n-1)\cdot(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$\vec{y}^{(n)} = \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-1} \end{pmatrix} = \bar{W} \cdot \vec{\tilde{c}}^{(n)}, \quad \vec{\tilde{c}}^{(n)} = \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \vdots \\ \tilde{c}_s \\ \vdots \\ \tilde{c}_{n-1} \end{pmatrix} = (\bar{W})^{-1} \cdot \vec{y}^{(n)} = \frac{1}{n} W \cdot \vec{y}^{(n)}, \quad \tilde{c}_s = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} y_k \cdot r^{s k}$$

$$\tilde{f}(t) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} c_s e^{i\omega s t} \approx \sum_{k=k_1}^{k_2} \tilde{c}_k e^{i\omega k t} = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{c}_k e^{i\omega k t} = \tilde{f}_{(\text{approx DFT})}(t).$$

Exemple:

(Voir problème 4:

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02.pdf

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02_Loes.pdf

http://rowicus.ch/Wir/ProblemsSolutBachelor/TM2Ana_0708_02_Loes.nb

Application

Nous connaissons une première application importante du problème mentionné des séries de mesure où il faut trouver une fonction périodique. Une autre application est **l'interpolation trigonométrique**, par exemple pour les plots. Ici on a donné un nombre de places de mesure. Pour évaluer les valeurs de fonction entre deux places de mesure, nous approximons $f(t)$ à l'aide de la DFT par polynômes trigonométriques. Ainsi on obtient des polynômes de Fourier aux coefficients $c_{-\frac{n}{2}+1}, \dots, c_0, \dots, c_{+\frac{n}{2}+1}$. A l'aide du polynôme trigonométrique, on peut alors calculer des valeurs intermédiaires qu'on a omis p.ex. pour épargner des données (restreindre le nombre de données).

À cause de la périodicité de f et de la formule pour \tilde{c}_s il vaut: $\tilde{c}_s = \tilde{c}_{s+n}$. Par conséquent les abords sont périodiques, abords \tilde{c} des coefficients en tant que fonction de l'index.

Problème:

Quand il s'agit de séries de mesure plus grandes, c.-à.-d. à grand n , la dépense des ressources de l'ordinateur devient énorme, ce qui joue un rôle pour les "transfers on line". Déjà pour le calcul de $\vec{c}^{(n)}$ seulement dans la partie $W \cdot \vec{y}^{(n)}$ il faut exécuter n^2 multiplications complexes. Par conséquent il vaut la peine de chercher un algorithme plus rapide. Pour $n = 2^m$ on y réussit par la **transformaiton de Fourier rapide, (FFT, Fast Fourier Transformation)**.

Trouver: Graphique à travers des points générés par $f(t)$.

$$f(t) = e^{\cos(t)} + \sin^2(t), \quad t \in [0, 2\pi]$$

Programme en Mathematica:

```
Remove["Global' *"]
f[t_] := E^Cos[t] + Sin[t]^2;
n1 = 8; n = 2 * n1; w = 2 Pi/n;
{x[k_], y[k_]} = {k 2 Pi/n, f[k 2 Pi/n]};
p[k_] := {x[k], y[k]};
Table[p[k] // N, {k, 0, n - 1}] // TableForm
```

Coordonnées:

Output:

x	y
0.0000000000000000	2.718281828459045
0.39269908169872414	2.6654907808137103
0.7853981633974483	2.5281149816474726
1.1780972450961724	2.3197671913503832
1.5707963267948966	2.0000000000000000
1.9634954084936207	1.5355821639438108
2.356194490192345	0.9930686913952398
2.748893571891069	0.5434225780502063
3.141592653589793	0.36787944117144233
3.5342917352885173	0.5434225780502061
3.9269908169872414	0.9930686913952398
4.319689898685965	1.5355821639438099
4.71238898038469	2.0000000000000000
5.105088062083414	2.3197671913503832
5.497787143782138	2.5281149816474726
5.890486225480862	2.6654907808137107

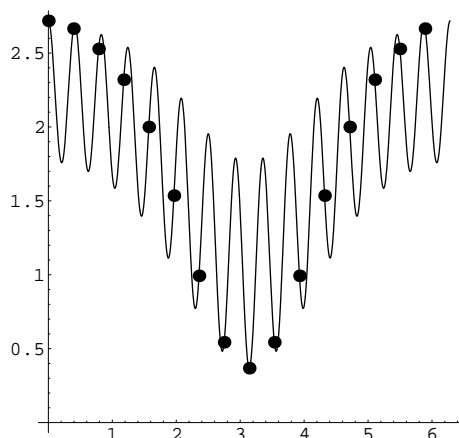
Graphiques:

Programme en Mathematica:

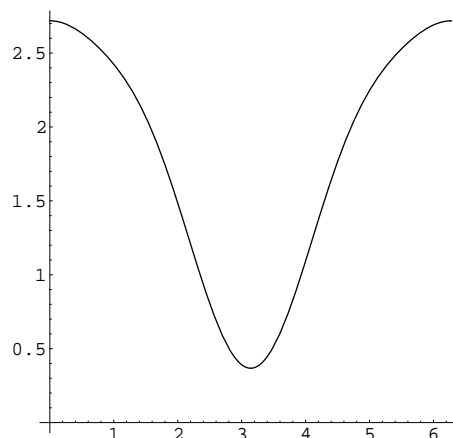
```

epi = Prepend[Map[Point, Table[p[k], {k, 0, n - 1}], PointSize[0.03]];
r = E^(-I 2 Pi/n);
c[s_] := 1/n Sum[y[k] r^(s k), {k, 0, n - 1}];
fS[t_] := Sum[c[k] E^(I k t), {k, 0, n - 1}];
fSsym[t_] := Sum[c[k] E^(I k t), {k, -n/2, n - 1 - n/2}];
Plot[Re[fS[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, Epilog -> epi,
  AspectRatio -> 1];
Plot[Re[fSsym[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, AspectRatio -> 1];
Plot[Im[fSsym[t]], {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50, AspectRatio -> 1];
Plot[{f[t], Re[fSsym[t]]}, {t, 0, 2Pi}, PlotPoints -> 50,
  Epilog -> epi, AspectRatio -> 1];

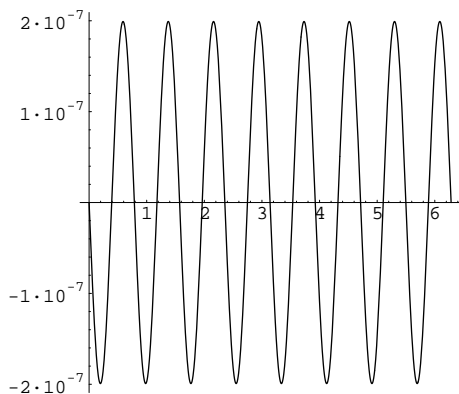
```



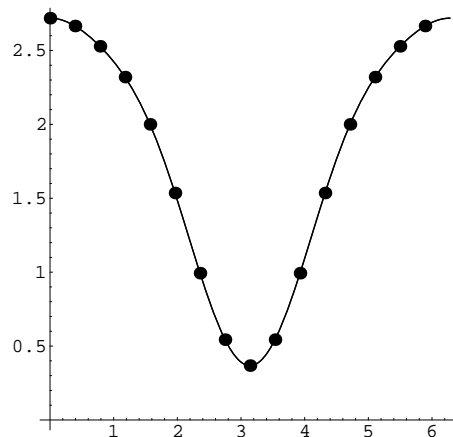
Indice de sommation $0 \leq k \leq n - 1$: Ne va pas bien.



Indice de sommation $-\frac{n}{2} \leq k \leq n - 1 - \frac{n}{2}$: Va mieux bien.



Sommation de la part imaginaire apparaissant (partie de l'erreur de l'approximation).



Graphique de la fonction originale, superposée de l'approximation et des points calculés (Ici l'écart n'est pas bien visible).

4.5.2 FFT

Nous voulons essayer d'acquérir l'idée du FFT à l'appui d'une situation spéciale.

$$\text{Soit } n = 2 \cdot p, \quad r = e^{-i \frac{2\pi}{n}} \Rightarrow r^n = e^{-i \frac{2\pi}{n} \cdot n} = e^{-i 2\pi} = 1 \Rightarrow r^p = r^{\frac{n}{2}} = r^{-i\pi} = -1$$

$$\text{Soit } \bar{\gamma}^{(n)} = W \cdot \bar{f}^{(n)} = W \cdot \bar{y}^{(n)}, \quad \bar{\gamma}^{(n)} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \vdots \\ \gamma_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}, \quad f_k = y_k, \quad r^p = -1, \quad \Rightarrow \bar{\gamma}^{(n)} = n \cdot \bar{c}^{(n)}$$

$$\begin{aligned} \leadsto \gamma_{2s} &= \sum_{k=0}^{n-1} r^{2sk} \cdot f_k = \sum_{k=0}^{p-1} r^{2sk} \cdot f_k + \underbrace{\sum_{k=p}^{n-1} r^{2sk} \cdot f_k}_{\sum_{k=0}^{p-1} r^{2s(k+p)} \cdot f_{k+p}} = \\ &= \sum_{k=0}^{p-1} (r^{2sk} \cdot f_k + \underbrace{r^{2s(p+k)}}_{r^{2sk} \cdot r^{2sp}} \cdot f_{k+p}) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^2)^{sk} (f_k + \underbrace{r^{2sp}}_{(r^p)^{2s} = ((-1)^2)^s = 1^s = 1} \cdot f_{p+k}) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^2)^{sk} (f_k + f_{p+k}) \end{aligned}$$

On a donc ici une DFT d'ordre p pour $(f_k + f_{p+k})$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

$$\text{Il vaut en outre: } \gamma_{2s+1} = \sum_{k=0}^{p-1} (r^{(2s+1)k} \cdot f_k + r^{(2s+1)(p+k)} \cdot f_{p+k}) = \sum_{k=0}^{p-1} (r^2)^{sk} (f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$$

On a de nouveau utilisé $r^p = -1$ à la fin.

C'est de nouveau une DFT de l'ordre $n = p$ pour $(f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$, $k = 0, 1, 2, \dots, p-1$.

Truc:

Nous avons donc décomposé la DFT de l'ordre $n = 2p$ en 2 DFT de l'ordre p . Au lieu d'avoir $n^2 = 4p^2$ multiplications on n'a que $p^2 + p^2 = 2p^2$ multiplications. Il s'ajoutent encore d'autres p additions et en plus aussi des multiplications, par exemple pour former $(f_k + f_{p+k}) \cdot r^k$. Par conséquent le gain croît au carré avec p , mais la perte seulement linéairement. Ainsi le gain est d'ordre supérieur.

Maintenant on obtient la FFT comme il suit:

Itération:

Si l'on a $n = 2p = 4p_1$, il y a p_1 qui remplace p d'en haut, et avec les deux DFT partielles décrites en haut on peut procéder encore une fois de la même façon. Si généralement $n = 2^m$, la DFT peut être divisée en 2^m parties.

Si $\mu(n)$ est le nombre des multiplications qui restent encore, il vaut d'après ce qu'on vient de dire:

$$\mu(2) = 0, \quad \mu(2p) = 2 \cdot \mu(p) + p \leadsto \mu(n) = \frac{n}{2} \cdot \ln\left(\frac{n}{2}\right) \Rightarrow \underbrace{\mu(n)}_{FFT} \ll \underbrace{\frac{n^2}{2}}_{DFT}$$

Exemple: Soit $n = 8$

$$\vec{\gamma}^{(8)} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_2 \\ \gamma_4 \\ \gamma_6 \\ \gamma_1 \\ \gamma_3 \\ \gamma_5 \\ \gamma_7 \end{pmatrix} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 1 & r^4 & 1 & r^4 & 1 & r^4 & 1 & r^4 \\ 1 & r^6 & r^4 & r^2 & 1 & r^6 & r^4 & r^2 \\ \hline 1 & r^2 & r^4 & r^6 & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 1 & r^3 & r^6 & r & r^4 & r^7 & r^2 & r^5 \\ 1 & r^5 & r^2 & r^7 & r^4 & r & r^6 & r^3 \\ 1 & r^7 & r^6 & r^5 & r^4 & r^3 & r^2 & r \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}$$

En plus on peut encore séparer $\tilde{W} = \tilde{W}_8$ comme il suit:

$$\tilde{W}_8 = \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^2 & r^4 & r^6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^4 & 1 & r^4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & r^6 & r^4 & r^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r^2 & r^4 & r^6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r^4 & 1 & r^4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & r^6 & r^4 & r^2 \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & r^4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r & 0 & 0 & 0 & r^5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 & 0 & 0 & r^6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^3 & 0 & 0 & 0 & r^7 \end{array} \right) =$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right) \cdot D_8 \rightsquigarrow \tilde{W}_8 \quad \text{est factorisé!}$$

$$\Rightarrow \vec{\gamma}^{(8)} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right) \cdot D_8 \cdot \vec{f}^{(8)} \quad \rightsquigarrow \quad \text{Soit } \vec{z}^{(8)} := D_8 \cdot \vec{f}^{(8)}$$

$$\rightsquigarrow \vec{z}^{(8)} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_7 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} z_0 &= f_0 + f_4 \\ z_1 &= f_1 + f_5 \\ &\vdots \\ z_3 &= f_3 + f_7 \\ z_4 &= (f_0 - f_4) \cdot r^0 \\ &\vdots \\ z_7 &= (f_3 - f_7) \cdot r^3 \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \Rightarrow \vec{\gamma}^{(8)} = \tilde{W}_8 \cdot \vec{f}^{(8)} = \underbrace{\left(\begin{array}{c|c} \tilde{W}_4 & 0 \\ \hline 0 & \tilde{W}_4 \end{array} \right)}_{=a} \cdot \underbrace{(D_8 \cdot \vec{f}^{(8)})}_{=b}$$

a:

La moitié des cellules contient des 0: Grande réduction du montant de la dépense.

b: $n = 8$ additions et $\frac{n}{2} = p = 4$ multiplications.

Itération:

Avec \tilde{W}_4 nous procédons de la même manière qu'avec \tilde{W}_8 .

4.6 Transformation de Fourier

4.6.1 Intégrale de Fourier

Idée

Soit $f(t)$ une fonction qui est développable dans une série de Fourier. Alors il vaut:

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k t} \cdot c_k = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_0^T f(\lambda) \cdot e^{-i\omega k \lambda} d\lambda = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot e^{-i\omega k \lambda} d\lambda$$

Problème:

Qu'est-ce qu'il faudrait faire maintenant si $f(t)$ n'est pas périodique?

Idée:

On laisse croître T de plus en plus. Finalement considérons $T \rightarrow \infty$:

$$\rightsquigarrow \left(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right) \rightarrow (-\infty, \infty) = \mathbb{R}.$$

$$\text{Alors pour } \omega \text{ il vaut: } \omega = \frac{2\pi}{T} \xrightarrow{T \rightarrow \infty} 0$$

\rightsquigarrow **Problème:**

Qu'est-ce qui se passe alors avec la formule pour $\tilde{f}(t)$?

$$\rightsquigarrow \text{ Soit } \Delta\Omega \text{ petit, } \omega = \frac{2\pi}{T} := \Delta\Omega,$$

et la série en question soit convergente de façon uniforme.

$$\begin{aligned} f(t) \sim \tilde{f}(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\omega k t} \cdot \frac{1}{T} \cdot \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot e^{-i\omega k \lambda} d\lambda \cdot \frac{2\pi}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2\pi}{T} k t} \cdot e^{-i\frac{2\pi}{T} k \lambda} \cdot \frac{2\pi}{T} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{i\Delta\Omega k t} \cdot e^{-i\Delta\Omega k \lambda} \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{i(t-\lambda) \cdot (k \cdot \Delta\Omega)}}_{:=g(k \cdot \Delta\Omega)} \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda \\ &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(\lambda) \cdot \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k \cdot \Delta\Omega) \cdot \Delta\Omega \right) d\lambda \quad \text{avec } \Omega := k \cdot \Delta\Omega \rightsquigarrow \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(k \cdot \Delta\Omega) \cdot \Delta\Omega \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) d\Omega \end{aligned}$$

Ici, nous avons interprété une somme infinie comme somme d'approximation de Riemann. Ainsi nous avons obtenu une intégrale impropre.

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow f(t) &\sim \tilde{f}(t) \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} g(\Omega) d\Omega \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i(t-\lambda)\cdot\Omega} d\Omega \right) d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{it\cdot\Omega} \cdot e^{-i\lambda\cdot\Omega} d\Omega \right) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda\cdot\Omega} d\lambda \right) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega := \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega \end{aligned}$$

Définition: $F(\Omega) := \hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda\cdot\Omega} d\lambda$ s'appelle **intégrale de Fourier** ou **transformée de Fourier** resp. **fonction spectrale** de f .

Remarque:

1. Conséquence: $f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega$

2.

Il y a des auteurs qui définissent la transformée de Fourier f différemment comme il suit:

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda\cdot\Omega} d\lambda$$

Alors il vaut: $f(t) \sim \tilde{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega$

Puis $\hat{f}(\Omega)$ et $f(t)$ ont une orthographe quasi symétrique.

3.

$\hat{f}(\Omega)$ est née des coefficients de Fourier et de $\Delta\Omega$, donc du spectre de $f(t)$, qui est devenu ici continue. Par conséquent nous utilisons les notions de "fonction spectrale" et "densité spectrale". Les valeurs Ω avec $\hat{f}(\Omega) \neq 0$ forment le spectre qui était discret pour les fonctions périodiques.

4.

On a par conséquent une **interprétation de $\hat{f}(\Omega)$** :

Il vaut: $\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot (\cos(t\cdot\Omega) + i \sin(t\cdot\Omega)) d\Omega$

Par conséquent $f(t)$ est représenté comme **superposition ininterrompue** d'oscillations avec la fréquence Ω et l'amplitude \hat{f} .

5. Les transformations de Fourier et leurs inverses correspondent formellement aux **transformations de Laplace** et à leurs inverses.

$$\hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda\cdot\Omega} d\lambda, \quad \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (\hat{f}(\Omega) \cdot e^{it\cdot\Omega}) d\Omega$$

6.

Afin que $\hat{f}(\Omega)$ existe, $f(t)$ für $|t| \rightarrow \infty$ doit aller suffisamment fortement vers 0.

Il vaut: $e^{-i\lambda\cdot\Omega} = \cos(\lambda\cdot\Omega) - i \sin(\lambda\cdot\Omega)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda\cdot\Omega} d\lambda \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot (\cos(\lambda\cdot\Omega) - i \sin(\lambda\cdot\Omega)) d\lambda \right| = \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| \cdot (|\cos(\lambda\cdot\Omega)| + |\sin(\lambda\cdot\Omega)|) d\lambda < \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| \cdot 2 d\lambda = 2 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda \end{aligned}$$

Conséquence: $\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda$ existe $\Rightarrow \hat{f}(\Omega)$ existe

Par conséquent nous pouvons maintenant formuler le théorème de l'intégrale de Fourier:

Théorème:

Hyp.:

f lisse par morceaux sur \mathbb{R}

$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)| d\lambda$ existe

Thè.:

1. $\hat{f}(\Omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot e^{-i\lambda\cdot\Omega} d\lambda$ existe $\forall \Omega \in \mathbb{R}$

- 2.

Dans les points où f est continue, il vaut:

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{i t \cdot \Omega} d\Omega$$

- 3.

Dans les points ξ où f n'est pas continue, il vaut:

$$\tilde{f}(\xi) = \frac{1}{2}(f(\xi^+) + f(\xi^-)) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{i \xi \cdot \Omega} d\Omega$$

Règles

L'équation de Parseval apparaît maintenant pour $T \rightarrow \infty$ de la façon suivante:

Corollaire:

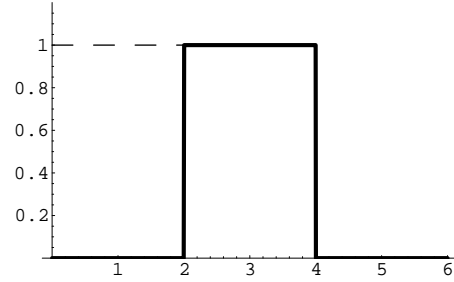
Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(\Omega)|^2 d\Omega$$

Exemple:

Comme une fonction peut être tâtée à l'aide de fonctions de rectangle, nous voulons étudier une fonction de rectangle:

$$f(t) = \begin{cases} a & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \notin [t_1, t_2] \end{cases} \quad \hat{f}(\Omega) = ?$$



$$\begin{aligned} \leadsto \hat{f}(\Omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-it\cdot\Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{t_1}^{t_2} a \cdot e^{-it\cdot\Omega} dt = \frac{a}{2\pi} \cdot \frac{1}{-i\Omega} \cdot e^{-it\cdot\Omega} \Big|_{t_1}^{t_2} \\ &= -\frac{a}{2\pi i\Omega} (e^{-it_2\cdot\Omega} - e^{-it_1\cdot\Omega}) = -\frac{a}{2\pi i\Omega} e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} (e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} - e^{-i\Omega \frac{t_1-t_2}{2}}) \\ &= -\frac{a}{2\pi i\Omega} e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} (-e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} + e^{+i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}}) \cdot (-1) \\ &= \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \underbrace{(e^{i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}} - e^{-i\Omega \frac{t_2-t_1}{2}})}_{\sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2})} \cdot e^{-i\Omega \frac{t_1+t_2}{2}} = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot \underbrace{e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}}}_{\in \mathbb{C}} \end{aligned}$$

Pour un intervalle symétrique avec $t_1 = -t_0$ et $t_2 = +t_0$ on obtient $\frac{t_2+t_1}{2} = 0$ et $\frac{t_2-t_1}{2} = t_0$. On obtient donc:

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}} = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{-i\Omega \cdot 0} = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0)$$

Corollaire:

Hyp.:

$$f(t) = \begin{cases} a & t \in [t_1, t_2] \\ 0 & t \notin [t_1, t_2] \end{cases}$$

Thè.:

$$\hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega \frac{t_2-t_1}{2}) \cdot e^{-i\Omega \frac{t_2+t_1}{2}}$$

$$t_1 = -t_0, t_2 = +t_0 \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0)$$

En outre il vaut: $f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\Omega) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega$

Pour un intervalle symétrique on obtient alors:

$$f(t) \sim \tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega, \quad f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{it\cdot\Omega} d\Omega, \quad t \in (-t_0, t_0)$$

Spécialement:

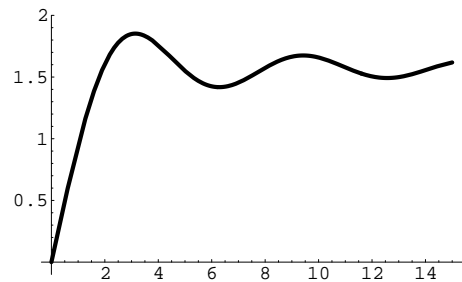
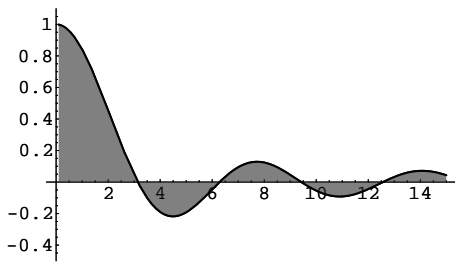
$$0 \in (-t_0, t_0), \quad f(0) = a = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) \cdot e^{i\cdot 0 \cdot \Omega} d\Omega = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{a}{\pi\Omega} \cdot \sin(\Omega t_0) d\Omega$$

$$\Rightarrow \pi = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega = 2 \int_0^{\infty} \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega \quad \text{indépendamment de } t_0$$

Lemme: $\int_0^\infty \frac{\sin(\Omega t_0)}{\Omega} d\Omega$ indépendamment de t_0
 et $\pi = 2 \int_0^\infty \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega$.

Définition: $Si(x) := \int_0^x \frac{\sin(\Omega)}{\Omega} d\Omega$ s'appelle **sinus intégral**

$Si(x)$ a la signification de la mesure de la surface montrée à côté.

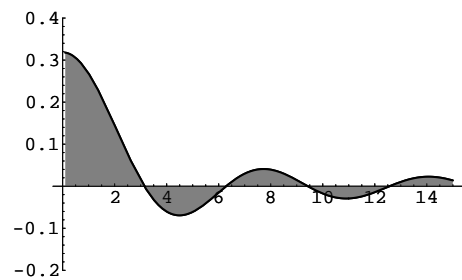
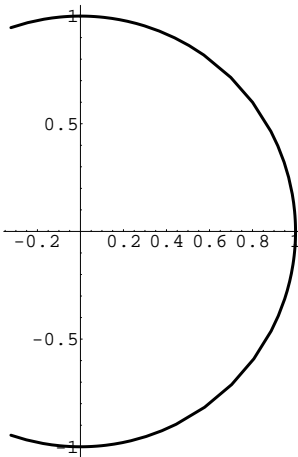


Nous venons de montrer:

Théorème: $Si(\infty) := \lim_{x \rightarrow \infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$

Exemple:

$$f(t) = \begin{cases} e^{i\omega t} & t \in [-t_0, t_0] \\ 0 & t \notin [-t_0, t_0] \end{cases}$$



$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \hat{f}(\Omega) &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} e^{i\omega t} \cdot e^{-it\Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} e^{it(\omega-\Omega)} dt \\ &= \frac{1}{2i\pi(\omega-\Omega)} e^{it(\omega-\Omega)} \Big|_{-t_0}^{t_0} = \frac{1}{2i\pi(\omega-\Omega)} (e^{it_0(\omega-\Omega)} - e^{-it_0(\omega-\Omega)}) = \frac{1}{\pi(\omega-\Omega)} \sin(t_0 \cdot (\omega-\Omega)) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Exemple:

Soit $f(t) = \delta(t)$ fonction de Dirac, distribution.

$$\leadsto \hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} f(t) \cdot e^{-it\Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-t_0}^{t_0} \delta(t) \cdot e^{-it\Omega} dt = \frac{1}{2\pi} \cdot 1 = \frac{1}{2\pi}$$

(Qualité de couper)

Dans ce qui suit on trouve quelques règles prouvables de manière simple. Le contrôle est affaire du lecteur.

Soit $a \cdot f_1(t) + b \cdot f_2(t) \circ \bullet \overbrace{a \cdot f_1(\Omega) + b \cdot f_2(\Omega)}^{\hat{\quad}}, f'(t) \circ \bullet \widehat{f'}(\Omega), \dots$

Règles:

1. Linéarité: $\overbrace{a \cdot f_1(\Omega) + b \cdot f_2(\Omega)}^{\hat{\quad}} = a \cdot \hat{f}_1(\Omega) + b \cdot \hat{f}_2(\Omega)$

2. Règle de la différentiation $\widehat{f'}(\Omega) = i\Omega \hat{f}(\Omega)$

3. Déplacement de l'original

$$F(t) := f(a(t-d)) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = \frac{1}{a} \cdot e^{-i\Omega d} \cdot \hat{f}\left(\frac{\Omega}{a}\right)$$

4. Déplacement de l'image

$$F(t) := e^{itd} \cdot f(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = \hat{f}(\Omega - d)$$

5. Plissement 1:

$$F(t) := \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \cdot g(t-\lambda) d\lambda := (f * g)(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = 2\pi \cdot \hat{f}(\Omega) \cdot \hat{g}(\Omega)$$

6. Plissement 2:

$$F(t) = f(t) \cdot g(t) \Rightarrow \hat{F}(\Omega) = (\hat{f} * \hat{g})(\Omega)$$

7. Itération:

$$\widehat{(\hat{f})}(t) = \frac{1}{2\pi} \cdot f(-t)$$

8. Intégration:

$$F(t) := \int_a^t f(\lambda) d\lambda \quad \text{satisfait les hypothèses du théorème de l'intégrale de Fourier}$$

$$\hat{F}(\Omega) = \frac{1}{i\Omega} \cdot \hat{f}(\Omega)$$

9. Distribution:

$$f(t) \equiv 1 \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \delta(\Omega)$$

Preuve:

Exercices!

4.6.2 Borné à la bande b , Shannon

Définition:

$$f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \text{ s'appelle } \mathbf{borné à la bande } \mathbf{b} \Leftrightarrow \forall_{|\Omega| \geq b} : \hat{f}(\Omega) = 0$$

↪

Dans le spectre, des fréquences plus grandes d'une certaine fréquence donnée n'existent pas ce qui est p.ex. le cas pour les sons.

Exemple:

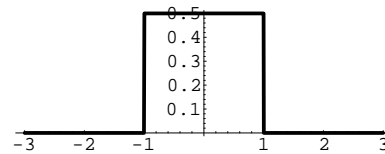
$$\text{sinc}(t) := \frac{1}{2} \int_{-1}^1 e^{it\lambda} d\lambda = \begin{cases} \frac{\sin(t)}{t} & t \neq 0 \\ 1 & t = 0 \end{cases}$$

Définition:

$$\text{sinc}(t) := \mathbf{sinus cardinalis}$$

Par le calcul on arrive à

$$\widehat{\text{sinc}}(\Omega) = \begin{cases} \frac{1}{2} & |\Omega| < 1 \\ 0 & |\Omega| > 1 \end{cases}$$



$$|\Omega| = 1 \Rightarrow \widehat{\text{sinc}}(t) = \frac{1}{4}$$

$\widehat{\text{sinc}}(\Omega)$ est donc borné à la bande b

Théorème:

Shannon

Hyp.:

$$f \text{ borné à la bande } b \quad h \leq \frac{\pi}{b}$$

Thè.:

1. f est donnée de façon univoque par les valeurs $f(h \cdot k)$, $k \in \mathbb{Z}$ dans tous les points de continuité de f .
2. $f(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(h \cdot k) \cdot \text{sinc}\left(\frac{\pi}{h} \cdot (t - h \cdot k)\right)$ (*)
3. $|\Omega| \leq \frac{\pi}{h} \Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(h \cdot k) \cdot e^{-i h k \Omega}$

Définition:

Nous appelons une fonction f **presque bornée à la bande b** , si $|\hat{f}(\Omega)|$ reste petit pour $|\Omega| > b$.

Application:

L'homme n'aperçoit pas de sons au dessus de $20 \cdot 10^3$ Hertz. Donc pour la musique des fonctions bornées à la bande b suffisent. \rightsquigarrow Phonogramme digital, disque compact. . . Ici on choisit pour la fréquence de lecture $\frac{1}{h} \geq \frac{b}{\pi} = 40 \cdot 10^3$ Hz.

4.6.3 Résoudre des éq.diff. à l'aide de transformaisons de Fourier

Analoguement aux transformations de Laplace, pour résoudre des éq.diff., on peut aussi travailler avec des transformations de Fourier.

Exemple: $E(y) \equiv y'(x) + y(x) = f(x)$ (Eq.diff.)

$$E(y) \circ \bullet i \cdot \Omega \cdot \hat{y}(\Omega) + \hat{y}(\Omega) = \hat{f}(\Omega) \Rightarrow \hat{y}(\Omega) = \frac{\hat{f}(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1)}$$

Transformation inverse: $\rightsquigarrow y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{f}(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1)} \cdot e^{i x \cdot \Omega} d\Omega$

Spécialement: Soit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \in [-1, 1] \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{f}(\Omega) = \frac{\sin(\Omega)}{\pi \cdot \Omega} \quad (\text{voir page 126})$$

$$y(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\Omega)}{i \cdot (\Omega + 1) \cdot \Omega \cdot \pi} \cdot e^{i x \cdot \Omega} d\Omega = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 1 - e^{-(x+1)} & |x| \leq 1 \\ e^{1-x} - e^{-(x+1)} & |x| > 1 \end{cases} \rightsquigarrow y_p$$

\rightsquigarrow Ici, nous avons trouvé une solution particulière. Nous trouvons la solution générale par l'addition des solutions homogènes:

$$E(y)_{hom} \equiv y'(x) + y(x) = 0 \Rightarrow y_{hom}(x) = c \cdot e^{-x}, \quad y_{inhom}(x) = y_{hom}(x) + y_p(x) = c \cdot e^{-x} + y_p(x)$$

Attention: Pour $c \neq 0$ l'intégrale $\int_{-\infty}^{\infty} |y_{inhom}(x)| dx$ n'est plus finie, car $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x} dx = \infty$. C.v.d. ici, la transformée de Fourier n'existe pas.

Conséquence:

La transformation de Fourier fournit seulement les solutions de l'éq.diff. qui possèdent une transformée de Fourier. Et celles-là sont apparemment bien limitées.

En outre les transformées de fonctions réelles sont, à la différence des transformées de Laplace, généralement des fonctions complexes.

Il vaut:
$$\hat{f}(\Omega) := \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-i t \cdot \Omega} dt, \quad e^{-i t \cdot \Omega} = \cos(t \cdot \Omega) - i \sin(t \cdot \Omega)$$

$\rightsquigarrow \hat{f}(\Omega) \in \mathbb{R}$ pour f paire

Indication:

Pour les transformations de Fourier il existe des tableaux juste comme pour les transformations de Laplace.

Kapitel • Chapitre 5

Transformations en z

5.1 Introduction

5.1.1 Utilisation

Les machines qui fonctionnent avec une certaine cadence, c.-à-d. qui marchent d'après un certain rythme, comme par exemple aujourd'hui les ordinateurs usuels (machines de von Neumann) changent tout au plus leur état, quand un nouveau rythme (cadence) commence. A leur description on a donc à faire à une suite d'états conditionnés. Mathématiquement ça s'exprime par des suites discrètes.

Généralement on trouve cette situation à la lecture de signaux de temps discrets. Il se montre que les équations de condition des systèmes ainsi écrits sont des équations aux différences. Par l'analogie au traitement des équations différentielles à l'aide de transformations de Laplace on traite de telles équations aux différences à l'aide de transformations en z. Comme nous verrons plus tard, les transformations en z sont proprement rien d'autre que la version discrète des transformations de Laplace. Par conséquent nous trouvons les règles des transformations de Laplace de nouveau pour les transformations en z.

Littérature: Glyn James, Advanced Modern Engineering Mathematics, Addison Wesley.

5.1.2 Objet de la considération

symboles:

Suites finies: $\{x_k\}_{k=0}^{k=n} := \{x_k\}_0^n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$

Suites infinies: $\{x_k\}_0^\infty := \{x_k\}_0^n = \{x_0, x_1, x_2, x_3 \dots\}$

Si on lit aussi pour $t < 0$:

$$\{x_k\}_{-\infty}^\infty := \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3 \dots\}$$

Indication:

Les suites infinies sont des cas limites qui ne sont pas possibles pour les machines à cadence.

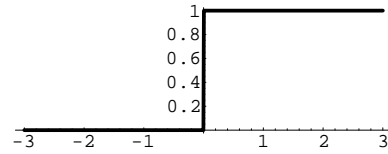
Définition: S'il vaut $x_k = 0$ pour $k < 0$, la suite $\{x_k\}_{-\infty}^\infty$ s'appelle **suite causale**.

Soit $f: t \mapsto f(t)$ $f(t_k) := x_k$, $k \in \mathbb{Z} \rightsquigarrow \{x_k\}_{-\infty}^\infty$ définie

Soit fonction de saut unité:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

$$\leadsto f(t) \cdot H(t) = 0, \quad t < 0$$



Lemme: $\{H(t) \cdot x_k\}_{-\infty}^{\infty} =$ Suite causale

5.1.3 Transformée en z

Définition: $\mathcal{Z}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} := X(z) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$
s'appelle **transformée en z** de $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$

\mathcal{Z} est un opérateur sur l'ensemble $\{\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}\}$.

Symbole: $\{x_k\} \circ \bullet X(z)$

Lemme: Hyp.: $\{x_k\}_{-\infty}^{\infty}$ Suite causale

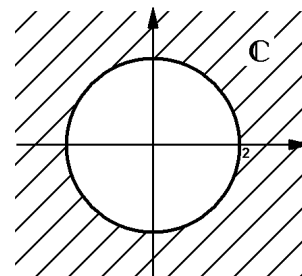
Thè.: $\mathcal{Z}\{x_k\}_{-\infty}^{\infty} = \mathcal{Z}\{x_k\}_0^{\infty} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k}$

Exemple: Soit $x_k = 2^k$ pour $k \geq 0$

$$\mathcal{Z}\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{z}\right)^k \leadsto \text{Suite géométrique}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}\{x_k\} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{z}\right)^k}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \frac{z}{z - 2}$$

pour $\left|\frac{2}{z}\right| < 1, \quad 2 < |z|$



Dans l'autre direction: $\frac{z}{z - 2} = \frac{1}{1 - \frac{2}{z}} = \left(1 - \frac{2}{z}\right)^{-1} = 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots$

5.2 Règles, calcul

5.2.1 Suites géométriques

Si on prend généralement $a \in \mathbb{C}$ au lieu de 2, on obtient:

Théorème: Hyp.: $|z| > a, x_k = a^k$ pour $k \geq 0, \{x_k\}$ suite causale

Thè.: $\mathcal{Z}\{x_k\} = \mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$

Exemple: $\mathcal{Z}\{(-\frac{1}{2})^k\} = \frac{z}{z - (-\frac{1}{2})} = \frac{2z}{2z+1}$

5.2.2 Différentiation de transformées

On obtient de nouvelles règles par différentiation de $\mathcal{Z}\{a^k\} = \frac{z}{z-a}$ pour $|z| > |a|$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{z}{z-a} \right) = \frac{(z-a) - z}{(z-a)^2} = \frac{-a}{(z-a)^2} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} a^k \cdot z^{-k} = - \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot a^k \cdot z^{-k-1} \\ &= - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^{k+1}} = -\frac{1}{z} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^k} = -\frac{1}{z} \cdot \mathcal{Z}\{k \cdot a^k\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} &= \frac{d}{da} \left(\frac{z}{z-a} \right) = \frac{0 \cdot (z-a) - z \cdot (-1)}{(z-a)^2} = \frac{z}{(z-a)^2} = \frac{d}{da} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^{k-1}}{z^k} = \mathcal{Z}\{k \cdot a^{k-1}\} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k \cdot a^k}{z^k} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} \Rightarrow \frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\} \end{aligned}$$

Règles: Hyp.: $|z| > |a|$

Thè.:

1. $\frac{d}{da} \mathcal{Z}\{a^k\} = -\frac{z}{a} \cdot \frac{d}{dz} \mathcal{Z}\{a^k\}$
2. $\mathcal{Z}\{k \cdot a^{k-1}\} = \frac{z}{(z-a)^2}$
3. $a = 1 \Rightarrow \mathcal{Z}\{k\} = \frac{z}{(z-1)^2}$

Remarque:

$$\mathcal{Z}\{a_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \frac{1}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^k := \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot w^k, \quad w := \frac{1}{z}$$

\leadsto La transformée en z est une **série de puissances!**

5.2.3 Linéarité, impulsion d'unité

Linéarité

Comme la transformée en z est donc une série de puissances, les règles de calcul connues peuvent être utilisées dans le domaine de convergence: Intégrer terme par terme, différencier terme par terme, additionner terme par terme etc.. Par conséquent il vaut:

Règle: $\mathcal{Z}\{\lambda a_k + \mu b_k\} = \lambda \mathcal{Z}\{a_k\} + \mu \mathcal{Z}\{b_k\}$
dans le domaine de convergence commun.

Exemple: $\mathcal{Z}\{2k\} = 2 \cdot \mathcal{Z}\{k\} = 2 \cdot \frac{z}{(z-1)^2}$

5.2.4 Suites exponentielles et trigonométriques

Impulsion d'unité

Maintenant nous étudions la suite:

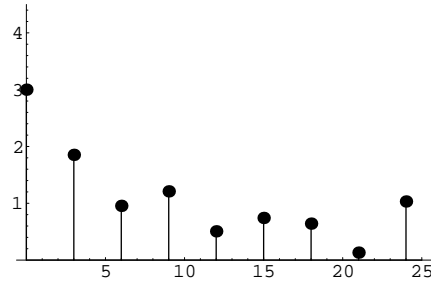
$$\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \frac{1}{z^0} + \frac{0}{z^1} + \frac{0}{z^2} + \frac{0}{z^3} + \dots = 1 \rightsquigarrow$$

Règle: $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}$ s'appelle **séquence d'impulsion d'unité** (bréf: Impulsion d'unité)

Suite exponentielle

De la pratique: Lire un signal

$$\begin{aligned} \text{Soit } \{f(kT) \mid k = 0, 1, 2, \dots\} &= \\ \{f(0), f(T), f(2T), f(3T), \dots\} &:= \{f\{kT\}\} \\ \Rightarrow \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kT)}{z^k} \end{aligned}$$



Exemple: $f(t) = e^{-t} \cdot H(t)$ (Saut d'unité pour $t = 0$)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \{f\{kT\}\} &= \{1, e^{-T}, e^{-2T}, e^{-3T}, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-kT}}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{e^{-T}}{z}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e^T \cdot z}\right)^k \\ &= \frac{1}{1 - \frac{1}{e^T \cdot z}} = \frac{e^T \cdot z}{e^T \cdot z - 1} = \frac{z}{z - e^{-T}} \quad \text{pour } |z| > e^{-T} \end{aligned}$$

Règle: Hyp.: $\{f\{kT\}\} = \{e^{-kT}\}_0^{\infty}, |z| > e^{-T}$

Thè.: $\{f\{kT\}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{f\{kT\}\} = \frac{z}{z - e^{-T}}$

Suites trigonométriques

Exemple 1:

$$\begin{aligned} \{\cos(k \omega T)\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\cos(k \omega T)\} &= \mathcal{Z}\left\{\frac{e^{i k \omega T} + e^{-i k \omega T}}{2}\right\} = \frac{1}{2} \cdot (\mathcal{Z}\{e^{i k \omega T}\} + \mathcal{Z}\{e^{-i k \omega T}\}) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{z}{z - e^{-i \omega T}} + \frac{z}{z - e^{i \omega T}}\right) = \frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2 z \cos(\omega T) + 1} \quad \text{pour } |z| > 1 \end{aligned}$$

Exemple 2:

Nous obtenons de façon analogue:

$$\{\sin(k \omega T)\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\sin(k \omega T)\} = \frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2 z \cos(\omega T) + 1} \quad \text{pour } |z| > 1$$

Règle: Hyp.: $|z| > 1$

Thè.:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}\{\cos(k \omega T)\}_0^\infty &= \frac{z \cdot (z - \cos(\omega T))}{z^2 - 2 z \cos(\omega T) + 1} \\ \mathcal{Z}\{\sin(k \omega T)\}_0^\infty &= \frac{z \cdot \sin(\omega T)}{z^2 - 2 z \cos(\omega T) + 1} \end{aligned}$$

5.2.5 Décalages

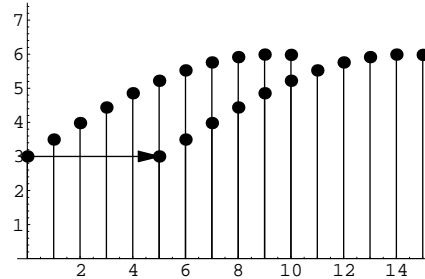
Décalage à droite

Au lieu de dire "décalage à droite", nous disons aussi **retardement**.

Soit

$$\begin{aligned} y_k &= x_{k-k_0}, \quad k \geq k_0 \\ y_k &= 0, \quad k < k_0 \end{aligned}$$

$$x_0 = y_{k_0}$$



$$\leadsto \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = \sum_{k=k_0}^{\infty} \frac{x_{k-k_0}}{z^k} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^{p+k_0}} = \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{x_p}{z^p} = \frac{1}{z^{k_0}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_k\}$$

Règle: Hyp.:

$$\mathcal{Z}\{x_k\} = \{x_k\}_0^\infty, \quad k < 0 \Rightarrow x_k = 0, \quad \mathcal{Z}\{x_k\} = X(z)$$

Thè.:

$$\mathcal{Z}\{x_{k-k_0}\} = \frac{1}{z^{k_0}} \mathcal{Z}\{x_k\} = \frac{1}{z^{k_0}} X(z)$$

Exemple: $x_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k \geq 0.$

$$\{x_{k-2}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_{k-2}\} = \frac{1}{z^2} \mathcal{Z}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} = \frac{2}{z(2z - 1)} \quad \text{pour } |z| > \frac{1}{2}$$

Décalage à gauche

Au lieu de dire "décalage à gauche", nous disons aussi **expédition**.

Soit $y_k = x_{k+k_0} \rightsquigarrow \mathcal{Z}\{y_k\} = ?$

Argumenter récursivement:

$$\begin{aligned} k_0 = 1, \quad y_k &= x_{k+1} \\ \Rightarrow \mathcal{Z}\{y_k\} &= \left\{\frac{y_k}{z^k}\right\}_0^\infty = \left\{\frac{x_{k+1}}{z^k}\right\}_0^\infty = z \left\{\frac{x_{k+1}}{z^{k+1}}\right\}_0^\infty = z \sum_{p=1}^\infty \frac{x_p}{z^p} = z \left(\sum_{p=1}^\infty \frac{x_p}{z^p}\right) - x_0 = z \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z \cdot x_0 \\ &= z \cdot X(z) - z \cdot x_0 = \mathcal{Z}\{x_{k+1}\} \quad (\text{à cause du décalage à droite}) \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow \text{Induction: } \mathcal{Z}\{x_{k+2}\} = z^2 \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z^2 \cdot x_0 - z \cdot x_1$$

$$\rightsquigarrow \mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\} = z^{k_0} \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - z^{k_0} \cdot x_0 - z^{k_0-1} \cdot x_1 - \dots - z \cdot x_{k_0-1}$$

Règle:	<u>Hyp.:</u>	$\{x_k\} = \{x_k\}_0^\infty$
	<u>Thè.:</u>	$\mathcal{Z}\{x_{k+k_0}\}_0^\infty = z^{k_0} \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} - \sum_{n=0}^{k_0-1} z^{k_0-n} \cdot x_n$

Remarque:

Ces règles seront importantes pour l'application aux équations aux différences.

5.2.6 Multiplication avec une suite terme par terme

Multiplication avec suite géométrique

$$\{x_k\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{a^k x_k\} = \sum_{k=0}^\infty \frac{a^k x_k}{z^k} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x_k}{\frac{z^k}{a^k}} = \sum_{k=0}^\infty \frac{x_k}{\left(\frac{z}{a}\right)^k} = X\left(\frac{z}{a}\right) \rightsquigarrow$$

Règle:	<u>Hyp.:</u>	$\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z)$
---------------	---------------------	---

	<u>Thè.:</u>	$\mathcal{Z}\{a^k x_k\} \circ \bullet X\left(\frac{z}{a}\right)$
--	---------------------	--

Multiplication avec suite de puissances

$$\begin{aligned} \text{Soit } n = 1 \rightsquigarrow \mathcal{Z}\{k x_k\} &= \sum_{k=0}^\infty \frac{k x_k}{z^k} \cdot \frac{z}{z} = z \cdot \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{z^{k+1}} x_k = z \cdot \sum_{k=0}^\infty \left(-\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{z^k}\right) x_k\right) = -z \cdot \frac{d}{dz} \left(\sum_{k=0}^\infty \frac{x_k}{z^k}\right) \\ &= -z \frac{d}{dz} {}^n (\mathcal{Z}\{k x_k\}) = \left(-z \frac{d}{dz}\right) (X(z)) \end{aligned}$$

~> Induction: $\mathcal{Z}\{k^n x_k\} = (-z \frac{d}{dz})^n (X(z))$

Règle:

Différentiation de la transformée

Hyp.: $\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z)$

Thè.: $\{k^n x_k\} \circ \bullet (-z \frac{d}{dz})^n (X(z))$

Exemple:

$$\begin{aligned} (-z \frac{d}{dz})(X(z)) &= (-z \frac{d}{dz})\left(\frac{z}{z-a}\right) = \frac{z}{(a-z)^2} && \bullet \circ \{a^k\}, \\ (-z \frac{d}{dz})^2(X(z)) &= (-z \frac{d}{dz})\left(\frac{az}{(a-z)^2}\right) = \frac{2a^3}{(z-a)^3} + \frac{3a^2}{(z-a)^2} + \frac{a}{z-a} && \bullet \circ \{k a^k\}, \\ &&& \bullet \circ \{k^2 a^k\} \\ &&& \text{etc. } \dots && \bullet \circ \{k^n a^k\} \end{aligned}$$

Conséquence:

Comme on voit tout de suite, on peut transformer à l'aide de cette règle des expressions de la forme $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$.

5.2.7 Théorème de valeurs aux limites

Théorème des valeurs au début

Il vaut: $\mathcal{Z}\{x_k\} \circ \bullet X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = x_0 + \frac{x_1}{z} + \frac{x_2}{z^2} + \dots \xrightarrow{|z| \rightarrow \infty} x_0$

Théorème:

Hyp.: $\{x_k\} = \{x_k\}_0^{\infty}$
(suite causale)

Thè.: $\lim_{|z| \rightarrow \infty} X(z) = x_0$

Théorème des valeurs à la fin

$$\begin{aligned} \text{Considérons: } (1 - \frac{1}{z}) \cdot X(z) &= (1 - \frac{1}{z}) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot (\frac{1}{z} - \frac{1}{z^{k+1}}) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \\ &= x_0 \cdot \frac{z-1}{z} + x_1 \cdot \frac{z-1}{z^2} + \dots + x_{N_0} \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\text{Maintenant il vaut: } \lim_{z \rightarrow 1} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = 0 \Rightarrow \lim_{z \rightarrow 1} (1 - \frac{1}{z}) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}}$$

Soit maintenant: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_{\infty} \in \mathbb{C}$ existe ~> $|x_k - x_{\infty}| < \varepsilon$

$\rightsquigarrow x_k = x_\infty \pm \varepsilon_k$ pour $k > N_0$ et $0 \leq \varepsilon_k \leq \varepsilon_{N_0}$

$$\Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_\infty \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \quad \text{Ici on peut conclure:}$$

$$\left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| < \varepsilon_{N_0} \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \left| \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{1}{z^k} \right| = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|}$$

$$\leq \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|}, \quad \text{car il vaut: } |1-z| = ||1|-|z|| \leq |1-z| \leq |1|+|z|$$

$$\Rightarrow \left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| < \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \right| \cdot \frac{1}{|1-z|} = \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right| \quad \text{pour } |z| > 1$$

$$\rightsquigarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \varepsilon^*(N_0) \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}}, \quad |\varepsilon^*(N_0) \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}}| < \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right|$$

Pour $\varepsilon_{N_0} \rightarrow 0$ ainsi que $z \rightarrow 1$ nous obtenons:

$$\left| \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \right| < \varepsilon_{N_0} \cdot \left| \frac{1}{z^{N_0+2}} \right| \rightarrow 0 \cdot 1 = 0 \Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_\infty \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \pm \varepsilon_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \sim x_\infty \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{z-1}{z^{k+1}} + 0$$

Ici on obtient:

$$x_\infty \cdot \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \frac{z-1}{z^{k+1}} = x_\infty \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^k} = x_\infty \cdot \frac{z-1}{z^{N_0+2}} \cdot \frac{1}{1-z} = x_\infty \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}} \cdot \frac{1}{1} = x_\infty \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} \sim x_\infty \cdot \frac{1}{z^{N_0+2}} + 0 = \frac{x_\infty}{z^{N_0+2}} \quad \text{pour } |z| > 1$$

$$\rightsquigarrow \lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} x_k \cdot \frac{z-1}{z^{k+1}} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{x_\infty}{z^{N_0+2}} = x_\infty \in \mathbb{C}$$

(si cette limite existe)

Remarque:

Si $\lim_{z \rightarrow 1, |z| > 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z)$ existe, d'après la définition de la valeur limite, cette valeur ne peut pas dépendre du chemin, sur lequel z va $\rightarrow 1$. Pour $|z| < 1$, $z \rightarrow 0$, cette valeur limite n'existe pas, comme on apprend des exemples triviaux:

Exemple: Soit $z = r \in \mathbb{R}$, $0 < z = r < 1$, $a \neq 0$, $x_k = a = \text{const. } \forall k \in \mathbb{N}_0$

$$\rightsquigarrow x_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a, \quad \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{z^k} = \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot a \cdot \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}}{1 - \frac{1}{z}}$$

avec $\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$ et $z = r < 1$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z) \rightarrow \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot a \cdot \frac{1 - \infty}{1 - \frac{1}{z}} = \pm \infty \rightsquigarrow \quad \text{Valeur limite n'existe pas!}$$

C'est pourquoi l'hypothèse "X(z) existe" est essentielle.

Théorème:**Hyp.:**

(1) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_\infty$ existe

(2) $\mathcal{Z}\{x_k\} = \{x_k\}_0^\infty \circ \bullet X(z),$

 $X(z)$ existe pour tous les z en question**Thè.:**

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left(1 - \frac{1}{z}\right) \cdot X(z)$$

5.2.8 Transformation en z inverse

Définition

Soit $\{x_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x_k}{z^k} = X(z)$ et $\{y_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{y_k\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y_k}{z^k} = Y(z)$

Pour $\{x_k\}_0^\infty \neq \{y_k\}_0^\infty$ pour au moins un $k \in \mathbb{N}_0$ il est $x_k \neq y_k$. C.v.d. les séries de puissances $X(z)$ et $Y(z)$ sont différentes pour au moins un terme. La transformation est donc injective et donc bijective sur les ensembles nécessaires. \rightsquigarrow

Lemme:

L'ensemble des transformations en z $\{\{x_k\}_0^\infty \circ \bullet \mathcal{Z}\{x_k\}\}$ crée une application bijective entre l'ensemble original $\{\{x_k\}_0^\infty\}$ et l'ensemble des images $\{\mathcal{Z}\{x_k\}\}$. C.v.d. la **transformation inverse** \mathcal{Z}^{-1} existe de façon univoque.

5.2.9 Trouver l'inverse

Problème:

Dans la pratique, on a souvent à résoudre le problème suivant: Si donné $X(z)$, chercher l'inverse $\mathcal{Z}^{-1}\{X(z)\}$.

Souvent on a $X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z), Q(z)$ polynômes dans z . C'est pourquoi pour trouver l'inverse, la **décomposition en fractions partielles** est souvent utile!

Exemples sans nombres complexes

Exemple 1: **Donné:** $\{a^k\} \circ \bullet \frac{z}{z-a} \Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-a}\right\} = \{a^k\}$

P.ex. $\mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z-2}\right\} = \{2^k\}$

Exemple 2:

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} = z \frac{1}{(z-1)(z-2)} \stackrel{!}{=} z \left(\frac{1}{(z-2)} - \frac{1}{(z-1)} \right) = \frac{z}{(z-2)} - \frac{z}{(z-1)}$$

$$\Rightarrow \mathcal{Z}^{-1}\{Y(z)\} = \{2^k\} - \{1^k\} = \{(2^k - 1)\}_{k=0}^\infty$$

Une méthode différente utilise le théorème de transfert (décalage):

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)} \stackrel{!}{=} \frac{2}{z-2} - \frac{1}{z-1} = 2 \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-2} - \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-1} \bullet \circ \{(2 \cdot 2^{k-1} - 1^{k-1})\} = \{(2^k - 1)\}$$

Exemple 3: $Y(z) = \frac{2z+1}{(z+1)(z-3)}$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z+1} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z-3} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z+1} + \frac{7}{4} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{z-3} \bullet \circ \begin{cases} \frac{1}{4} \cdot (-1)^{k-1} + \frac{7}{4} \cdot (3)^{k-1}, & k > 0 \\ 0 + 0 = 0, & k = 0 \end{cases}$$

Exemple 4: $Y(z) = \frac{z^3 + 2z^2 + 1}{z^3} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^3}$

$$1 \bullet \circ \{1, 0, 0, 0, \dots\} \quad \frac{2}{z} \bullet \circ \{0, 2, 0, 0, 0, \dots\} \quad \frac{1}{z^3} \bullet \circ \{0, 0, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$$

$$\rightsquigarrow Y(z) \bullet \circ \{1, 2, 0, 1, 0, 0, 0, \dots\}$$

Exemple 5: $G(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-aT}} \bullet \circ \{(1 - e^{-aT})^k\}, k \geq 0$

Exemples avec des zéros complexes au dénominateur

Exemple 6:

$$Y(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}, \quad \frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 + a^2} = \frac{1}{(z+ia)(z-ia)} = \frac{1}{2ia} \cdot \left(\frac{1}{z-ia} - \frac{1}{z+ia} \right)$$

$$Y(z) \bullet \circ \frac{1}{2ia} \cdot \{(i^k a^k - (-i)^k a^k)\} = \left\{ \frac{a^k}{2ia} \cdot (i^k - (-i)^k) \right\} = \left\{ \frac{a^k}{a} \cdot \frac{(e^{i\frac{\pi}{2}k} - e^{-i\frac{\pi}{2}k})}{2i} \right\} = \{a^{k-1} \cdot \sin(\frac{k\pi}{2})\}$$

Exemple 7: $Y(z) = \frac{z}{z^2 - z + 1}$,

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{z^2 - z + 1} = \frac{1}{(z - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})(z - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})} = \frac{1}{(z - e^{i\frac{\pi}{3}})(z - e^{-i\frac{\pi}{3}})} =$$

$$\frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{3}} - e^{-i\frac{\pi}{3}})(z - e^{i\frac{\pi}{3}})} + \frac{1}{(e^{-i\frac{\pi}{3}} - e^{i\frac{\pi}{3}})(z - e^{-i\frac{\pi}{3}})} = \frac{1}{(2i \sin(\frac{\pi}{3}))(z - e^{i\frac{\pi}{3}})} + \frac{1}{(-2i \sin(\frac{\pi}{3}))(z - e^{-i\frac{\pi}{3}})} =$$

$$\frac{1}{(2i \frac{\sqrt{3}}{2})(z - e^{i\frac{\pi}{3}})} + \frac{1}{(-2i \frac{\sqrt{3}}{2})(z - e^{-i\frac{\pi}{3}})} = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{1}{z - e^{i\frac{\pi}{3}}} - \frac{1}{z - e^{-i\frac{\pi}{3}}} \right)$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{1}{i\sqrt{3}} \left(\frac{z}{z - e^{i\frac{\pi}{3}}} - \frac{z}{z - e^{-i\frac{\pi}{3}}} \right) \bullet \circ \left\{ \left(\frac{2}{2i\sqrt{3}} (e^{i\frac{k\pi}{3}} - e^{-i\frac{k\pi}{3}}) \right) \right\} = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\frac{k\pi}{3}) \right) \right\}$$

5.3 Applications pratiques

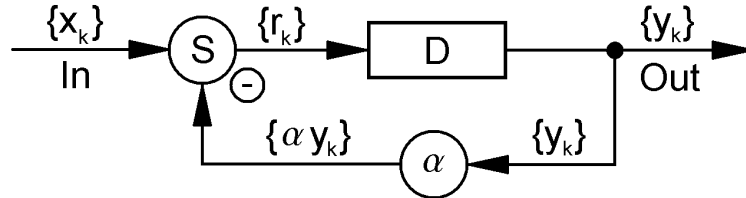
5.3.1 Equations aux différences

P.ex. dans la **technique d'ordinateur** on a des systèmes avec les **conditions discrètes**, qui changent avec la **cadence** resp. mesure, rythme de la **clock**.

Exemple 1:

Schéma

In	Input	Entrée signal $\mathcal{Z}\{x_k\}$
S	Subtractor	Fait $r_k = x_k - \alpha y_k$ (alimentation de retour)
D	Delay	Bloc de décélération, fait $y_{k+1} = r_k$
α	Amplitude α	Fait $y_k \mapsto \alpha y_k$ (amplification, renforcement)
Out	Output	Sortie signal y_k



Conditions:

Départ: $y_0 = 0$ Entrée: $\{x_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ $k \geq 0$ $\alpha = 0.5$

$S \rightsquigarrow r_k = y_{k+1} = x_k - \alpha y_k \rightsquigarrow$ **Equation aux différences:**

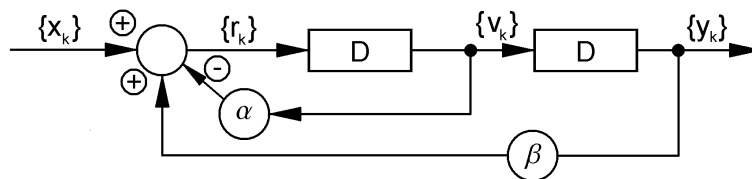
$$E(y) \equiv y_{k+1} + \alpha y_k = x_k$$

Solution: Nous appliquons une transformaiion en z à l'équation aux différences:

$$\begin{aligned}
 E(y) \circ \bullet zY(z) - z y_0 + \alpha Y(z) &= X(z) \Rightarrow zY(z) - 0 + 0.5 Y(z) = \frac{z}{z-1} \\
 \Rightarrow Y(z) &= \frac{X(z)}{z + \alpha} = \frac{z}{(z + 0.5)(z - 1)} = \frac{1}{3(z + 0.5)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z - 1} \\
 &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{z}{(z + 0.5)} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{z} \cdot \frac{1}{z - 1} \circ \bullet \frac{1}{3} \cdot \{(-\frac{1}{2})^{k-1}\} + \frac{2}{3} \cdot \{1^{k-1}\} \Rightarrow y_k = \{(\frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{k-1} + \frac{2}{3})\}
 \end{aligned}$$

Spécialement: $y_0 = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^{-1} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3} = 0$, $y_1 = \frac{1}{3} \cdot (-\frac{1}{2})^0 + \frac{2}{3} = 1 = x_0$ ☺

Exemple 2:



Conditions:

Départ: $y_0 = 0$, $y_1 = 1$ Entrée: $\{x_k\} = \{1, 1, 1, \dots\}$ $k \geq 0$ $\alpha = 1$, $\beta = 2$

$$\rightsquigarrow y_{k+1} = v_l, \quad y_{k+2} = v_{k+1}, \quad v_{k+1} = r_k \Rightarrow y_{k+2} = r_k = x_k - \alpha v_k + \beta y_k = x_k - \alpha y_{k+1} + \beta y_k$$

\rightsquigarrow Equation aux différences:

$$E(y) \equiv y_{k+2} + \alpha \cdot y_{k+1} - \beta y_k = x_k, \quad y_{k+2} + y_{k+1} - 2 y_k = x_k$$

Solution: $E(y) \circ \bullet z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 + z Y(z) - z y_0 - 2 Y(z) = \frac{z}{z - 1}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z^2 Y(z) - z + z Y(z) - 2 Y(z) &= \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \left(\frac{z}{z-1} + z \right) \cdot \frac{1}{z^2 + z - 2} = \frac{z}{z-1} \cdot \frac{1}{(z+2)(z-1)} = \frac{z^2}{(z+2)(z-1)^2} \\ \Rightarrow \frac{Y(z)}{z} &= \frac{z}{(z+2)(z-1)^2} = \frac{1}{3} \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{1}{z-1} - \frac{2}{9} \frac{1}{z+2} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{1}{3} \frac{z}{(z-1)^2} + \frac{2}{9} \frac{z}{z-1} - \frac{2}{9} \frac{z}{z+2} \bullet \circ \left\{ \left(\frac{1}{3} k + \frac{2}{9} - \frac{2}{9} (-2)^k \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \end{aligned}$$

Exemple 3:

$$E(y) \equiv 8 y_{k+2} - 6 y_{k+1} + y_k = 9, \quad k \geq 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} E(y) \circ \bullet 8(z^2 Y - z^2 \cdot 1 - z \cdot \frac{3}{2}) - 6(z \cdot Y - z \cdot 1) + Y &= 9 \cdot \frac{z}{z-1} \Rightarrow Y \cdot (8z^2 - 6z + 1) = 8z^2 + \frac{24}{2}z - 6z + \\ \frac{9z}{z-1} \Rightarrow \frac{Y}{z} &= \frac{8z+6}{(4z-1)(2z-1)} + \frac{9z}{(4z-1)(2z-1)(z-1)} = \frac{5}{z-\frac{1}{2}} - \frac{4}{z-\frac{1}{4}} + \frac{6}{z-\frac{1}{4}} - \frac{9}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{2z}{z-\frac{1}{4}} - \frac{4z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{3z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \left\{ \left(2 \cdot \left(\frac{1}{4} \right)^k - 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^k + 3 \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \end{aligned}$$

Exemple 3:

$$E(y) \equiv y_{k+2} + 2y_k = 0, \quad k \geq 0, \quad y_0 = 1, \quad y_1 = \sqrt{2}, \quad E(y) \circ \bullet z^2 Y - z^2 \cdot 1 - z \cdot \sqrt{2} + 2Y = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Y &= \frac{z^2 + \sqrt{2}z}{z^2 + 2}, \quad \frac{Y}{z} = \frac{z + \sqrt{2}}{z^2 + 2} = \frac{z + \sqrt{2}}{(z + i\sqrt{2})(z - i\sqrt{2})} = \frac{z + \sqrt{2}}{(z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}})(z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}})} \\ &= \frac{1+i}{2i} \cdot \frac{1}{z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} - \frac{1-i}{2i} \cdot \frac{1}{z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}}, \\ Y &= \frac{1+i}{2i} \cdot \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{2}}} - \frac{1-i}{2i} \cdot \frac{z}{z - \sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{2}}} \bullet \circ \{y_k\}_{k=0}^{\infty} = \left\{ \frac{1}{2i} \left((1+i) 2^{\frac{k}{2}} e^{i\frac{k\pi}{2}} - (1-i) 2^{\frac{k}{2}} e^{-i\frac{k\pi}{2}} \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \\ &= \left\{ 2^{\frac{k}{2}} \left(\cos\left(\frac{k\pi}{2}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) \right) \right\}_{k=0}^{\infty} \end{aligned}$$

Remarque:

Le dernier exemple montre comme on peut obtenir un résultat réel au moyen d'un calcul dans \mathbb{C} ce qu'on aurait de la peine à obtenir sans ce détour sur \mathbb{C} .

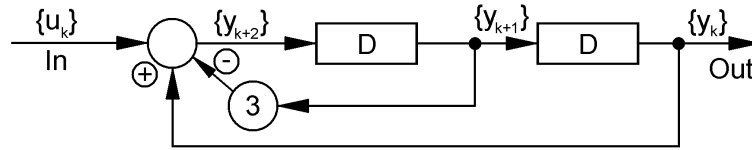
5.3.2 Systèmes linéaires discrets

Systèmes discrets de temps

Au lieu de parler de **systèmes linéaires et discrets**, on parle aussi de **systèmes de temps discrets**.

Soit $\{u_k\}$ la suite d'entrée et $\{y_k\}$ la suite de sortie d'un système. Toutes les deux suites soient des suites causales.

Le système contient des blocs de décélération, des soustracteurs (alimentation de retour, aussi pour l'addition) et amplificateurs (renforcement).



Un modèle commun d'un tel système est une **équation aux différences** de l'ordre n :

$$E(y, u) \equiv a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + a_{n-2} y_{k+n-2} + \dots + a_0 y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \dots + b_0 u_k$$

avec $k \geq 0$ (suites causales), $n \geq m \geq 0$ (physique), $k, m, n \in \mathbb{N}_0$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ oder $a_i, b_i \in \mathbb{C}$.

Conditions: Pour les $\{u_k\}$ aussi soient admises des opérations comme pour les $\{y_k\}$ (ralentissement, alimentation de retour, ...). Soit donné l'état nul récurrent aussi au départ (pour les temps < 0 il n'y a pas de valeurs $\neq 0$).

Définition: Nous appelons ces sortes de systèmes des **systèmes discrets de temps**.

Façon de transformer

Soit $\{y_k\} \circ \bullet X(z)$, $\{u_k\} \circ \bullet U(z)$

$$\Rightarrow E(y, u) \circ \bullet a_n z^{k+n} \cdot Y + a_{n-1} z^{k+n-1} \cdot Y + a_{n-2} z^{k+n-2} \cdot Y + \dots + a_0 z^k \cdot Y =$$

$$\Rightarrow \underbrace{(a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_0 z^0) \cdot Y}_{=Q(z) \cdot Y(z)} = \underbrace{(b_m z^{k+m} \cdot Y + b_{m-1} z^{k+m-1} \cdot Y + \dots + b_0 z^k \cdot Y)}_{=P(z) \cdot Y(z)}$$

$$\rightsquigarrow Q(z) \cdot Y(z) = P(z) \cdot Y(z) \Rightarrow Y(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \cdot U(z) := G(z) \cdot U(z) \quad \text{avec } G(z) := \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$$

Définition: $G(z)$ s'appelle **fonction de transfert en z**.

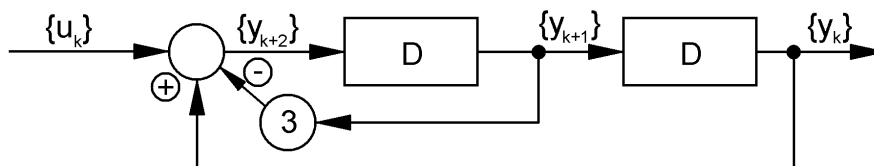
Dans cette situation, nous pouvons formuler deux problèmes fondamentaux typiques:

Problème fondamental 1

Donné: Equation aux différences de l'ordre n .
Trouver: Schéma fonctionnel ou général et fonction de transfert.

Exemple: $y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k = u_k \Rightarrow y_{k+2} = -3y_{k+1} + y_k + u_k$

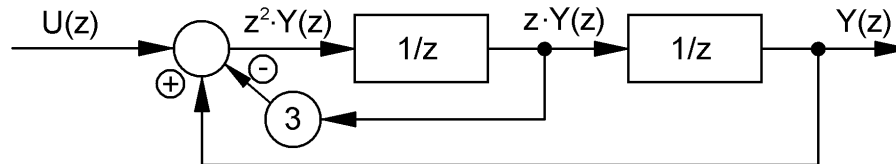
De l'équation aux différences on peut lire directement le diagramme suivant pour le temps k :



On peut transformer directement l'équation aux différences:

$$\leadsto Y z^2 + 3 Y z - Y = U \Rightarrow (z^2 + 3 z - 1) \cdot Y = U \Rightarrow G(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{1}{z^2 + 3 z - 1} \quad \text{Ordre 2}$$

Diagramme du côté de l'image:



Remarque:

Le diagramme du côté de l'antécédant (du symbole original) et celui du côté de l'image montrent des représentations différentes du même système effigie-puissance.

Problème fondamental 2

Donné: Fonction de transfert.

Trouver: Equation aux différences et schéma fonctionnel ou général.

Exemple: $G(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{Y(z)}{U(z)}$ Ordre 2

$$\Rightarrow (z^2 + 3 z + 2) \cdot Y(z) = (z - 1) \cdot U(z) \bullet \circ y_{k+2} + 3 y_{k+1} + 2 y_k = u_{k+1} - u_k$$

\leadsto **Problème:** Quoi faire avec $u_{k+1} - u_k$?

Truc: Utiliser une **fonction auxiliaire:**

$$\frac{1}{z^2 + 3 z + 2} := \frac{R(z)}{Q(z)} \Rightarrow U(z) = z^2 \cdot R(z) + 3 z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z) \bullet \circ u_k = r_{k+2} + 3 r_{k+1} + 2 r_k \Rightarrow$$

$$z \cdot U(z) = z \cdot (z^2 \cdot R(z) + 3 z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)) = z^3 \cdot R(z) + 3 z^2 \cdot R(z) + 2 z \cdot R(z) \bullet \circ u_{k+1} = r_{k+3} + 3 r_{k+2} + 2 r_{k+1}$$

L'équation initiale a donc la forme suivante:

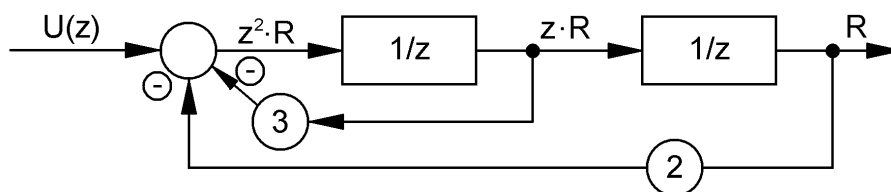
$$(z - 1) \cdot U(z) = z \cdot U(z) - U(z) = (z - 1) (z^2 \cdot R(z) + 3 z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)) = (z R(z) - R(z)) (z^2 + 3 z + 2)$$

$$= Y(z) (z^2 + 3 z + 2) \Rightarrow Y(z) = z \cdot R(z) - R(z) \bullet \circ y_k = r_{k+1} - r_k$$

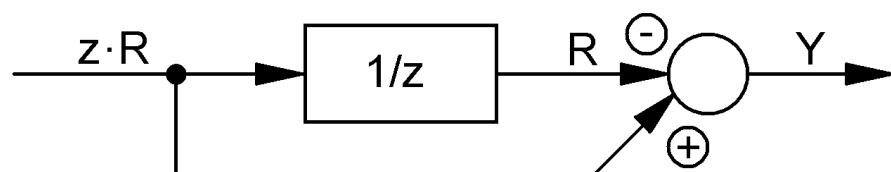
$$\text{avec } r_k = \mathcal{Z}^{-1}\{R(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{U(z)}{z^2 + 3 z + 2}\right\}$$

C'est pourquoi nous devons combiner deux schémas:

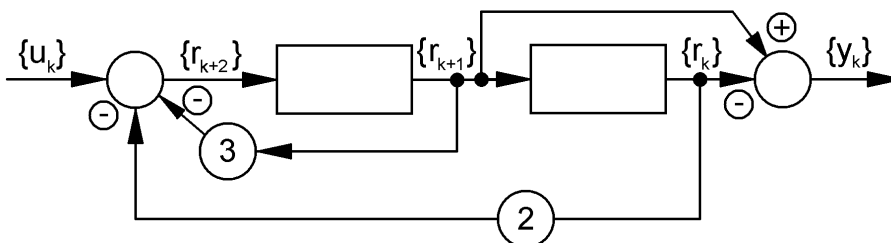
(1) pour $U(z) = z^2 \cdot R(z) + 3 z \cdot R(z) + 2 \cdot R(z)$ oder ou $z^2 \cdot R(z) = U(z) - 3 z \cdot R(z) - 2 \cdot R(z)$



(2) pour $Y(z) = z \cdot R(z) - R(z)$



(3) Combinaison du côté du domaine de validité:

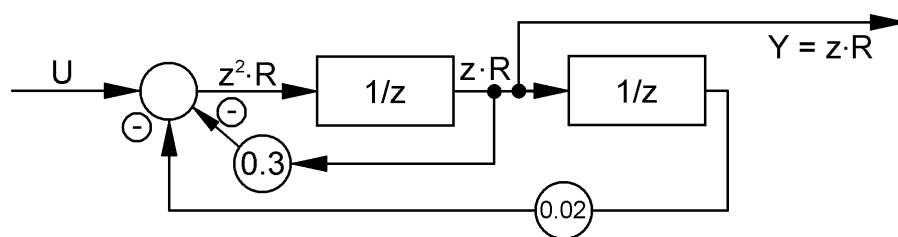


Plusieurs schémas fonctionnels possibles

Exemple: $G(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02} = \frac{Y(z)}{U(z)} \Rightarrow U(z) \cdot z = Y(z) \cdot (z^2 + 0.3z + 0.02)$

Fonction auxiliaire $Y(z) := R(z) \cdot z \Rightarrow U(z) = R(z) (z^2 + 0.3z + 0.02)$

De cela on peut dériver directement le schéma suivant (côté image):



Conformément pour $\{u_k\}$ et $\{y_k\}$ du côté de l'antécédant. (Le lecteur peut dresser le diagramme maintenant lui-même.)

Mais il existe aussi un **deuxième schéma fonctionnel** pour la fonction de transfert donnée. La décomposition en fractions partielles de la fonction de transfert livre la clé pour celui-là:

$$F(z) = \frac{z}{z^2 + 0.3z + 0.02} = \frac{z}{(z + 0.2) \cdot (z + 0.1)} = \frac{2}{z + 0.2} - \frac{1}{z + 0.1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = G(z) \cdot U(z) = \left(\frac{1}{z + 0.1} - \frac{1}{z + 0.2} \right) \cdot U(z) := \underbrace{A(z) \cdot U(z)}_{=R_1(z)} - \underbrace{B(z) \cdot U(z)}_{=R_2(z)} = R_1(z) - R_2(z)$$

$$\Rightarrow 2U(z) = (z + 0.2) R_1(z), \quad U(z) = (z + 0.1) R_2(z)$$

→ Diagramme pour $R_1(z)$:

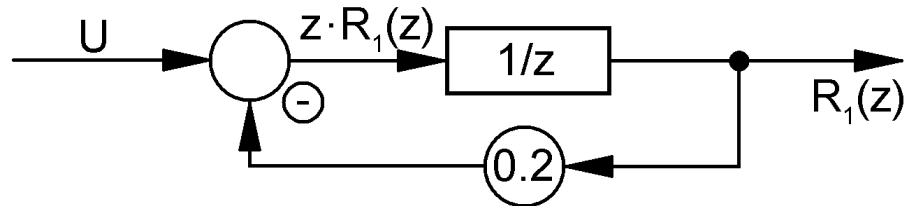
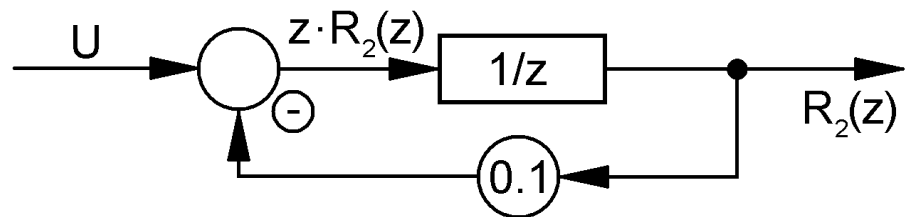
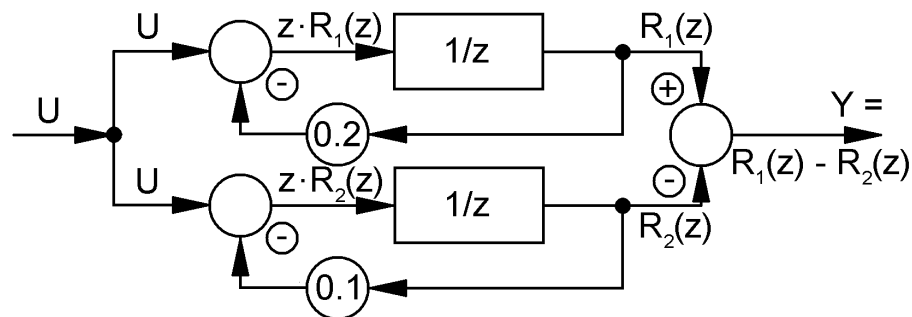


Diagramme pour $R_2(z)$:



Combinaison du côté image:

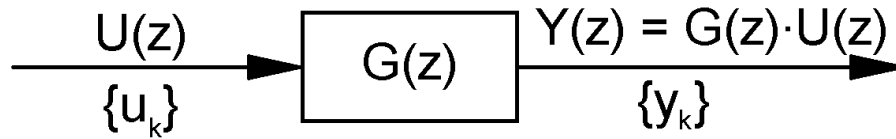


5.3.3 Réponse d'impulsion et indicielle

Réponse d'impulsion

Considérons: $\{\delta_k\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{\delta(t)\}$

Définition: $\{\delta_k\}$ s'appelle séquence d'impulsion



En outre soit: $U(z) \xrightarrow{G(z)} Y(z)$ resp. $\{u_k\} \xrightarrow{G(z)} \{y_k\}$

Ici nous choisissons spécialement: $\{u_k\} = \{\delta_k\}$

En outre nous limitons notre considération à des systèmes, qui se trouvent au début dans la **situation de repos**.

Dans ce cas nous définissons:

Définition: La puissance d'un tel système $\{y_{\delta_k}\}$ s'appelle **réponse d'impulsion du système**

Conséquence: $\mathcal{Z}\{y_{\delta_k}\} = Y_{\delta}(z) = G(z) \cdot U(z) = G(z) \cdot 1 = G(z)$

Règle: $\{y_{\delta_k}\} \circ \bullet \mathcal{Z}\{y_{\delta_k}\} = G(z)$

La fonction de transfert $G(z)$ est donc la transformée en z de la réponse d'impulsion.

Corollaire: $Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_{\delta}(z) \cdot U(z)$

Exemple:

Donné: Fonction de transfert $G(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2}$

Trouver: Réponse d'impulsion du système

$$\begin{aligned} \leadsto Y_{\delta}(z) &= G(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{(z+2)(z+1)} \Rightarrow \frac{Y_{\delta}(z)}{z} = \frac{1}{(z+2)(z+1)} = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2} \\ \Rightarrow \{y_{\delta_k}\} &= \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}\right\} = \{((-1)^k - (-2)^k)\} \quad \text{pour } k \geq 0 \end{aligned}$$

5.3.4 Réponse indicielle

Définition: $\{h_k\} = \{1, 1, 1, 1, \dots\}$ s'appelle **séquence de pas d'unité**

Définition: La réponse du système à la séquence de pas d'unité s'appelle **réponse indicielle** du système.

Exemple:

Donné:

Séquence de réponse d'impulsion: $\{y_{\delta_k}\} = \{(a^k - 0.5^k)\}$, $a > 0$

\rightsquigarrow Soit (1) $a = 0.4$, (2) $a = 1.2$

Trouver: Réponse indicielle du système

$$(1) \{y_{\delta_k}\} = \{(0.4^k - 0.5^k)\}, \quad y_{\delta_k} = 0.4^k - 0.5^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$(2) \{y_{\delta_k}\} = \{(1.2^k - 0.5^k)\}, \quad y_{\delta_k} = 1.2^k - 0.5^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty + 0 = \infty$$

$$\text{Fonction de transfert: } G(z) = Y_{\delta}(z) = \mathcal{Z}\{(a^k - 0.5^k)\} = \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5}$$

$$\text{On sait: } \{y_{u_k}\} = \{1, 1, 1, \dots\} \circ \bullet U(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\rightsquigarrow Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_{\delta}(z) \cdot \frac{z}{z-1} = \left(\frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5} \right) \cdot \frac{z}{z-1}$$

$$\Rightarrow \frac{Y(z)}{z} = \frac{z}{(z-a)(z-1)} - \frac{z}{(z-0.5)(z-1)} = \frac{\frac{a}{a-1}}{z-a} - \frac{1}{z-0.5} - \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \cdot \frac{1}{z-1}$$

$$\Rightarrow Y(z) = \frac{a}{a-1} \cdot \frac{z}{z-a} - \frac{z}{z-0.5} + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \cdot \frac{z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \left\{ \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \right\}$$

Comportement pour des k grands

$$(1) \quad y_k = \frac{0.4}{0.4-1} \cdot 0.4^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-0.4}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 - 0 + 2 + \frac{1}{1-0.4} = 2 + \frac{1}{0.6} = 3.\bar{6} \dots \in \mathbb{R}$$

$$(2) \quad y_k = \frac{1.2}{1.2-1} \cdot 1.2^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-1.2}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty - 0 + 2 + \frac{1}{1-1.2} = \infty$$

$$(3) \quad -1 < a < 1 \rightsquigarrow y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \in \mathbb{R}$$

$$(4) \quad 1 < a \rightsquigarrow y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) = \infty$$

$$(5) \quad a < -1 \rightsquigarrow y_k = \frac{a}{a-1} \cdot a^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \pm? \infty - 0 + \left(2 + \frac{1}{1-a}\right) = \pm? \infty$$

(alternant vers $\pm \infty$)

$$(6) \quad a = -1 \rightsquigarrow y_k = \frac{-1}{-1-1} \cdot (-1)^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-(-1)}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 2 \text{ oder } 3$$

2 PA (2 points d'accumulation)

$$(7) \quad a = 1 \rightsquigarrow y_k = \frac{1}{1-1} \cdot 1^k - 0.5^k + \left(2 + \frac{1}{1-1}\right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} ?$$

$\frac{1}{1-1}$ n'est pas défini ...

Conséquence: La suite $\{y_k\}$ montre toutes les possibilités de comportements, selon la grandeur de a .

Nous avons ici la problématique de la stabilité. Aux systèmes ininterrompus (continus)(voir transformations de Laplace, page 151, 85), un système est appelé stable, si pour la réponse d'impulsion il vaut: $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \text{const.} \neq \pm \infty$. Nous voulons **assumer cette définition** pour les **systèmes discrets**.

5.4 Stabilité

5.4.1 La notion

Définition:

Une solution d'une équation aux différences d'un système brièvement animé par une séquence d'impulsion s'appelle:

1. **stable** $\Leftrightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = c, |y_k| < k \in \mathbb{R}$
2. **semi-stabilisé**
 $\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 y_k \in [c_1, c_2], |y_k| < k \in \mathbb{R}$
3. **non stable** dans tous les autres cas

Soit $G(z)$ la fonction de transfert d'un système linéaire et discret. Considérons:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}, \quad Q(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \dots + a_1 z + a_0$$

P.ex. $G(z)$ pourrait être simplifié de la façon suivante:

$$G(z) = \frac{z-1}{z^2+3z+2} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2}$$

\leadsto Théoriquement la décomposition en fractions partielles existe toujours bien que pratiquement on ne puisse pas la trouver toujours exactement. $G(z)$ a des pôles resp. des zéros de $Q(z)$ à $z_1 = -1, z_2 = -2$. Comme exemple nous considérons:

$$X(z) = \frac{b}{z-\alpha}, \quad \alpha \text{ pôle de } G(z)$$

$$\leadsto X(z) = \frac{b}{z-\alpha} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \frac{z}{z-\alpha} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \mathcal{Z}\{\alpha^k\} = \frac{1}{z} \cdot b \cdot \mathcal{Z}\{x_k\} = b \cdot \mathcal{Z}\{x_{k-1}\} \bullet \circ b \cdot \{(\alpha^{k-1})\} = \{(b \cdot \alpha^{k-1})\}$$

Conséquence:

Dans de telles situations, comme dans celle-ci, les pôles de $G(z)$ resp. les places de zéro de $Q(z)$ sont donc aussi les bases de la suite retransformée $b \cdot \{(\alpha^{k-1})\}$. ($\alpha \in \mathbb{C}$)

Conclusion:

$b \cdot \{(\alpha^{k-1})\}$ se comporte de manière **stable** pour $|\alpha| < 1$ et pour $\alpha = 1$. La suite „explose“ pour $|\alpha| > 1$ (ev. alternante etc.). La suite alterne pour $\alpha = -1$. Correspondamment elle se promène pour $|\alpha| = 1, \alpha \neq 1, -1$.

5.4.2 Critère pour la stabilité

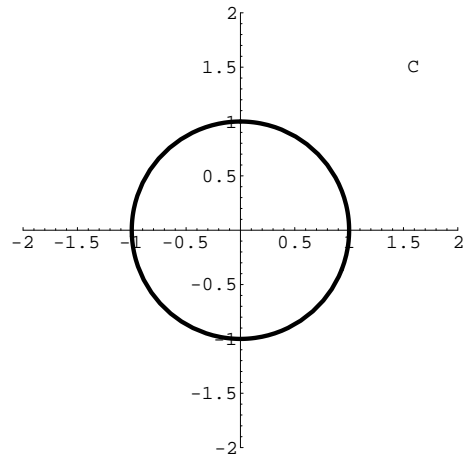
Généralement le comportement de stabilité dépend ainsi des $n(= \text{pgrad}(Q))$ racines de l'équation $Q(z) = 0, z_s = \alpha_s \in \mathbb{C}, s = 1, 2, \dots, n$

D'après le théorème fondamental de l'algèbre il vaut: $Q(z) = a_n (z - \alpha_1)(z - \alpha_2) \dots (z - \alpha_n), \alpha_s = r_s \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$

Les pôles α_s se manifestent de nouveau dans les termes $b_s \mathcal{Z}_s\{x_{s,k-1}\} \sim b_s \alpha_s^{k-1}$. Analoguement on argumente aux places de zéro multiples resp. aux pôles d'ordre supérieur à $\frac{1}{(z-\alpha)^n}$ (voir page 139).

Soit $\alpha_s^{k-1} = r_s^{k-1} e^{i\varphi_s(k-1)}$, $r_s \in \mathbb{R}_0^+$

Soit $r_s < 1 \Rightarrow \alpha_s^{k-1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$



Conclusion:

Hyp.:

$\{\alpha_s \mid s = 1, 2, \dots, n\}$ pôles de la fonction de transfert $G(s)$.
 $\alpha_s = r_s \cdot e^{i\varphi} \in \mathbb{C}$, $r_s \in \mathbb{R}_0^+$, $s = 1, 2, \dots, n$

Thè.:

1. $\forall_s : r_s < 1 \rightsquigarrow$ Le système linéaire aux coefficients constants est stable.

On a aussi stabilité, si 1 est zéro simple.

2. S'il y a d'autre part un ou plusieurs pôles qui sont situés sur le bord du cercle d'unité, tandis que les autres se trouvent dans le cercle, ainsi le système est marginalement stable (semi-stabilisé).
3. Si nous trouvons seulement un pôle à l'extérieur du bord du cercle d'unité, le système est instable, c.-à.-d. il "explose".

Exemple 1: $G(z) = \frac{1}{z + 0.25}$, $\alpha = -0.25$, $|\alpha| < 1 \rightsquigarrow$ stable

Exemple 2: $G(z) = \frac{z^2}{z^3 - 3z^2 + 2.5z - 1} = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $Q(z) = (z - 2)(z - 0.5(1 + i))$
 $\Rightarrow \alpha_1 = 2 > 1 \rightsquigarrow$ instable

5.4.3 Critère pour la stabilité

Problème: On cherche donc des méthodes pour examiner les places de zéro de $Q(z)$ par rapport

au cercle d'unité.

Possibilités:

1. Soit $f(x, y) = |Q(z)|^2 = Q(z) \cdot \overline{Q(z)} = Q(z) \cdot Q(\bar{z}) \geq 0$, $z = x + iy$

f est une fonction réelle de x et y .

$$f(x, y) = |Q(z)|^2 \geq 0 \rightsquigarrow Q(z) = Q(\bar{z}) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) = 0 \Leftrightarrow f(x, y) \rightarrow \text{Min}$$

Par conséquent on doit chercher les places de zéro ou les minimums de $f(x, y)$.

On a par conséquent ici la possibilité de traiter le problème des places de zéro ou des minimums à l'aide du calcul différentiel ou des algorithmes numériques pour trouver les places de zéro dans le réel de façon classique.

2. $Q(z) = a_n (z - \alpha_1) (z - \alpha_1) \cdot \dots \cdot (z - \alpha_n) = a_n (z^n - (\alpha_1 + \dots + \alpha_n) z^{n-1} + \dots \pm \alpha_1 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n)$
 $= a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_0$ (Théorème fondamental de l'algèbre)

$$\rightsquigarrow \frac{a_0}{a_n} = \pm \alpha_1 \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n, \quad \left| \frac{a_0}{a_n} \right| = |\alpha_1| |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$$

Si maintenant on a $\left| \frac{a_0}{a_n} \right| > 1$, dans le produit $|\alpha_1| |\alpha_2| \cdot \dots \cdot |\alpha_n|$ au moins un facteur est plus grand que 1, c.-à.-d. on a l'**instabilité**.

3. Il y a le **critère de stabilité de Jury**. Là, il s'agit d'une recette plus longue, voir la littérature (p.ex. Glyn James, Advanced Modern Engineering Math., p. 260 ff).

5.5 Plissement

5.5.1 L'idée

Nous posons la question de la généralisation du rapport consécutif:

$$Y(z) = Y_\delta(z) = Y_\delta(z) \cdot 1 = G(z) \cdot 1$$

Généralisé: $Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z)$, $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k$

Pour la suite d'input $\{u_k\}$ il vaut:

$$\{u_k\} = \{u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_n, \dots\} = u_0 \{\delta_k\} + u_1 \{\delta_{k-1}\} + u_2 \{\delta_{k-2}\} + \dots + u_n \{\delta_{k-n}\} + \dots \quad \text{avec}$$

$$\{\delta_k\} = \{\delta_{k-(0)}\} = \{1, 0, 0, 0, \dots\}, \quad \{\delta_{k-(1)}\} = \{0, 1, 0, 0, \dots\}, \quad \{\delta_{k-(2)}\} = \{0, 0, 1, 0, 0, \dots\}$$

$$\delta_{k-(j)} : = \begin{cases} 0 & k \neq j \\ 1 & k = j \end{cases}$$

P.ex. pour $k = n$ il vaut donc $\delta_{k-(n)} = 1$, = 0 dans les autres cas. Quant à $\delta_{k-(n)} = 1$ il s'agit par conséquent d'une séquence d'impulsions déplacées vers $k = j$. Nous avons donc décomposée la suite d'entrée en une somme de suites d'input $\{u_k\}$ déplacées, pondérées.

Au départ le système soit en état de repos. A cause de la linéarité il vaut:

Conclusion: La réponse du système $\{y_k\}$ est une somme de réponses d'impulsions déplacées et pondérées.

Par conséquent les classements suivants sont valables:

$$\begin{aligned} \{\delta_k\} & \circ \bullet \quad \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \{y_{\delta_k}\}, \\ \delta_{k-(j)} & \circ \bullet \quad \mathcal{Z}\{\delta_{k-(j)}\} = \{y_{\delta_{k-(j)}}\}, \\ u_j \cdot \delta_{k-(j)} & \circ \bullet \quad \mathcal{Z}\{u_j \cdot \delta_{k-(j)}\} = u_j \cdot \{y_{\delta_{k-(j)}}\}, \\ \{u_j\} & \circ \bullet \quad \mathcal{Z}\{\delta_k\} = \{y_k\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightsquigarrow \{y_k\} &= \sum_{j=1}^{\infty} u_j \cdot \{y_{\delta_{k-(j)}}\} = u_0 \cdot \{y_{\delta_k}\}_{k=0}^{\infty} + u_1 \cdot \{y_{\delta_{k-(1)}}\}_{k=0}^{\infty} + u_2 \cdot \{y_{\delta_{k-(2)}}\}_{k=0}^{\infty} + \dots \\ &= u_0 \cdot \{y_{\delta_{0-(0)}}, y_{\delta_{1-(0)}}, y_{\delta_{2-(0)}}, \dots, y_{\delta_{n-(0)}}, \dots\} + \\ &\quad u_1 \cdot \{0, y_{\delta_{1-(1)}}, y_{\delta_{2-(1)}}, \dots, y_{\delta_{n-(1)}}, \dots\} + \dots \\ &\quad + \dots + \\ &\quad u_0 \cdot \{0, 0, 0, \dots, \underbrace{y_{\delta_{n-(n)}}, y_{\delta_{n+1-(n)}}, \dots}_{\uparrow \rightsquigarrow y_n}\} + \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$\rightsquigarrow y_n = \sum_{j=0}^n u_j y_{\delta_{n-(j)}}$$

(Addition par colonne dans le schéma ci-dessus!)

$$\rightsquigarrow \{y_k\} = M \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}}$$

Définition: La somme en haut $\{y_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\}$ s'appelle **plissement**.

Symbole: Soit $y_{\delta_{k-(j)}} := v_{k-j} \Rightarrow \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} \right\} := \{u_k\} * \{v_k\}$

Exemple: **Donné:** $G(z) = \frac{z}{z + \frac{1}{2}}$

Trouver: Réponse indicielle

(A) Calcul direct:

$$\begin{aligned} \{h_k\} &= \{1, 1, 1, \dots\} \Rightarrow Y(z) = G(z) \cdot \mathcal{Z}\{h_k\} = Y_{\delta}(z) \cdot \mathcal{Z}\{h_k\} \\ a = 1 &\Rightarrow a^k = 1^k = 1 \Rightarrow \mathcal{Z}\{h_k\} = \frac{z}{z-1} \\ \Rightarrow Y(z) &= \frac{z}{z + \frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{z + \frac{1}{2}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-1} \bullet \circ \{y_k\} = \left\{ \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k + \frac{2}{3} \cdot 1^k \right\} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} \end{aligned}$$

(B) Calcul indirect:

$$\begin{aligned} \{y_{\delta_k}\} &= \mathcal{Z}^{-1}\{G(z)\} = \mathcal{Z}^{-1}\left\{\frac{z}{z + \frac{1}{2}}\right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} \\ \Rightarrow \{y_k\} &= \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-(j)}} \right\} \stackrel{u_j=1}{=} \left\{ \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-j} \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k \left(-\frac{1}{2}\right)^{-j} \right\} = \left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \sum_{j=0}^k (-2)^j \right\} = \\ &\left\{ \left(-\frac{1}{2}\right)^k \frac{1 - (-2)^{k+1}}{1 - (-2)} \right\} = \left\{ \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k (1 - (-2)^{k+1}) \right\} = \left\{ \frac{1}{3} \left(\left(-\frac{1}{2}\right)^k - (-2)^k \right) \right\} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \left(-\frac{1}{2}\right)^k \right\} \end{aligned}$$

Généralisation:

Soit $Y(z) = G(z) \cdot U(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z)$, $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u_k z^{-k} = u_0 + \frac{u_1}{z} + \frac{u_2}{z^2} + \frac{u_3}{z^3} + \dots$

$$Y_\delta(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y_{\delta_k} z^{-k} = y_{\delta_0} + \frac{y_{\delta_1}}{z} + \frac{y_{\delta_2}}{z^2} + \frac{y_{\delta_3}}{z^3} + \dots$$

$$\Rightarrow Y(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z) = u_0 y_{\delta_0} + (u_0 y_{\delta_1} + u_1 y_{\delta_0}) \cdot \frac{1}{z} + (u_0 y_{\delta_2} + u_1 y_{\delta_1} + u_2 y_{\delta_0}) \cdot \frac{1}{z^2} + \dots := \sum_{k=0}^{\infty} t_k \cdot \frac{1}{z^k}.$$

$$t_k = \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}} \Rightarrow Y(z) = Y_\delta(z) \cdot U(z) \bullet \circ \{y_k\} = \{t_k\} = \left\{ \sum_{j=0}^k u_j y_{\delta_{k-j}} \right\}$$

Règle:

Hyp.:

Soit

$$v_k = y_{\delta_k}, \quad \mathcal{Z}\{u_k\} = U(z), \quad \mathcal{Z}\{v_k\} = V(z)$$

Thè.:

$$U(z) \cdot V(z) = \mathcal{Z}\left\{ \sum_{j=0}^k u_j v_{k-j} \right\} = \mathcal{Z}\{\{u_k\} * \{v_k\}\}$$

Remarque: Il vaut:

$$\mathcal{Z}\{\{u_k\} * \{v_k\}\} = U(z) \cdot V(z) = V(z) \cdot U(z) = \mathcal{Z}\{\{v_k\} * \{u_k\}\} \Rightarrow \{u_k\} * \{v_k\} = \{v_k\} * \{u_k\}$$

Le processus de plissement est donc commutatif!

Corollaire:

$$\{u_k\} * \{v_k\} = \{v_k\} * \{u_k\}$$

5.6 Transformation de Laplace et en z

Ici nous voulons clarifier le rapport entre la transformation de Laplace et la transformation en z.

Nous considérons la suite: $\{f(nT)\} = \{f(0), f(T), f(2T), \dots, f(nT), \dots\}$

Nous pouvons construire cette suite par la fonction $f(t)$ aux places $t = n \cdot T$, en utilisant la „fonction de suppression“ (distribution!) suivante:

$$\hat{f}(t) := \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

$$\Rightarrow \hat{f}(nT) = f(nT) \cdot \delta(nT - nT) = f(nT) \cdot \delta(0), \quad \hat{f}(t) = 0 \quad \text{pour } t \neq nT, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

\leadsto Transformation de Laplace:

$$\mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \delta(t - nT) \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \int_0^{\infty} e^{-st} \delta(t - nT) dt = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) e^{-snT} \delta(t - nT)$$

$$\text{Soit } z := e^{+sT} \in \mathbb{C} \quad \text{avec } s \in \mathbb{C} \Rightarrow \mathcal{L}\{\hat{f}(t)\} = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) z^{-n} \delta(t - nT) := F(z)$$

$$\text{Ainsi nous avons pour } k = n: \underbrace{\mathcal{Z}\{f(kT)\}}_{:=a_k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(kT)}{z^k} = F(z) = \mathcal{L}\{\hat{f}(t)\}$$

Conséquence:

Hyp.:

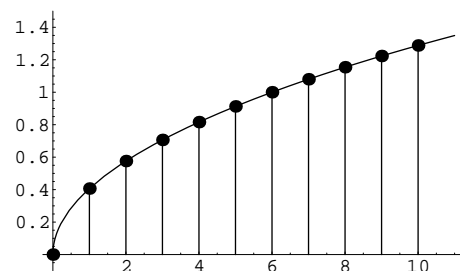
$$\hat{f}(t) := \sum_{k=0}^{\infty} f(t) \cdot \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \cdot \delta(t - kT), \quad z := e^{+sT}, \quad s := \frac{\ln(z)}{T}$$

Thè.:

La transformée en z de $\{f(kT)\}$ est la transformée de Laplace de $\hat{f}(t)$.

Remarque:

$f(kT)$ décrit une série de mesures avec des intervalles de temps fixes T .



5.7 Applications d'ingénieur

Voir Littérature: Glyn James, Advanced Modern Engineering Mathematics, Addison Wesley, p. 268 ff.

Kapitel • Chapitre 6

Analyse vectorielle

6.1 Les bases

6.1.1 Introduction

L'analyse vectorielle met à disposition des notions et des théorèmes qui forment le fondement pour la formulation de beaucoup de faits physiques. Sans elle, par exemple dans les domaines suivants, on reste dans les bases modestes: La mécanique, l'électrostatique et électrodynamique, thermodynamique etc..

6.1.2 Opérateurs sur des fonctions scalaires et vectorielles

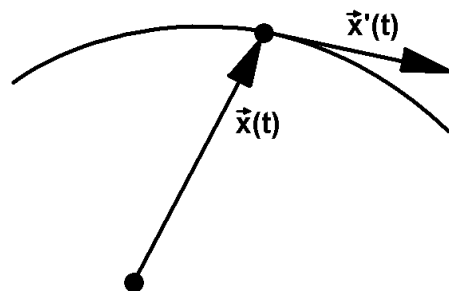
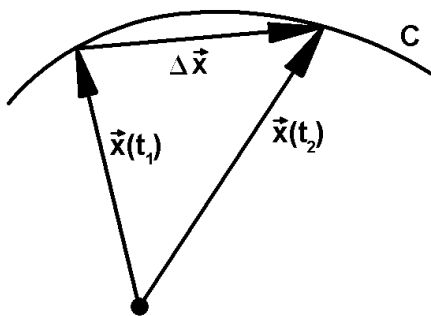
Exemple opérateur différentiel

Du cours d'analyse ainsi que p.ex. des transformations de Laplace nous connaissons déjà des opérateurs différentiels et des opérateurs d'intégrales. Nous considérons comme exemple d'un tel opérateur:

$$\frac{d}{dt} : \vec{x}(t) \mapsto \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \frac{dx_1(t)}{dt} \cdot \vec{e}_1 + \dots + \frac{dx_n(t)}{dt} \cdot \vec{e}_n = \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$$

Si $\vec{x}(t)$ signifie la voie d'un point de masse, $\vec{x}'(t)$ signifie donc le vecteur de tangente resp. le vecteur de vitesse.

$$\vec{x}'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$



Nous appliquons la définition suivante:

- Définition:**
- (1) $\vec{x}(t)$ dérivab. $\Leftrightarrow \forall_i x_i(t)$ dérivab.
 - (2) $\vec{x}(t)$ continue $\Leftrightarrow \forall_i x_i(t)$ continue

Règles de différentiation

Pour simplifier la chose, nous raccourcissons les symboles un peu dans ce qui suit:

Symbole: $\vec{x}(t) := \vec{x}, \quad \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \vec{x}^T \cdot \vec{y} := \vec{x} \bullet \vec{y}$

($\vec{x}^T \cdot \vec{y}$ est le produit matriciel.)

Règles:

1. $(\vec{x} + \vec{y})' = \vec{x}' + \vec{y}'$
2. $(\vec{x} \bullet \vec{y})' = \vec{x}' \bullet \vec{y} + \vec{x} \bullet \vec{y}'$
3. $(\vec{x} \times \vec{y})' = \vec{x}' \times \vec{y} + \vec{x} \times \vec{y}'$
4. $(f(t) \cdot \vec{x})' = f(t)' \cdot \vec{x} + f(t) \cdot \vec{x}'$
5. $(\vec{x} \bullet (\vec{y} \times \vec{z}))' = (\vec{x}' \bullet (\vec{y} \times \vec{z})) + (\vec{x} \bullet (\vec{y}' \times \vec{z})) + (\vec{x} \bullet (\vec{y} \times \vec{z}'))$
6. $(\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}))' = (\vec{x}' \times (\vec{y} \times \vec{z})) + (\vec{x} \times (\vec{y}' \times \vec{z})) + (\vec{x} \times (\vec{y} \times \vec{z}'))$

Remarque:

À (5) il s'agit du produit mixte (déterminant) et à (6) du produit de Grassmann. La vérification des règles est élémentaire et se fait en calculant. (P.ex. possible avec Mathematica ...)

Différentielles de fonctions vectorielles

Nous définissons les différentielles de fonctions vectorielles comme il suit:

Définition:

$$\text{Soit } \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \rightsquigarrow d\vec{x} := dx_1 \vec{e}_1 + \dots + dx_n \vec{e}_n = \begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } \vec{v} = \vec{v}(x_1, \dots, x_n) = v_1(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_1 + \dots + v_m(x_1, \dots, x_n) \vec{e}_m = \begin{pmatrix} v_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ v_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow d\vec{v} := \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial \vec{v}}{\partial x_n} dx_n = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial v_1}{\partial x_n} dx_n \\ \vdots \\ \frac{\partial v_m}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial v_m}{\partial x_n} dx_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dv_1 \\ \vdots \\ dv_m \end{pmatrix}$$

D'après les règles connues sur les différentielles il vaut:

Règles:

1. $df = f'_{x_1} dx_1 + \dots + f'_{x_n} dx_n = \text{grad } f \cdot d\vec{x}$
2. $d(\vec{u} + \vec{v}) = d\vec{u} + d\vec{v}$
3. $d(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \vec{u} \cdot d\vec{v} + \vec{v} \cdot d\vec{u}$
4. $d(\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{u} \times d\vec{v} + \vec{v} \times d\vec{u}$

6.2 Champs

6.2.1 La notion du champ

Soit $V \subseteq \mathbb{R}^n$, $P = P(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_n) \in V$

P.ex. spéc. $n = 3$, $P = P(x, y, z)$

Soit φ une fonction: $\varphi: V \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi: (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_n)$

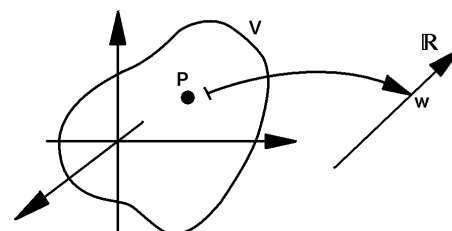
Définition:

Une telle fonction φ , qui généralement est dérivable de façon continue, s'appelle **champ scalaire**.

Soit $n = 3$

Par le champ scalaire φ on applique donc à chaque point $P(x, y, z) \in V$ une valeur $w = \varphi(x, y, z)$.

$\leadsto (x, y, z, w) = (x, y, z, \varphi(x, y, z)) \in \mathbb{R}^4$



Remarque:

Aux champs scalaires, les notions connues **ligne de niveau**, **surface de niveau**, **hypersurface de niveau** sont importantes. (Z.B. $\varphi(x, y, z) = \text{const.}$)

Correspondamment soit $\vec{\Phi}$ une fonction vectorielle: $\vec{\Phi}: V \mapsto \mathbb{R}^m$, $\vec{\Phi}: (x_1, \dots, x_n) \mapsto$

$$\vec{\Phi}(x_1, \dots, x_n) := \vec{u}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} u_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ u_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

P.ex. spéc. $n = 3$, $P = P(x, y, z)$, $\vec{\Phi}: (x, y, z) \mapsto \vec{\Phi}(x, y, z) := \vec{u}(x, y, z)$

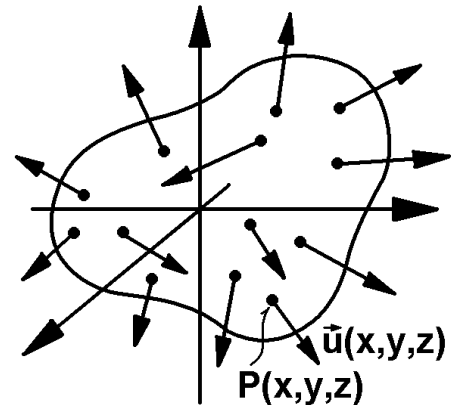
Définition:

Une telle fonction Φ , qui généralement est dérivable de façon continue, s'appelle **champ vectoriel**.

Soit $n = 3$

Par le champ vectoriel Φ on applique donc à chaque point $P(x, y, z) \in V$ un vecteur $\vec{u} = \Phi(x, y, z) \in \mathbb{R}^m$.

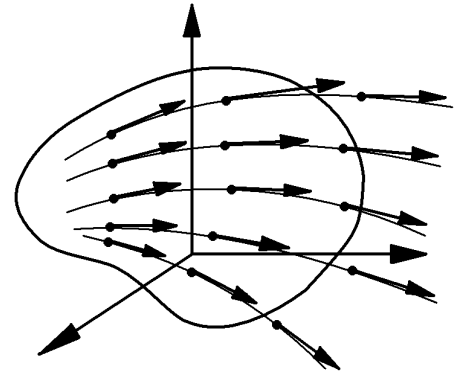
$\leadsto (x_1, \dots, x_n, u_1, \dots, u_m) \in \mathbb{R}^{n+m}$



Maintenant nous venons à une notion compréhensible pour laquelle nous ne voulons pas donner la définition exacte tout de suite ici. (Pourquoi nous renonçons à celle-ci, nous le remarquerons bientôt.)

Notion:

Une **ligne vectorielle** est une ligne qu'on s'imagine dans un champ vectoriel le long des vecteurs $\vec{u}(x_1, \dots, x_n)$, qui sont alors des vecteurs tangentiels à cette ligne.



Comme avec les vecteurs de tangente on rencontre des dérivées de premier ordre, les lignes vectorielles doivent se trouver et aussi se laisser définir ainsi que les courbes de solutions de systèmes d'équations différentielles, analogiquement aux courbes d'intégrales connues dans le champ de direction d'une équation différentielle de premier ordre. Nous voulons renoncer ici à la définition exacte.

6.2.2 Types de champs

Notions:

Les **champs stationnaires** sont indépendants du temps. P.ex.: $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(x, y, z)$, $\vec{u}(x, y, z, t) = \vec{u}(x, y, z)$

Les **champs instationnaires** sont dépendants du temps. P.ex.: $\exists_{t_1, t_2, x, y, z} : \varphi(x, y, z, t_1) \neq \varphi(x, y, z, t_2)$

Les **champs homogènes** sont indépendants du lieu. P.ex.: $\varphi(x, y, z, t) = \varphi(t)$

Les **champs centraux** ne sont dépendants que d'une distance à un centre. P.ex.: $\varphi(x, y, z, t) = \tilde{\varphi}(r)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

Beispiele: Exemples:

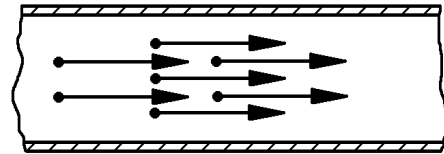
Champs scalaires: Température(x, y, z, t), densité(x, y, z) etc..

Champs vectoriels: Champ électrique \vec{E} , champ magnétique $\vec{\Phi}$, champ de force \vec{F} , champ de vitesse \vec{v} , etc..

Exemple 1:

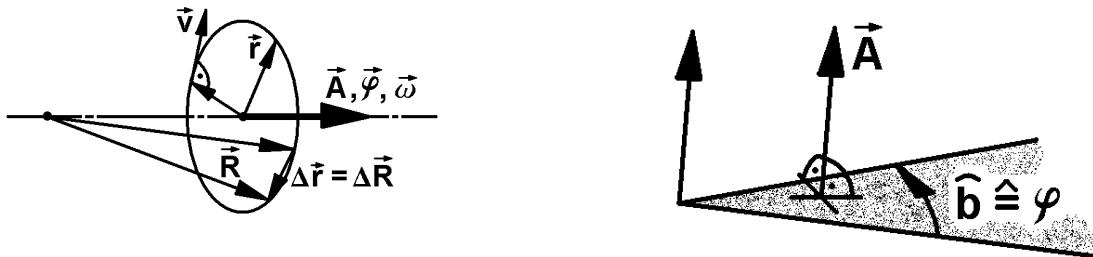
Champ de vitesse d'un gaz dans une conduite.

$\vec{v} = \text{const.} \rightsquigarrow \sim$ homogène



Exemple 2:

Champ de vitesse pour une rotation autour d'un axe. (L'angle est un morceau de surface décollé par deux droites d'une plane. La surface est représentée par un vecteur, par conséquent aussi l'angle est représentée par un vecteur. La vitesse d'angle est donc un vecteur avec la même direction, parce que le temps est un scalaire.)



$$\rightsquigarrow \Delta \vec{R} = \Delta \vec{r}, \quad \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} \perp \vec{r}, \quad \vec{v}, \vec{r} \perp \vec{A} \parallel \vec{\varphi} \Rightarrow \vec{v}, \vec{r} \perp \vec{\varphi} \rightsquigarrow \vec{v} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \times \vec{r} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

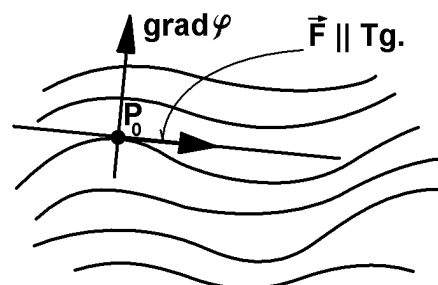
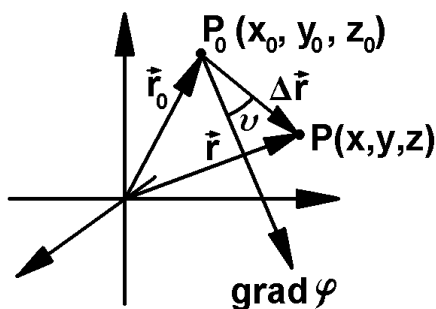
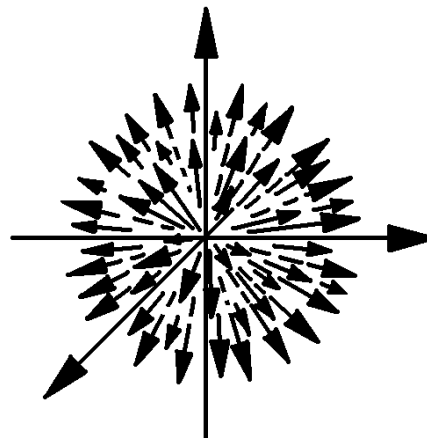
Exemple 2:

Champ de Coulomb (champ central):

$$\vec{F} = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^2} \cdot \vec{e}_r = c \cdot \frac{Q \cdot q}{r^3} \cdot \vec{r} = E(\vec{r}) \cdot q,$$

$$E(\vec{r}) = c \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r}$$

$$\leadsto E(\vec{r}) = \begin{pmatrix} c \cdot Q \cdot x \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ c \cdot Q \cdot y \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \\ c \cdot Q \cdot z \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$



La chose paraît semblable pour le champ de gravitation:

$$-\gamma \cdot \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_r$$

$$\vec{F} = -\gamma \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r = \vec{g}(\vec{r}) \cdot m = \vec{g} \cdot m, \quad \vec{g}(\vec{r}) =$$

6.3 Gradient, divergence, rotationnel

6.3.1 Opérateurs de Laplace et nabla

Remarque:

Dans la considération consécutive, nous nous référons toujours au \mathbb{R}^3 . Dans le \mathbb{R}^n , il faut faire une adaptation correspondante. Nous définissons d'abord deux opérateurs différentiels importants:

Définition:

$$\nabla := \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$$

s'appelle **opérateur nabla** ou **opérateur de Hamilton**

Avec l'opérateur nabla on peut définir les notions importantes **gradient**, **divergence** et **rotationnel**.

6.3.2 Définition de grad, div et rot

Définition:
$$\Delta := \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$
s'appelle **opérateur de Laplace**

Du cours d'analyse nous connaissons déjà le gradient. Nous répétons la définition ici. Soient $\varphi(x, y, z)$ un champ scalaire dérivable. Alors il vaut:

Définition:
$$\text{grad}(\varphi) = \text{grad } \varphi := \nabla \varphi = \vec{e}_1 \varphi'_x + \vec{e}_2 \varphi'_y + \vec{e}_3 \varphi'_z = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix}$$
s'appelle **gradient** de φ

Remarque:

∇ transforme un champ scalaire φ en un champ vectoriel $\text{grad } \varphi$.

Définition:

$P(x, y, z)$ s'appelle **point stationnaire**, s'il vaut:

$$\text{grad } \varphi(x, y, z) = \vec{0}$$

Soit $\vec{u}(x, y, z)$ un champ vectoriel dérivable.

Définition:
$$\text{div } \vec{u} := \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$
$$= (u_1)'_x + (u_2)'_y + (u_3)'_z = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$
s'appelle **divergence** de \vec{u}

Remarque:

$(\nabla \cdot)$ transforme un champ vectoriel \vec{u} en un champ scalaire $\text{div } \vec{u} \in \mathbb{R}^1$.

Soit de nouveau $\vec{u}(x, y, z)$ un champ vectoriel dérivable.

Définition:
$$\text{rot } \vec{u} := \nabla \times \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \frac{\partial}{\partial x} & u_1 \\ \vec{e}_2 & \frac{\partial}{\partial y} & u_2 \\ \vec{e}_3 & \frac{\partial}{\partial z} & u_3 \end{vmatrix}$$
$$= \vec{e}_1 ((u_3)'_y - (u_2)'_z) + \vec{e}_2 ((u_1)'_z - (u_3)'_x) + \vec{e}_3 ((u_2)'_x - (u_1)'_y)$$
s'appelle **rotationnel**⁸ de \vec{u}

Remarque:

$(\nabla \times)$ transforme un champ vectoriel \vec{u} en un champ vectoriel $\text{rot } \vec{u}$.

6.3.3 Formules avec grad, div et rot

On obtient les formules suivantes par comparaison des expressions coordonnées à gauche et à droite des signes d'égalité (calculs simples, p. ex. possible avec Mathematica, exercice pour le lecteur).

Formules:

Hyp.:

Ses fonctions utilisées soient assez souvent dérivables de façon continue.

Thè.:

$$\text{grad}(\lambda \varphi + \mu \psi) = \lambda \text{grad} \varphi + \mu \text{grad} \psi \quad (6.1)$$

$$\text{div}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \text{div} \vec{a} + \mu \text{div} \vec{b} \quad (6.2)$$

$$\text{rot}(\lambda \vec{a} + \mu \vec{b}) = \lambda \text{rot} \vec{a} + \mu \text{rot} \vec{b} \quad (6.3)$$

$$\text{div}(\varphi \cdot \vec{a}) = \text{grad} \varphi \cdot \vec{a} + \varphi \cdot \text{div} \vec{a} \quad (6.4)$$

$$\text{rot}(\varphi \cdot \vec{a}) = (\text{grad} \varphi) \times \vec{a} + \varphi \cdot \text{Rot} \vec{a} \quad (6.5)$$

$$\text{div}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot \text{rot} \vec{a} - \vec{a} \cdot \text{rot} \vec{b} \quad (6.6)$$

$$\text{rot}(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \cdot \text{div} \vec{b} - \vec{b} \cdot \text{div} \vec{a} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (6.7)$$

$$\text{grad}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times \text{rot} \vec{b} + \vec{b} \times \text{rot} \vec{a} + (\vec{b} \cdot \nabla) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} \quad (6.8)$$

$$\text{div}(\text{grad} \varphi) = \Delta \varphi \quad (6.9)$$

$$\text{rot}(\text{grad} \varphi) = \vec{0} \quad (6.10)$$

$$\text{div}(\text{rot} \vec{a}) = 0 \quad (6.11)$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \text{div}(\text{grad} \vec{a}) \quad (6.12)$$

$$\text{rot}(\text{rot} \vec{a}) = \text{grad}(\text{div} \vec{a}) - \Delta \vec{a} \quad (6.13)$$

$$\text{grad}(\text{div} \vec{a}) = \text{rot}(\text{rot} \vec{a}) + \text{div}(\text{grad} \vec{a}) \quad (6.14)$$

$$\vdots = \vdots$$

Remarque:

Les trois premières formules disent que grad , div und rot sont des opérateurs linéaires.

6.3.4 Signification de grad, div et rot

Le gradient

Nous avons déjà examiné la signification du gradient à l'exemple d'une fonction sur le \mathbb{R}^2 dans le cours d'analyse. Nous avons décelé là que le gradient est une fonction vectorielle qui est dans la plaine fondamentale (quantité d'original) perpendiculaire sur les lignes de niveau, qui "pointe vers le haut de la pente" et dont la longueur signifie la montée de tangente maximale (dérivée suivant une direction) dans

⁸engl. curl

le point en question. Correspondamment pour les fonctions dans le \mathbb{R}^n .

Il en était:

Définition:

$(\text{grad } \varphi \mathbf{C} \vec{e}_{\vec{r}})|_{P=P_0}$ s'appelle **dérivée suivant une direction** de φ à P_0 dans la direction \vec{r} .

Théorème:

Hyp.:

Soit C ligne de niveau resp. surface de niveau resp. hypersurface de niveau.

Thè.:

1. $\text{grad } \varphi \perp C$
2. $|\text{grad } \varphi| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{max} \geq \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|$
3. $\text{grad } \varphi \parallel \vec{r} \Rightarrow |\text{grad } \varphi| = \left| \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|$

Exemple: $\varphi(x, y) = x \cdot y \Rightarrow C : x \cdot y = \text{const.} = k, y = \frac{k}{x} (x \neq 0)$

$\leadsto C$: Hyperbôles! $\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$ pour $\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Point stationnaire: $\text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \leadsto \vec{r} = \vec{0}$

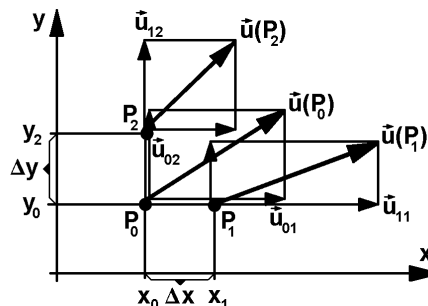
La divergence

Avec nos connaissances actuelles, l'explication de la divergence n'est que rudimentairement possible. Plus tard nous montrerons que la divergence a la signification d'une **force de source**. Pour expliquer cette idée, nous devons avancer d'abord dans la théorie jusqu' au théorème de la divergence de Gauss. Pour le moment, nous voulons nous contenter de la version suivante:

Soit $\text{div } \vec{u} = (u_1)'_x + (u_2)'_y + (u_3)'_z$

$$(u_1)'_x = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} (u_1(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - u_1(x_0, y_0, z_0))$$

$\leadsto (u_1)'_x$ décrit la croissance de \vec{u} en direction x .



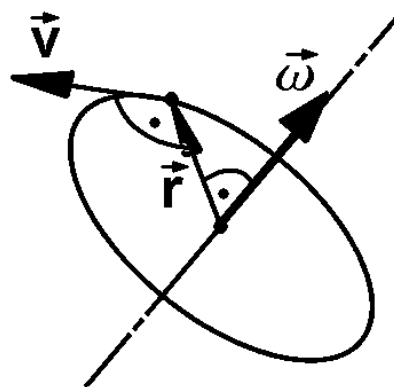
Correspondamment $(u_2)'_y$ décrit la croissance de \vec{u} en direction y , $(u_3)'_z$ décrit la croissance de \vec{u} en direction z .

↪ La divergence donne une mesure pour la force de la croissance des composantes dans la direction respective de ces composantes.

Soit p.ex. P_2 un point qui naît de P_1 par croissance de toutes les coordonnées. Si p.ex., au passage de P_1 à P_2 , u_1 croît seulement dans la direction x , u_2 seulement dans la direction y et u_3 seulement dans la direction z , toutes les composantes de \vec{u} ne croissent que dans la direction correspondante dans l'ensemble original. Par conséquent les composantes ont la tendance de tendre à se séparer au passage de P_1 à P_2 , c.-à-d. elles "divergent". (Voir esquisse.)

Le rotationnel

Il est raisonnable d'expliquer le rotationnel à l'aide d'un exemple. Nous choisissons le champ de vitesse à un mouvement rotatif d'un point de masse autour d'un axe.

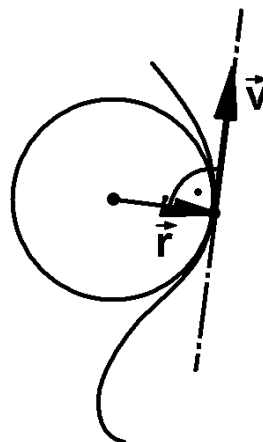


Soit \vec{v} le vecteur de vitesse. De la physique nous savons:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{rot } \vec{v} = \nabla \times \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_2 + \omega_2 \\ \omega_3 + \omega_3 \\ \omega_1 + \omega_1 \end{pmatrix} = 2\vec{\omega} \Rightarrow \text{rot } \vec{v} = 2\vec{\omega}$$

Nous considérons généralement \vec{v} le long d'une ligne vectorielle.



On peut s'imaginer \vec{v} localement comme vecteur de vitesse d'une rotation autour du centre du cercle de

courbure. $\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{v}$ est donc dans la première approximation la vitesse d'angle locale de ce mouvement de rotation imaginaire.

6.4 Champs conservateurs

6.4.1 Intégrales curvilignes de fonctions vectorielles

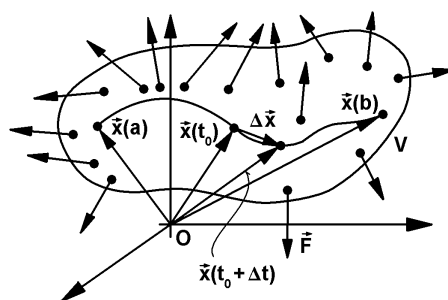
Notion

Nous connaissons les **intégrales de ligne** ou **intégrales curvilignes** depuis le cours d'analyse. Comme nous nous occuperons maintenant de telles intégrales, nous voulons considérer encore une fois les points qui sont plus importants pour nous.

Soit donnée une courbe γ (dérivable!):

$$\gamma: [a, b] \mapsto \{\vec{x}(t)\} \subset V \subseteq \mathbb{R}^n$$

$$|\gamma| := C: \text{ Trace}$$



$$\text{Soit } \vec{F} = \vec{F}(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} := \vec{F}(\vec{x}), \quad \mathbb{R}^n \ni \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x}) \in \mathbb{R}^n$$

$$\text{Soit sur } C: \quad \vec{F}(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x}(t))$$

Dans la physique et la technique, on rencontre souvent le travail ou l'énergie potentielle dans un champ de force \vec{F} . Par conséquent, les expressions de la sorte suivante sont importantes:

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{x}, \quad \Delta \vec{x} = \Delta \vec{s} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \cdot \Delta t \rightarrow d\vec{x} = \vec{x}'_t \cdot dt, \quad \vec{x}'_t = \text{vecteur tangentiel}$$

Accord:

À la simplification de l'orthographe, nous admettons l'inconséquence suivante, parce qu'elle ne dérange pas:

$$\text{Soit } P = P(x_1, \dots, x_n) := (x_1, \dots, x_n), \quad \overrightarrow{OP} = \vec{x} \rightsquigarrow f(P) := f(x_1, \dots, x_n) := f(\vec{x})$$

$$\text{Définition:} \quad W = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} := \int_{t=a}^{t=b} \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \vec{x}'_t(t) dt$$

s'appelle **intégrale curviligne** resp. travail le long de $|\gamma|$

L'intégrale curviligne est donc réduit à une intégrale avec une seule variable d'intégration et dépend par conséquent seulement du point initial A_γ et du point final E_γ de la courbe. Si on peut remplacer la courbe

dans le domaine de définition ingénieusement par une somme de courbes partielles le long des axes des coordonnées, il vaut ainsi:

Théorème: Hyp.:

$$|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2| \cup \dots \cup |\gamma_n|, E_{|\gamma_{k+1}|} = E_{|\gamma_k|}, \vec{F} = \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_n \end{pmatrix}$$

Thè.:

$$\int_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma_1|, x_1(a)}^{x_1(b)} F_1(\vec{x}) \cdot dx_1 + \dots + \int_{|\gamma_n|, x_n(a)}^{x_n(b)} F_n(\vec{x}) \cdot dx_n$$

Exemple:

$$\vec{F}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 3xy \\ 5z \\ 10x \end{pmatrix}, \gamma: t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 + 1 \\ 2t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, t \in [0, 2], \Rightarrow \vec{x}'_t(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Sur } |\gamma| \text{ il vaut: } \vec{F}(x, y, z) = \vec{F}(x(t), y(t), z(t)) = \begin{pmatrix} 3(t^2 + 1)(2t^2) \\ 5t^3 \\ 10(t^2 + 1) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \leadsto W &= \int_0^2 \vec{F} \cdot \vec{x}'_t dt = \int_0^2 \begin{pmatrix} 3(t^2 + 1)(2t^2) \\ 5t^3 \\ 10(t^2 + 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2t \\ 4t \\ 3t^2 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^2 (3(t^2 + 1)(2t^2))(2t) + (5t^3)(4t) + (10(t^2 + 1))(3t^2) dt = \int_0^2 30t^2 + 12t^3 + 50t^4 + 12t^5 dt = 576 \end{aligned}$$

Courbes fermées

Dans le cours d'analyse nous avons défini:

Définition: Nous appelons une **courbe fermée** si le point initial et le point final de la trace se superposent: $A_{|\gamma|} = E_{|\gamma|}$.

Pour l'intégrale curviligne sur une courbe fermée γ , nous appliquons le symbole suivant:

Symbole: $\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x}$

Exemple:

$$\text{Soit } \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, |\gamma| \text{ fermée: } \vec{x}(t_1) = \vec{x}(t_2), \vec{x}' = \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \oint_{|\gamma|} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x'_t \\ y'_t \\ z'_t \end{pmatrix} dt = \oint_{|\gamma_x|} a \cdot x'_t dt + \oint_{|\gamma_y|} b \cdot y'_t dt + \oint_{|\gamma_z|} c \cdot z'_t dt = a \oint_{|\gamma_x|} x'_t dt + b \oint_{|\gamma_y|} y'_t dt + \\ &c \oint_{|\gamma_z|} z'_t dt \end{aligned}$$

$$= a x \Big|_{x(t_1)}^{x(t_2)=x(t_1)} + b y \Big|_{y(t_1)}^{y(t_2)=y(t_1)} + c z \Big|_{z(t_1)}^{z(t_2)=z(t_1)} = a \cdot 0 + b \cdot 0 + c \cdot 0 = 0 \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$$

Le travail sur un chemin fermé est donc 0.

~> **Problème:** Est-ce que le travail est toujours 0 sur un chemin fermé ?— Ou est-ce que ce comportement dépend du champ \vec{F} ou bien du chemin γ ?

L'exemple suivant nous montre que l'intégrale curviligne resp. le travail sur un chemin fermé peut être inégal à 0:

$$\begin{aligned} \text{Soit } \vec{F}(x, y, z) &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{y} \\ \frac{1}{x} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma: \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sin(t)} \\ \frac{1}{\cos(t)} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} (1 + 1 + 0) dt = 4\pi \neq 0 \end{aligned}$$

6.4.2 Champs de vecteurs lamellaires et champs de potentiel

Soit $\varphi: \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathcal{C}^1$ dérivable de façon continue, p.ex. $n = 3$

~> $\vec{F}(\vec{x}) := \text{grad } \varphi = \nabla \varphi \in \mathcal{C}$ (continue) Dans cette situation nous définissons:

Définition:

Si pour une fonction donnée $\vec{F}(\vec{x})$ il existe une $\varphi(\vec{x})$ telle qu'il vaut $\text{grad } \varphi(\vec{x}) = \vec{F}(\vec{x})$, on appelle φ **fonction potentielle** de \vec{F} . D'autre part $\vec{F}(\vec{x})$ s'appelle **champ de vecteurs lamellaires** de φ .

Les champs de vecteurs lamellaires ont la belle qualité qu'à eux les intégrales curvilignes (c.-à.-d. le travail) est 0, c.-à.-d. l'équation d'énergie vaut:

$$\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} \nabla \varphi \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} \varphi'_{x_1} dx_1 + \dots + \varphi'_{x_n} dx_n = \oint_{|\gamma|} d\varphi = \varphi(\vec{x}) \Big|_{\vec{x}(t_1)}^{\vec{x}(t_2)=\vec{x}(t_1)} = \varphi(\vec{x}(t_1)) - \varphi(\vec{x}(t_1)) = 0$$

Théorème:

Hyp.:

Soit $\vec{F} = \text{grad } \varphi$ champ de vecteurs lamellaires
 Soit φ une fonction potentielle pour \vec{F} sur $V \subseteq \mathbb{R}^n$
 Soit γ chemin fermé, $|\gamma| \subset V$

Thè.:

$$\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0$$

Exemple: $\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \rightsquigarrow \exists$ fonction de potentiel: $\varphi(\vec{x}) = x \cdot y \cdot z + C \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ xy \end{pmatrix} \cdot d\vec{x} = 0$

Ici γ est un chemin fermé quelconque.

$$\text{Soit } \vec{F}_0(\vec{x}) = \begin{pmatrix} yz \\ xz \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour \vec{F}_0 il n'existe pas de fonction potentielle, comme on s'assure tout de suite par calcul.

6.4.3 Champs conservateurs

Définition:

$$\oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \quad \forall \gamma, \quad |\gamma| \subset V$$

Dans ce cas \vec{F} s'appelle **champ de potentiel** ou **champ conservateur**

Conclusion:

$$\vec{F} \text{ champ de potentiel} \\ \Rightarrow \vec{F} \text{ conservateur.}$$

Symbole: \vec{F} conservateur: $\vec{F} \in \text{Cons}$

Les champs conservateurs ont la qualité importante que là les intégrales curvilignes resp. le travail dépendent seulement du point initial et du point final du chemin, mais elles ne dépendent pas de la trace.

Théorème:

Hyp.:

$$\vec{F} \in \text{Cons}$$

γ_1, γ_2 deux chemins $\subset V$
avec $A_{\gamma_1} = A_{\gamma_2}, E_{\gamma_1} = E_{\gamma_2}$

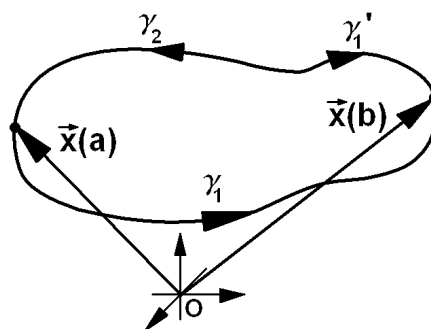
Thè.:

$$\int_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Quant à la preuve:

Soit $|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2|, |\gamma_2| = |-\gamma_1'|$

$$\begin{aligned} \leadsto 0 &= \oint_{|\gamma| = |\gamma_1| \cup |\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \oint_{|\gamma_2|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} + \oint_{|-\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &= \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} - \oint_{|\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \\ &\Leftrightarrow \oint_{|\gamma_1|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma_1'|} \vec{F} \cdot d\vec{x} \end{aligned}$$



Nous pouvons évidemment lire resp. poursuivre cette chaîne de conclusions de façon inverse. Par conséquent il vaut:

Corollaire:**Hyp.:**

$$\forall_{(\vec{x}(a), \vec{x}(b)) \in V^2} \int_{\vec{x}(a)}^{\vec{x}(b)} \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

Thè.:

$$\vec{F} \in \text{Cons}$$

Problème: Est-ce qu'un champ conservateur est toujours aussi un champ de vecteurs lamellaires d'une fonction de potentiel? C.-à-d. si l'équation d'énergie est valable, existe-t-il toujours aussi une fonction de potentiel? Nous allons étudier maintenant cette question.

Soit \vec{F} conservateur dans V .

$$\rightsquigarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0, \quad |\gamma| \subset V \Rightarrow I(t) := \int_{\vec{x}(t_0)}^{\vec{x}(t)} \vec{F} \cdot d\vec{x} \quad \text{ne dépend pas du chemin.}$$

$$\rightsquigarrow \frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dt} \int_{\vec{x}(t_0)}^{\vec{x}(t)} \vec{F} \cdot d\vec{x} = \frac{d}{dt} \int_{t_0}^t \vec{F}(\vec{x}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda = \vec{F}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

À cause de l'indépendance du chemin on peut choisir γ de façon spéciale. Si V a une forme raisonnable, ce que nous présupposons, nous pouvons composer $|\gamma|$ de morceaux parallèles aux axes. Sur un tel morceau, nous choisissons t égal à cette coordonnée x_k qui change exactement et actuellement sur ce morceau.

$$\rightsquigarrow \text{P.ex. le long de } |\gamma_k|: \frac{d}{dt} I(t) = \frac{d}{dx_k} I(x_k) = \vec{F}(\vec{x}(x_k)) \cdot \frac{\partial \vec{x}(x_k)}{\partial x_k}$$

$$\frac{\partial \vec{x}(x_k)}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \\ x_k \\ x_{k+1} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \frac{d}{dx_k} I(x_k) = \begin{pmatrix} \vdots \\ F_k(\vec{x}(x_k)) \\ \vdots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = F_k(\vec{x}(x_k)) \quad (\text{Au long de}$$

l'axe x_k , seulement la coordonnée x_k change, les autres coordonnées restent fixes comme paramètres.)

Comme le long de x_k il vaut: $t = x_k$, on peut comprendre $I(t) = I(x_k)$ là comme fonction de x_k . Au long des autres axes x_k est fixe comme paramètre et donc I est constant avec x_k , c.-à-d. I est de nouveau fonction de x_k . I est donc toujours fonction de x_k , indépendamment de la valeur de k . C.-à-d. $I = I(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$ avec $I_{x_k}'(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$.

Nous définissons maintenant: $\varphi(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) := I(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$

$$\text{Alors il vaut: } \text{grad } \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_{x_1} \\ \vdots \\ \varphi'_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$\rightsquigarrow \vec{F}(\vec{x})$ est champs de vecteurs lamellaires pour la fonction $\varphi(\vec{x})$ définie en haut. C.-à-d. si V est raisonnable, un champs de potentiel est toujours aussi champs de vecteurs lamellaires d'une fonction de potentiel.

Théorème:	<u>Hyp.:</u>	$\vec{F} \in \text{Cons}$ V raisonnable
	<u>Thè.:</u>	$\exists \varphi(\vec{x})$ à \vec{F} : $\varphi(\vec{x})$ est Fonction de potentiel pour \vec{F}

Résumé: Les champs conservateurs sont les champs où l'équation d'énergie est valable. Et exactement ces champs conservateurs sont aussi des champs de vecteurs lamellaires d'une fonction de potentiel φ qui donc existe.

Conséquence: Dans les champs conservateurs il vaut par conséquent:

$$\int_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma|} \text{grad } \varphi(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \int_{|\gamma|} d\varphi = \varphi \Big|_{\vec{x}(t_1)=A_{|\gamma|}}^{\vec{x}(t_2)=E_{|\gamma|}} = \varphi(E_{|\gamma|}) - \varphi(A_{|\gamma|}) = \Delta\varphi$$

\leadsto Différence de valeurs de la fonction de potentiel.

Soit maintenant $\varphi(\vec{x})$ la fonction de potentiel au champ de potentiel $\vec{F}(\vec{x}) = \text{grad } \varphi$. Soit $\vec{OP} := \vec{x}$.

Définition: $\varphi(P) := \varphi(\vec{OP})$ s'appelle **potentiel** dans le point P .
 $\Delta\varphi = \varphi(E_{|\gamma|}) - \varphi(A_{|\gamma|})$ s'appelle **différence de potentiel**.

Remarque:

Le potentiel a souvent physiquement la signification de **l'énergie potentielle** et le gradient à cela la signification de **l'intensité du champ**. L'intensité du champ permet de calculer la force du champ p. ex. sur une masse d'essai ou sur une charge d'essai.

$$\leadsto \text{P.ex.} \quad \vec{F} = \vec{E} \cdot q$$

6.4.4 Qualités, exemples

Les intégrales sont des opérateurs linéaires. Par conséquent les qualités de linéarité valent aussi pour les intégrales curvilignes:

$$\text{Il vaut:} \quad \int_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \Rightarrow \int_{|\gamma|} \lambda \cdot \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = \lambda \cdot \int_{|\gamma|} \vec{F}(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0,$$

$$\int_{|\gamma|} \vec{F}_1(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \wedge \int_{|\gamma|} \vec{F}_2(\vec{x}) \cdot d\vec{x} = 0 \Rightarrow \int_{|\gamma|} (\vec{F}_1(\vec{x}) \pm \vec{F}_2(\vec{x})) \cdot d\vec{x} = 0$$

Théorème:	<u>Hyp.:</u>	$\vec{F}_1(\vec{x}), \vec{F}_2(\vec{x}) \in \text{Cons}$ $\lambda_i \in \mathbb{R}$ oder $\lambda_i \in \mathbb{C}$
	<u>Thè.:</u>	$\lambda_1 \cdot \vec{F}_1(\vec{x}) \pm \lambda_2 \cdot \vec{F}_2(\vec{x}) \in \text{Cons}$

Exemple:

Champs centraux (les champs symétriques centraux ou sphériques)

$$\leadsto \varphi(\vec{x}) = \varphi(x, y, z) = \varphi(\vec{r}) = \varphi(r), \quad \text{grad } \varphi = \vec{F}(\vec{x}) = F(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{resp.} \\ r = \sqrt{\sum x_k^2} = (\sum x_k^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x_k} = \frac{1}{2} \cdot (\sum x_k^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x_k = \frac{x_k}{r} \Rightarrow \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x_k} = \varphi'_r \cdot \frac{x_k}{r} \quad \text{grad } \varphi = \varphi'_r \cdot \begin{pmatrix} \frac{x_1}{r} \\ r \\ \vdots \\ \frac{x_k}{r} \\ r \end{pmatrix} = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$$

Lemme: **Hyp.:** $\varphi(\vec{x}) = \varphi(r)$ fonction de potentiel d'un champ central

Thè.: $\text{grad}(\varphi) = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$

A l'aide de ce lemme on peut déduire le théorème suivant:

Théorème: **Hyp.:**

$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{Z}(\vec{r}) \leadsto$ champ central raisonnable

Thè.:

(1) $\vec{F}(\vec{x}) = \vec{Z}(\vec{r})$ champ de potentiel

(2) $\varphi_C(r) := \int_{t(R_0)}^{t(r)} \vec{F}(\vec{x}(\lambda)) \cdot \frac{d\vec{x}(\lambda)}{d\lambda} d\lambda + C = \int_{R_0}^r \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + C$

est fonction potentielle

Remarque: Une fonction de potentiel est définie seulement jusqu'à une constante C additive, elle doit donc encore être normalisée. Cette constante disparaît à la formation du gradient.

Quant à la preuve:

$$\text{Il vaut:} \quad \nabla \varphi = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'_r \cdot r'_x \\ \varphi'_r \cdot r'_y \\ \varphi'_r \cdot r'_z \end{pmatrix} = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$$

$$\varphi'_r(r) = \frac{d}{dr} \left(\int_{R_0}^r \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot d\vec{x} \right) = \frac{d}{dr} \left(\int_{\lambda_0}^{\lambda} \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot \left(\frac{d}{d\lambda} \vec{x} \right) d\lambda \right) \Big|_{|\vec{x}|=r=|\vec{r}} \vec{Z}(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} \vec{r} \right) = \vec{Z}(r) \cdot \left(\frac{d}{dr} (r \cdot \vec{e}_{\vec{r}}) \right) \\ = \vec{Z}(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot 1 = Z(r) \Rightarrow \nabla \varphi = \varphi'_r \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = Z(r) \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = \vec{Z}(r) \Rightarrow \nabla \varphi = \vec{Z}(r)$$

Le champ central $\vec{Z}(r)$ est par conséquent champ de vecteurs lamellaires de la fonction de potentiel $\varphi = \int_{R_0}^r \vec{Z}(|\vec{x}|) \cdot d\vec{x}$ que nous avons définie au début.

Exemple: **Champ de Coulomb:** $\varphi(r) = c_0 \mathbf{C} \frac{1}{r} + c_1$

$$\leadsto \text{ Intensité du champ: } \quad \nabla\varphi = \varphi'_r \cdot \vec{e}_r = -c_0 \mathbf{C} \frac{1}{r^2} \cdot \vec{e}_r = -c_0 \mathbf{C} \frac{1}{r^3} \cdot \vec{r} = \frac{c_2 \vec{r}}{r^3}$$

6.4.5 Champs conservateurs et rotationnel

Dans le cours d'analyse nous avons défini des **régions** ou des **volumes connexes de manière simple**. Comme nous savons, on peut, dans une telle région ou dans de tels volumes, déformer des chemins quelconques entre les mêmes points initiaux et finaux l'un dans l'autre continuellement. Soit donné un tel volume dans ce qui suit:

$$\begin{aligned} \text{Soit } \vec{F}(\vec{x}) \in \text{Cons}, \quad \vec{F} \text{ assez souvent dérivable de façon continue } \leadsto \exists \varphi : \vec{F}(\vec{x}) = \text{grad}(\varphi(\vec{x})) = \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \varphi'_x \\ \varphi'_y \\ \varphi'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi''_{zy} - \varphi''_{yz} \\ \varphi''_{xz} - \varphi''_{zx} \\ \varphi''_{yx} - \varphi''_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \text{car p.ex. } \varphi''_{zy} = \varphi''_{yz} \quad \text{etc..} \end{aligned}$$

Ci-dessous nous montrerons à l'aide du **théorème de Stokes** que dans les volumes connexes de manière simple il vaut:

Lemme: $\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F} \in \text{Cons}$

Nous obtenons ainsi **un critère simple** pour constater si un champ est conservateur, c.-à.-d. si là l'équation d'énergie est respectée! Par ailleurs c'est franchement une exigence physique à une situation réelle! (P. ex. équation de Maxwell $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ pour les champs électriques!)

Théorème: **Hyp.:** V connexe de manière simple
 $\vec{x} \in V, \vec{F} : \vec{x} \mapsto \vec{F}(\vec{x})$ assez souvent
dérivable de façon continue

Thè.: $\vec{F} \in \text{Cons} \Rightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0}$

Conséquence: Si on a donné un champ vectoriel avec $\vec{F} \in \mathbb{R}^3$, ainsi on peut interpréter toujours formellement ce champ vectoriel comme le champ de vitesse à la rotation d'un point de masse autour d'un axe, ce qui n'est pas interdit, n'importe ce que \vec{F} signifie vraiment. $\text{rot } \vec{F} = \vec{0}$ signifie que \vec{F} ne peut pas être interprété localement et formellement comme champ de vitesse d'une masse de points tournant autour d'un axe, car dans un tel champ de vitesse il vaut $\text{rot } \vec{F} = 2\vec{\omega} \neq \vec{0}$, si jamais une vitesse existe. Mais on peut comprendre un tel mouvement de rotation aussi comme tourbillon. Par conséquent nous venons à l'interprétation suivante:

Conclusion: $\text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow \vec{F}$ "libre de tourbillons"

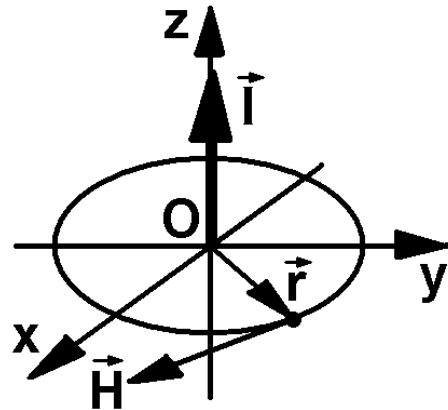
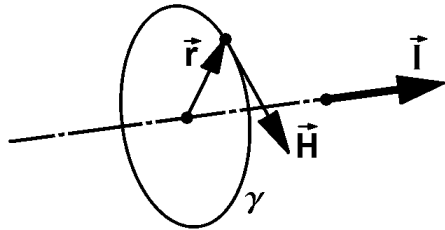
Conséquence:

Soit V connexe de manière simple et raisonnable
 Soit \vec{F} raisonnable

L'équation d'énergie est valable

$$\Leftrightarrow \vec{F}(\vec{x}) \in \text{Cons} \Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{F} \cdot d\vec{x} = 0 \forall |\gamma| \subset V \Leftrightarrow \exists \varphi(\vec{x}) : \text{grad } \varphi = \vec{F}$$

6.4.6 Exemple: Conducteur alimenté de courant électrique



Physique: $\vec{H} = \frac{I}{2\pi} \times \frac{\vec{e}_{\vec{r}}}{r}, |\vec{r}| = r$ Soit $I \neq 0$

Opter le système de coordonnées spécialement de façon que le courant circule parallèlement à l'axe z .

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{I} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix}, \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e}_{\vec{r}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \vec{H} &= \frac{\vec{I}}{2\pi} \times \frac{\vec{e}_{\vec{r}}}{r} = \frac{1}{r \cdot 2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ I \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{r} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{r^2 \cdot 2\pi} \cdot \begin{pmatrix} -Iy \\ Ix \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{H} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \left(\frac{I}{2\pi \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \right) = \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{-y}{x^2 + y^2} \\ \frac{x}{x^2 + y^2} \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{(x^2 + y^2) - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} & -\frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \\ \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \frac{x^2 + y^2 - 2x^2 + x^2 + y^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0} \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{H} &\in \text{Cons} \end{aligned}$$

Problème:

Soit $|\gamma| = K_1(0)$ (Cercle autour de O avec $r = 1$)

$$\leadsto \text{ Il vaut: } \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{x} &= \oint_{|\gamma|} \frac{I}{2\pi \cdot (x^2 + y^2)} \cdot \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi \cdot ((\cos(t))^2 + (\sin(t))^2)} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ 0 \end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi \cdot 1} \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t)) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{I}{2\pi} \cdot 1 dt = \frac{I \cdot 2\pi}{2\pi} = I \neq 0 \end{aligned}$$

$$\leadsto \left(\oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{x} \neq 0 \Rightarrow \vec{H} \notin \text{Cons} \right) \wedge \left(\text{rot } \vec{H} = \vec{0} \Rightarrow \vec{H} \in \text{Cons} \right) \Rightarrow \left(\vec{H} \notin \text{Cons} \right) \wedge \left(\vec{H} \in \text{Cons} \right) \leadsto \text{Contradiction!}$$

\leadsto Qu'est-ce qui est faux ici?

Solution: Encore une fois nous n'avons pas respecté les conditions mathématiques! V n'est pas connexe de manière simple. Pour $r = 0$, \vec{H} n'est pas défini, comme on voit tout de suite.

Nous voulons encore calculer le **fonction de potentiel**. Nous savons que la fonction de potentiel dépend seulement de r , mais ne dépend pas de l'angle dans le plan xy , car la projection dans ce plan est un champ central.

$$\text{Soit } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{H}(\vec{x}(t)) = \frac{I}{2\pi \cdot (r^2 \cos^2(t(r)) + r^2 \sin^2(t(r)))} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin(t(r)) \\ r \cos(t(r)) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{I}{2\pi \cdot r^2} \cdot \begin{pmatrix} -r \sin(t(r)) \\ r \cos(t(r)) \\ 0 \end{pmatrix} = \text{grad } \varphi$$

$$\begin{aligned} \leadsto \varphi(\vec{x}) &= \int_{R_0}^r \vec{H}(\vec{x}(t)) \cdot \frac{d\vec{x}(t)}{dt} dt + C = \int_{R_0}^r \vec{H}(\vec{x}(r)) \cdot \frac{d\vec{x}(r)}{dr} dr + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \cdot (\lambda^2 \cos^2(t(\lambda)) + \lambda^2 \sin^2(t(\lambda)))} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda \sin(t(\lambda)) \\ \lambda \cos(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \frac{d}{d\lambda} \begin{pmatrix} \lambda \cos(t(\lambda)) \\ \lambda \sin(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot \begin{pmatrix} -\lambda \sin(t(\lambda)) \\ \lambda \cos(t(\lambda)) \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t(\lambda)) - \lambda \sin(t(\lambda)) t'_\lambda \\ \sin(t(\lambda)) + \lambda \cos(t(\lambda)) t'_\lambda \\ 0 \end{pmatrix} d\lambda + C \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot (-\lambda \sin(t(\lambda)) \cos(t(\lambda)) + \lambda^2 \sin^2(t(\lambda)) t'_\lambda - \lambda \cos(t(\lambda)) \sin(t(\lambda)) + \lambda^2 \cos^2(t(\lambda)) t'_\lambda) d\lambda + C = \\ &= \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi \lambda^2} \cdot (\lambda^2 t'_\lambda) d\lambda + C = \int_{R_0}^r \frac{I}{2\pi} \cdot t'_\lambda d\lambda + C = \frac{I}{2\pi} \cdot t(\lambda) \Big|_{R_0}^r + C = \frac{I \cdot t(r)}{2\pi} + C_0 \end{aligned}$$

$$\text{avec } \frac{y}{x} = \tan(t(r)), \quad t(r) = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \Rightarrow \varphi(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C_0$$

$$\leadsto \text{Solution: } \varphi(\vec{x}) = \frac{I}{2\pi} \cdot \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C_0$$

La fixation de C_0 est plutôt une question pratique et est laissée à cette place à la physique.

6.5 Les théorèmes de l'intégrale

6.5.1 La notion de flux

Notions supposées

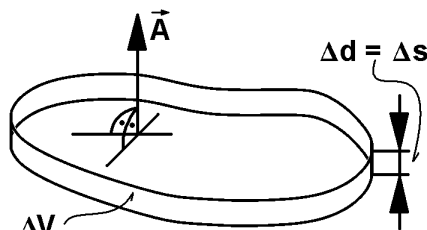
Nous voulons présupposer comme connues les intégrales de volume et de surface scalaires ainsi que vectorielles:

$$\iint_A \varphi dA, \quad \iint_A \varphi d\vec{A}, \quad \iint_A \vec{a} \cdot d\vec{A}, \quad \iint_A \vec{a} \times d\vec{A}, \quad d\vec{A} = \vec{n} dA$$

Relation:

$$A = \iint_A 1 dA = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s}$$

Exemple: Sphère



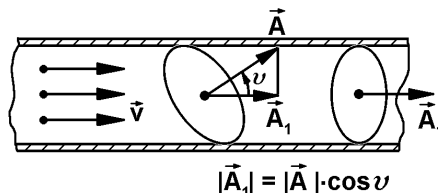
$$\begin{aligned} \leadsto V(r) &= \frac{4\pi}{3} r^3, \quad A(r) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{4\pi}{3} (r + \Delta s)^3 - \frac{4\pi}{3} r^3}{\Delta s} \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\frac{4\pi}{3} (r^3 + 3r^2 \Delta s + 3r \Delta s^2 + \Delta s^3) - r^3}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{4\pi}{3} (3r^2 - 3r \Delta s + \Delta s^2) = \frac{4\pi}{3} 3r^2 \\ &= 4\pi r^2 \end{aligned}$$

6.5.2 La définition du flux

Pour arriver à une compréhension de l'idée du **flux**, nous voulons étudier un exemple simple.

Nous nous posons la **question** suivante:

Quel volume de liquide ΔV coule par période Δt par une surface de coupe transversale A quelconque donnée dans un tube?



Il vaut (esquisse): $A = |\vec{A}|, \quad A_n = A \cdot \cos(\theta), \quad \Delta V = A_n \cdot \Delta s = |\vec{A}| \cdot \cos(\theta) \cdot |\vec{v}| \cdot \Delta t$

\leadsto Volume par temps resp. "flux Φ " par $|\vec{A}|$:

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} \approx \frac{|\vec{A}| \cdot \cos(\theta) \cdot |\vec{v}| \cdot \Delta t}{\Delta t} = |\vec{v}| \cdot |\vec{A}| \cdot \cos(\theta) = \vec{v} \cdot \vec{A} \leadsto \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV(t)}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{A}$$

Dans un liquide tenace $|\vec{v}|$ dépend fortement du lieu, comme chacun sait, car le liquide adhère à la surface du tube tandis qu'à l'intérieur il peut couler plus vite. Par conséquent nous devons étudier le produit scalaire pour un volume partiel par temps d'abord localement sur $\Delta \vec{A}$. Après nous additionnons les parties pour obtenir le volume total par temps.

\leadsto Volume par temps resp. "flux" par $\Delta |\vec{A}|$:

$$(\Delta \vec{A}) \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \Delta \vec{A}$$

Comme on obtient $|\vec{A}|$, quand on fait la somme des pièces de surfac $\Delta|\vec{A}|$ d'une exactitude quelconque, il vaut:

$$|\vec{A}| \approx \sum \Delta|\vec{A}| \Rightarrow |\vec{A}| = \int d|\vec{A}| \rightsquigarrow \Phi_{tot} = \frac{dV(t)_{tot}}{dt} \approx \sum \vec{v} \cdot \Delta\vec{A} \rightsquigarrow \Phi_{tot} = \frac{dV(t)_{tot}}{dt} = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A}$$

Nous avons ainsi calculé la valeur limite du volume d'un liquide par temps, liquide qui coule dans un champ de vitesse \vec{v} donné par une surface A donnée. Nous appelons cette valeur limite flux Φ .

Si maintenant nous n'avons pas un champ de vitesse d'un liquide \vec{v} mais un champ vectoriel quelconque et aussi une surface A , ainsi il n'est pas interdit d'interpréter \vec{v} comme la vitesse, et également de calculer le flux $\Phi = \frac{dV(t)}{dt}$. S'il y a vraiment quelque chose qui coule, est donc une question d'interprétation. (Dans la physique des siècles passés, il y a eu la théorie des éthers aujourd'hui repoussée, où on donnait une valeur de réalité à cet écoulement.)

Par conséquent nous définissons pour un champ vectoriel raisonnable \vec{u} , donné de manière quelconque, et pour une surface A aussi donnée librement:

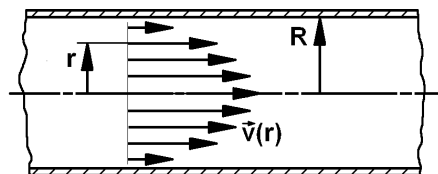
Définition:
$$\Phi := \iint_A \vec{u} \cdot d\vec{A} = \iint_A \vec{u} \cdot \vec{n} \, dA$$
 s'appelle **flux** de \vec{u} à travers A

Conséquence:

Comme le produit scalaire est indépendant de la posture du système de coordonnées, le flux Φ aussi est indépendant de la posture du système de coordonnées.

Exemple:

Dans un tube rond du diamètre R coule un liquide tenace.



Soit $|\vec{v}(r)| = v(r) = (R^2 - r^2) \cdot k$

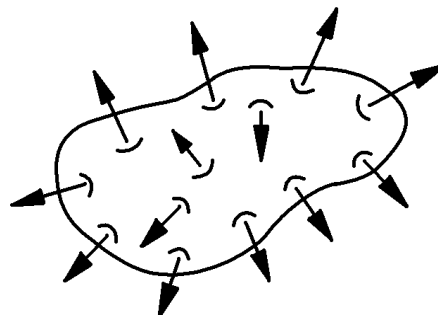
$$\rightsquigarrow d\Phi = v(r) \cdot dA = v(r) \cdot 2\pi \cdot r \cdot dr, \quad \vec{v} \parallel d\vec{A} \Rightarrow \Phi = \iint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iint_A v(r) \cdot dA = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi \cdot r \, dr = 2\pi \int_0^R (R^2 - r^2) \cdot k \cdot r \, dr = 2\pi \cdot k \int_0^R R^2 \cdot r - r^3 \, dr = 2\pi \cdot k \left(R^2 \cdot \frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4} \right) \Big|_0^R = \frac{2\pi \cdot k \cdot R^4}{4} = \frac{\pi \cdot k \cdot R^4}{2}$$

6.5.3 Flux à travers des surfaces fermées

Notion, symboles

La surface d'une boule ou d'une pomme de terre est **fermée**, comme chacun sait. Les surfaces de corps finis sont fermées.

Convention: Ici, nous convenons ainsi que pour une surface fermée le vecteur de surface $d\vec{A}$ est dressé en dehors.

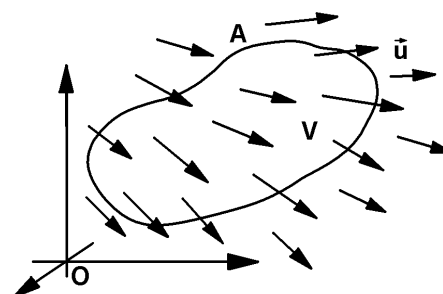


Symbole: Pour les intégrales sur des surfaces fermées nous écrivons: $\oiint \vec{u} \cdot d\vec{A}$ oder ou $\oiint_A \vec{u} \cdot d\vec{A}$

Sources, dépressions

Le "sens commun" nous mène à l'idée qu'une quantité d'un médium, qui pénètre pendant un certain temps par une surface dans un corps fermé, doit une fois sortir de l'autre côté. Car, ainsi on pense, un corps ne peut pas absorber infiniment de "matière", il doit être saturé une fois. Si ce n'est pas ainsi, le médium doit donc se transformer ou se détruire dans des "dépressions" d'un côté ou — ou par ailleurs être produit dans des "sources". Et c'est exactement cette situation que nous observerons aux champs vectoriels. Par conséquent nous définissons:

Soit donné un champ vectoriel \vec{u} et un corps resp. un volume V avec la surface A . Nous disons:



Définition: Si on a $\Phi > 0$ dans V , les **sources** dominant. Si par contre on a $\Phi < 0$, les **dépressions** dominant. Si on a $\Phi = 0$, les sources sont égales aux dépressions.

Comme le flux de champs vectoriels de la physique joue un rôle important, on se trouve face au problème connu du calcul d'intégrales de surface. Ici les **théorèmes d'intégrale** interviennent, à l'aide desquels les intégrales de surface se laissent transformer en intégrales de volume calculables de manière plus simple.

6.5.4 Application: Pourquoi des lois de r au carré?

Problème: Quant à la loi de Coulomb et dans le cas de la loi de gravitation, il s'agit de lois, qui décrivent la force dans les champs centraux. Pourquoi dans ces lois y a-t-il comme dénominateur exactement r^2 et non pas p. ex. $r^{1.99999999886}$ ou $r^{2.0000000003658}$?

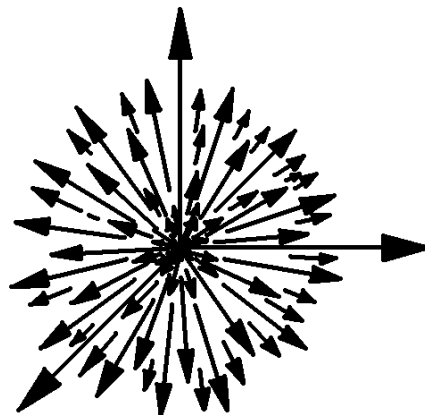
P.ex. loi de gravitation $\vec{F} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_r$

Examination:

Soit donné un champ central avec la force de champ $\vec{u} = \vec{u}(r)$.

Idée:

L'idée suivante paraît sensée dans des zones du champ qui sont libres de sources: Le flux Φ est constant indépendamment de $r > 0$ dans chaque surface fermée autour du centre de champ .



Soient $A(r_1)$ et $A(r_2)$ des sphères centrales à l'origine du champ central.

$$\leadsto \Phi_{A(r_1)} = \Phi_{A(r_2)} \quad \text{resp.} \quad \Phi_{r_1} = \Phi_{r_2} = \Phi_r = \text{const.} = c = \iint_{A(r_1)} \vec{u} \cdot d\vec{A} = \iint_{A(r_2)} \vec{u} \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Soit } \vec{n} \perp \text{ sphère } \leadsto \vec{u}(r) \parallel \vec{n} \parallel \vec{n} \cdot dA \Rightarrow c = \iint_{A(r)} (\vec{u} \cdot \vec{n}) \cdot dA$$

$$\text{Il vaut avec } |\vec{n}| = 1: \quad \vec{u}(r) \cdot \vec{n} = |\vec{u}(r)| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(0) = |\vec{u}(r)| \cdot 1 \cdot 1 = |\vec{u}(r)| = u(r)$$

Maintenant on obtient pour $r = r_0$:

$$c = \iint_{A(r_0)} u(r_0) \cdot dA = u(r_0) \iint_{A(r_0)} dA = u(r_0) \cdot 4r^2 \pi \Rightarrow u(r) = \frac{c}{4r^2 \pi} = \frac{k}{r^2}, \quad k = \frac{c}{4\pi}$$

$$\Rightarrow \vec{u}(r) = \frac{k}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}}$$

Conséquence:

Dans un champ central avec la force de champ $\vec{u} = \vec{u}(r)$ et une source ou dépression dans l'origine il vaut:

$$\vec{u}(r) = \frac{k}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}}, \quad u(r) = \frac{k}{r^2}$$

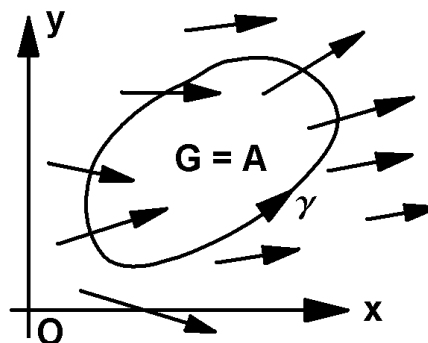
Exemple: Loi de gravitation:

$$\vec{F} = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} = m \cdot \vec{u}(r) \Rightarrow \vec{u}(r) = \gamma \frac{M}{r^2} \cdot \vec{e}_{\vec{r}} := \vec{g}(r) \leadsto \quad \text{Force de champ de gravitation ou accélération de gravitation.}$$

Pour le champ de Coulomb la situation est analogue.

Important: La base de la loi est donc la supposition que le flux par une sphère autour du centre est constante indépendamment de r .

Un cas spécial du théorème de Stokes pour le plan fondamental est le **théorème de Green**:



Théorème:

Hyp.:

La région G dans le plan fondamental ait le bord $|\gamma|$ avec circulation positive soit traversé d'un champ vectoriel $\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1(x, y) \\ u_2(x, y) \end{pmatrix}$

Thè.:

$$\iint_G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy$$

6.5.6 La formule de secteur

A l'aide du théorème de Green on peut calculer des surfaces:

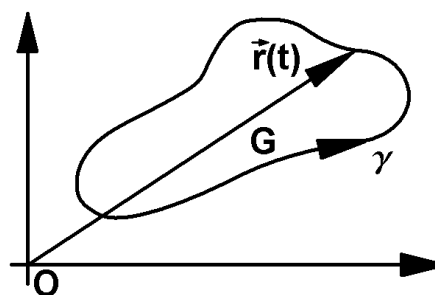
$$\text{Green: } \iint_G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy$$

Choisir:

$$u_1 = \alpha \cdot y, \quad u_2 = (1 + \alpha) \cdot x,$$

$$\alpha \in \mathbb{C}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [t_1, t_2]$$

\leadsto Mesure de la surface:



$$|G| = \iint_G 1 dx dy = \iint_G (1 + \alpha - \alpha) dx dy = \iint_G \left(\frac{\partial u_2}{\partial x} - \frac{\partial u_1}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{|\gamma|} u_1 dx + u_2 dy = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{u} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_t' \\ y_t' \end{pmatrix} dt = \int_{t_1}^{t_2} (u_1(x(t), y(t)) \cdot x_t' + u_2(x(t), y(t)) \cdot y_t') dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt \quad \Rightarrow \quad |G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

Formule:**Hyp.:**

$\gamma : t \mapsto \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, t \in [t_1, t_2]$ courbe de bord raisonnable de G
avec une direction de circulation positive, $\alpha \in \mathbb{C}$

Thè.:

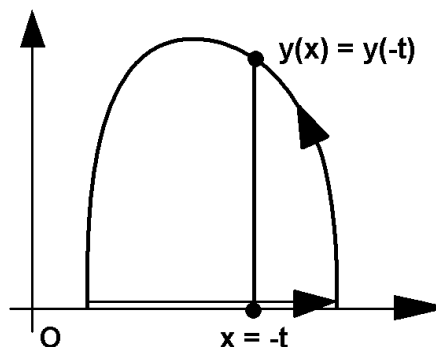
$$|G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt$$

Conséquence:Spécialement pour $\alpha = 0$ ou pour $\alpha = -1$ on obtient les formules:

$$|G| = \int_{t_1}^{t_2} x(t) \cdot y_t' dt \quad \text{oder} \quad \text{ou} \quad |G| = - \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' dt$$

Cas spécial: $x(t) = -t, t \in [t_1, t_2]$ $x(t) = t \wedge y(t) = 0, t \in [t_2, t_3]$

$$\begin{aligned} \Rightarrow |G| &= - \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot x_t' dt + 0 = + \int_{t_1}^{t_2} y(t) \cdot 1 dt \\ &= + \int_{x_1}^{x_2} y(x) dx \end{aligned}$$

**Attention:** La direction de circulation positive de la courbe de bord a par conséquent un renversement de la direction d'intégration à l'intégrale classique.**Exemple:** Contrôle de la formule avec le cercle:

$$\begin{aligned} r = 1, t_1 = 0, t_2 = 2\pi, \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \quad \rightsquigarrow \quad |G| = \int_{t_1}^{t_2} (\alpha \cdot y(t) \cdot x_t' + (1 + \alpha) \cdot x(t) \cdot y_t') dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\alpha \cdot \sin(t) \cdot (-\sin(t)) + (1 + \alpha) \cdot \cos(t) \cdot \cos(t)) dt = \int_0^{2\pi} -\alpha \cdot \sin^2(t) + (1 + \alpha) \cdot \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-1) \cdot \alpha \cdot (1 - \cos^2(t)) + (1 + \alpha) \cdot \cos^2(t) dt = \int_0^{2\pi} -\alpha + \alpha \cdot \cos^2(t) + \cos^2(t) + \alpha \cdot \cos^2(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \cos^2(t) dt = \pi \Rightarrow |G| = -\alpha \cdot 2\pi + \alpha \cdot \pi + \pi + \alpha \cdot \pi = \pi \rightsquigarrow \checkmark \quad \text{☺} \end{aligned}$$

6.5.7 Conséquences des théorèmes de l'intégrale

La formule pour la représentation de la divergence sans coordonnées est une conclusion du théorème de Gauss:

D'après le théorème de la moyenne du calcul intégral et le théorème de Gauss il vaut:

$$\Delta V \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta A \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi_{\vec{u}}}{\Delta V} \right) &= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\oint_A \vec{u} \cdot d\vec{A}}{\Delta V} \right) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV}{\Delta V} \right) = \operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} \\ \Rightarrow \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left(\frac{\Phi_{\vec{u}}}{\Delta V} \right) &= \frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt} = \operatorname{div} \vec{u} \end{aligned}$$

Corollaire:

Hyp.:

Soit V le volume d'un "corps" avec $\Delta V \rightarrow 0$, $\Delta A \rightarrow 0$

Thè.:

$$\operatorname{div} \vec{u} = \frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt}$$

Conséquence:

1. $\frac{d\Phi_{\vec{u}}}{dt}$ est indépendant de la situation du système de coordonnées.
2. Pour un corps (surface fermée) $\bar{\Phi}_V = \frac{\Phi}{V}$ signifie le flux par volume total, qui proprement dit devrait être 0, si la même quantité de médium entre dans le corps et aussi en sort. Dans l'autre cas, on peut interpréter ce quotient $\bar{\Phi}_V$ évidemment comme mesure pour la **force de source moyenne**. Si $\bar{\Phi}_V$ est positif, il y a donc plus de sources que de dépressions. Si $\bar{\Phi}_V$ est négatif, il y a donc plus de dépressions que de sources. Si on forme la valeur de limite $\Delta V \rightarrow 0$, on arrive à l'idée de la force de source locale.

$$\begin{aligned} \text{Soit } P = P(x, y, z) = (x, y, z) \in \Delta V, \Delta V \rightarrow 0 \\ \Rightarrow P(x, y, z) = (x, y, z) \rightarrow P(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, z_0) = P_0 \end{aligned}$$

Définition:

$$\Phi'_V = \frac{d\Phi}{dV} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta V}$$

s'appelle **force de source locale** à P_0

La force de source nous ouvre un accès tout à fait nouveau à la divergence:

Conséquence: Interprétation de la **divergence**:

1. La **divergence** dans un point a la signification de la **force de source** dans ce point.
2. $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ signifie que \vec{u} est libre de sources et de dépressions.

Exemple 1:

$$\text{Soit } \vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \text{const.} \Rightarrow \operatorname{div} \vec{u} = 0 \rightsquigarrow \text{libre de sources.}$$

Exemple 2: Soit $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \begin{pmatrix} \omega_2 z - \omega_3 y \\ \omega_3 x - \omega_1 z \\ \omega_1 y - \omega_2 x \end{pmatrix} = \text{const.} \Rightarrow$
 $\text{div} \vec{\omega} = (\omega_2 z - \omega_3 y)'_x + (\omega_3 x - \omega_1 z)'_y + (\omega_1 y - \omega_2 x)'_z = 0 + 0 + 0 = 0 \rightsquigarrow$ libre de sources.

6.5.8 Champs de potentiel libres de sources

Soit \vec{u} conservateur (c.-à-d. champs de vecteurs lamellaires ou de potentiel) et en plus libre de sources. Soit φ une fonction de potentiel pour \vec{u} , qui existe sûrement.

$$\rightsquigarrow \text{grad} \varphi = \vec{u}, \quad \text{div} \vec{u} = 0 \Rightarrow \text{div}(\text{grad} \varphi) = \Delta \varphi = 0$$

Théorème: Hyp.: φ fonction de potentiel d'un champ vectoriel conservateur et libre de sources.

Thè.: $\Delta \varphi = 0$

Exemple: **Champ de Coulomb**

$$\vec{F} = k \cdot \frac{q \cdot Q}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad \text{Force de champ: } \vec{E} = k \cdot \frac{Q}{r^3} \cdot \vec{r} = k_1 \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\rightsquigarrow \text{Fonction de potentiel: } \varphi^*(x, y, z) = \varphi(r) = k_1 \cdot \frac{1}{r} + C,$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \text{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_1 + \frac{\partial}{\partial y} E_2 + \frac{\partial}{\partial z} E_3$$

P.ex. $\frac{\partial}{\partial x} E_1 = k_1 \frac{1 \cdot r^3 - x \cdot 3r^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r} \cdot 2x}{r^6} = k_1 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \right)$ Ce résultat se laisse réécrire pour
 y et z par échange cyclique. $\rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x} E_2 = k_1 \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5} \right)$ etc..

$$\rightsquigarrow \Delta \varphi = \text{div} \vec{E} = \frac{\partial}{\partial x} E_1 + \frac{\partial}{\partial y} E_2 + \frac{\partial}{\partial z} E_3 = k_1 \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} \right) = k_1 \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3r^2}{r^5} \right) \\ = k_1 \left(\frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^3} \right) = 0 \Rightarrow \Delta \varphi = 0 \quad \text{pour } r \neq 0$$

Conséquence: Le champ de Coulomb d'une charge centrale est libre de sources pour $r \neq 0$. La même chose vaut pour le champ de gravitation d'une masse ponctuelle, car la force de champ se calcule formellement de la même façon que pour le champ de Coulomb.

6.5.9 Exemples concernant Stockes

1. **Loi du flux:** le courant I est la densité de surface de l'impulsion magnétique \vec{H} , \vec{j} la densité du courant:

$$I = \iint_A \vec{j} \cdot d\vec{A} = \oint_{|\gamma|} \vec{H} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot} \vec{H} \cdot d\vec{A} \Rightarrow \vec{j} = \text{rot} \vec{H}$$

2. **Loi d'induction:** U est la tension, \vec{B} , est la densité du flux magnétique, \vec{E} la force du champ électrique:

$$\leadsto U = \oint_{|\gamma|} \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \iint_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = \iint_A \left(-\frac{d}{dt} \vec{B}\right) \cdot d\vec{A}$$

$$\text{Stokes} \leadsto \oint_{|\gamma|} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{A} = \iint_A \left(-\frac{d}{dt} \vec{B}\right) \cdot d\vec{A} \Rightarrow \text{rot } \vec{E} = -\frac{d\vec{B}}{dt}$$

Cas spécial: $\text{rot } \vec{E} = 0 \Rightarrow \vec{B} = \text{const.}$ (Champ de Coulomb!)

6.5.10 Formules dérivées

Formules:

1. Première formule de Green:

$$\iiint_V \text{grad } \varphi \cdot \text{grad } \psi \, dV = \oint_A (\varphi \text{ grad } \psi) \, d\vec{A} - \iiint_V \varphi \Delta \psi \, dV$$

Cette formule est l'analogie de **l'intégration partielle** dans le \mathbb{R}^3 .

Forme différente:

$$\oint_A (\varphi \nabla \psi) \, d\vec{A} = \iiint_V (\nabla \varphi \cdot \nabla \psi + \varphi \Delta \psi) \, dV$$

(Preuve: Substituer dans le théorème de Gauss: $\vec{u} = \varphi \cdot \nabla \psi$)

$$2. \quad \oint_A (\varphi \nabla \psi - \psi \nabla \varphi) \, d\vec{A} = \iiint_V (\varphi [\psi - \psi \Delta \psi]) \, dV$$

(Preuve: Ecrire la première formule une fois avec $\varphi \nabla \psi$ et une autre fois avec $\psi \nabla \varphi$ et soustraire.

$$3. \quad \oint_A (\vec{n} \times \vec{u}) \, dA = \oint_A d\vec{A} \times \vec{u} = \iiint_V \nabla \times \vec{u} \, dV = \iiint_V \text{Rot } \vec{u} \, dV$$

$$4. \quad \iint_A d\vec{A} \times \nabla \varphi = \iint_A (\vec{n} \times \nabla \varphi) \, dA = \oint_{|\gamma|} \varphi \, d\vec{r}$$

5. Dans les formules suivantes "⊗" signifie produit scalaire, produit vectoriel ou bien produit de nombres. P. ex. $\tilde{\psi}$ signifie une fonction scalaire ou vectorielle. Par conséquent, dans les formules suivantes on écrit 6 formules dans une seule formule.

$$(a) \quad \oint_A d\vec{A} \otimes \tilde{\psi} = \oint_A (\vec{n} \otimes \tilde{\psi}) \, dA = \iiint_V \nabla \otimes \tilde{\psi} \, dV$$

Attention: Le produit vectoriel n'est pas commutatif.

$$(b) \quad \iint_A (\vec{n} \times \nabla) \otimes \tilde{\psi} \, dA = \iint_A (d\vec{A} \times \nabla) \otimes \tilde{\psi} = \oint_{|\gamma|} d\vec{r} \otimes \tilde{\psi}$$

Le contrôle est laissé au lecteur.

6.5.11 Définition du rotationnel indépendante de coordonnées

Nous utilisons: $\oiint_A d\vec{A} \otimes \vec{u} = \iiint_V \nabla \otimes \vec{u} dV, \quad \vec{u} = \vec{u}, \quad '\otimes' = '\times'$

$$\rightsquigarrow \oiint_A d\vec{A} \times \vec{u} = \iiint_V \nabla \times \vec{u} dV = \iiint_V \text{rot } \vec{u} dV$$

Cette équation est une équation vectorielle. Nous voulons la contrôler à l'exemple de la troisième composante:

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}, \quad d\vec{A} = \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dA_x \\ dA_y \\ dA_z \end{pmatrix}$$

3-ième ligne: $\oiint_A dA_1 \cdot u_2 - dA_2 \cdot u_1 \stackrel{?}{=} \iiint_V (u_2)'_x - (u_1)'_y dV$

Pour vérifier cette équation, nous appliquons le théorème de Gauss au vecteur \vec{v} suivant:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \oiint_A \vec{v} \cdot d\vec{A} = \iiint_V \text{div } \vec{v} dV \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \oiint_A \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dA_1 \\ dA_2 \\ dA_3 \end{pmatrix} = \oiint_A u_2 dA_1 - u_1 dA_2 = \iiint_V \text{div} \begin{pmatrix} u_2 \\ -u_1 \\ 0 \end{pmatrix} dV = \iiint_V ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dV \rightsquigarrow \text{☺}$$

D'après le théorème de valeur moyenne il vaut donc:

$$\text{rot } \vec{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\iiint_V \text{rot } \vec{u} dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_A d\vec{A} \times \vec{u}}{\Delta V}, \quad \Delta A \quad \text{pour } \Delta V$$

Corollaire: Hyp.: ΔA pour ΔV

Thè.:

$$\text{rot } \vec{u} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\oiint_A d\vec{A} \times \vec{u}}{\Delta V}$$

Conséquence: ΔV et $\oiint_A d\vec{A} \times \vec{u}$ ne dépendent pas de la situation spéciale du système de coordonnées.

Donc aussi $\text{rot } \vec{u}$ ne dépend pas de la situation spéciale du système de coordonnées.

6.5.12 Quant à la divergence d'un champ électrique

Nous considérons une charge ponctuelle Q dans l'origine. Soit $A = \partial S_r$ la surface d'une boule (sphère) avec le rayon r et le centre dans l'origine.

Nous savons: $\vec{E} = \frac{Q}{4 \pi \epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r$ Il vaut:

$$\begin{aligned} \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \oiint_A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \vec{e}_r \cdot d\vec{A} = \oiint_A \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \oiint_A dA = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \\ \Rightarrow \oiint_A \vec{E} \cdot d\vec{A} &= \frac{Q}{\epsilon_0} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \end{aligned}$$

D'autre part il vaut avec la densité de charge q :

$$\begin{aligned} Q &= \iiint_V q(x, y, z) dV = \iiint_V \frac{dQ}{dV} dV, \quad q = \frac{dQ}{dV} \\ \leadsto \frac{Q}{\epsilon_0} &= \frac{1}{\epsilon_0} \iiint_V q(x, y, z) dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \Rightarrow \iiint_V \frac{q(x, y, z)}{\epsilon_0} dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{E} dV \end{aligned}$$

D'après le théorème de la valeur moyenne il vaut: $\frac{q}{\epsilon_0} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\Delta V} \frac{q}{\epsilon_0} dV}{\Delta V} = \lim_{\Delta v \rightarrow 0} \frac{\iiint_{\Delta V} \operatorname{div} \vec{E} dV}{\Delta V} = \operatorname{div} \vec{E}$

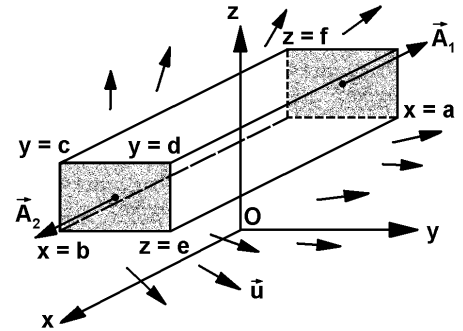
Conséquence: $\operatorname{div} \vec{E} = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{dV}$

6.6 Idées de preuves pour les théorèmes de l'intégrale

6.6.1 Quant au théorème de Gauss

1. Pour un cube:

Le cube soit situé parallèlement aux axes. Nous calculons le flux à travers une surface latérale A_1 vis-à-vis de A_2 :



$$\begin{aligned} \vec{A}_1 &= \vec{n}_1 \cdot A_1, \quad \Phi_{A_1} = \iint \vec{u} \cdot d\vec{A} = \Big|_{x=a} \iint \begin{pmatrix} u_1(a, y, z) \\ u_2(a, y, z) \\ u_3(a, y, z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \underbrace{dy dz}_{=dA} \\ &= - \int_{z=e}^{z=f} \int_{y=c}^{y=d} u_1(a, y, z) dy dz \end{aligned}$$

Analoguement pour A_2 :

$$\begin{aligned} \Phi_{A_2} &= \iint \vec{u} \cdot d\vec{A} = \Big|_{x=b} \iint \begin{pmatrix} u_1(b, y, z) \\ u_2(b, y, z) \\ u_3(b, y, z) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dy dz = \int_{z=e}^{z=f} \int_{y=c}^{y=d} u_1(b, y, z) dy dz \\ \Rightarrow \Phi_{A_1 \cup A_2} &= \int_{y=c}^{y=d} \int_{z=e}^{z=f} (u_1(b, y, z) - u_1(a, y, z)) dy dz \end{aligned}$$

D'autre part il vaut:

$$\begin{aligned} \iiint_V \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dV &= \int_{e^c}^f \int_{c^c}^d \left(\int_a^b \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dx \right) dy dz = \int_{e^c}^f \int_{c^c}^d (u_1(x, y, z) \Big|_a^b) dy dz \\ &= \int_{e^c}^f \int_{c^c}^d (u_1(b, y, z) - u_1(a, y, z)) dy dz \end{aligned}$$

↪ Ceci est la même expression qu'en haut!

$$\rightsquigarrow \Phi_{A_1 \cup A_2} = \iiint_V \frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} dV$$

Pour les autres paires de surface restantes, c.-à-d. A_3 et A_4 ainsi qu' A_5 et A_6 nous pouvons déduire de la même façon.

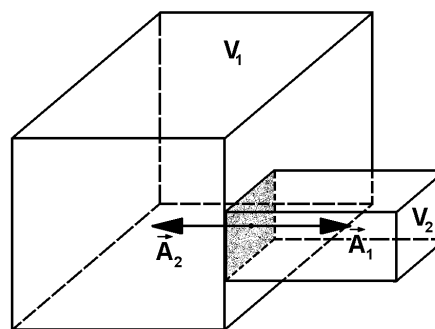
$$\rightsquigarrow \Phi_{A_3 \cup A_4} = \iiint_V \frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial y} dV, \quad \Phi_{A_5 \cup A_6} = \iiint_V \frac{\partial u_3(x, y, z)}{\partial z} dV$$

Si nous additionnons les trois intégrales de volume obtenues, ainsi nous obtenons le théorème de Gauss pour le cube parallèle aux axes:

$$\Phi_A = \Phi_{A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5 \cup A_6} = \iiint_V \left(\frac{\partial u_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial u_2(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial u_3(x, y, z)}{\partial z} \right) dV = \iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV$$

2. Pour les corps, qui se laissent découper en cubes parallèles aux axes:

(Nous utilisons le fait que les intégrales sont des opérateurs linéaires.)



$$\begin{aligned} \iiint_V \dots &= \iiint_{V_1} \dots + \iiint_{V_2} \dots \\ \iint_{A_{tot}} \dots &= \iint_{A_{V_1} \setminus A_1} \dots + \iint_{A_{V_2} \setminus A_2} \dots = \iint_{A_{V_1}} \dots - \underbrace{\iint_{A_1} \dots}_{''=C''} + \iint_{A_{V_2}} \dots - \underbrace{\iint_{A_2} \dots}_{''=-C''} = \iint_{A_{V_1}} \dots + \iint_{A_{V_2}} \dots \\ \Rightarrow \iiint_V \dots &= \iiint_{V_1} \dots + \iiint_{V_2} \dots = \iint_{A_{V_1}} \dots + \iint_{A_{V_2}} \dots = \iint_{A_{tot}} \dots \end{aligned}$$

↪ Théorème de Gauss correct pour les cubes parallèles aux axes et composés.

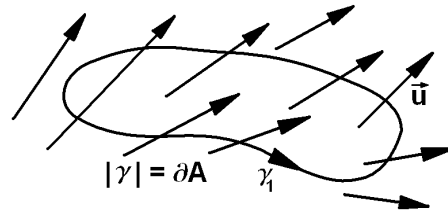
3. Maintenant cet argument se laisse étendre par l'induction: ↪ Le théorème de Gauss est correct pour les cubes parallèles aux axes et composés.

4. Pour des corps quelconques, on peut s'imaginer V approximé par des cubes, comme ça se fait aussi pour les intégrales à plusieurs dimensions. Si V et \vec{u} sont suffisamment raisonnables, l'erreur de l'approximation devient négligeable.

6.6.2 Quant au théorème de Stokes

Cas spécial 1

Soit A une surface fermée. Si nous déformons $|\gamma|$ jusqu'à ce qu'on n'a qu'un point, on obtient ainsi un **chemin de zéro** $|\gamma|_0$.



$$\rightsquigarrow \oint_{|\gamma|_0} \vec{u} \cdot d\vec{r} = 0 \Rightarrow \Phi_{rot\vec{u}}, \iint_{A_0} rot\vec{u} \cdot d\vec{A} = 0$$



Cas spécial 2

Soit donné un corps régulièrement rotatif.

$$\rightsquigarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad rot\vec{v} = 2\omega \parallel \vec{A}, \quad \vec{v} \parallel d\vec{r}$$

Soit S un cercle de rotation.

$$1. \iint_C rot\vec{v} \cdot d\vec{A} = (+) \iint_C |rot\vec{v}| \cdot |d\vec{A}| = 2|\vec{\omega}| \iint_C |d\vec{A}| = 2|\vec{\omega}| R^2 \pi = 2\pi \cdot |\vec{v}| \cdot R$$

$$2. \oint_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \oint_{\partial C} |\vec{v}| \cdot |d\vec{r}| = |\vec{v}| \cdot \oint_{\partial C} |d\vec{r}| = |\vec{v}| \cdot 2R\pi \Rightarrow \oint_{\partial C} \vec{v} \cdot d\vec{r} = \iint_C rot\vec{v} \cdot d\vec{A}$$

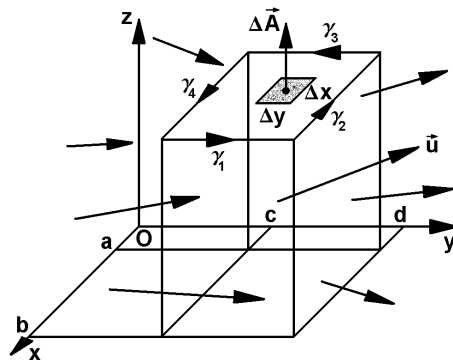
Cas spécial rectangle

Donné: Rectangle, situation parallèle aux axes.

Soit $z = e = const.$,

$$|\gamma| = \bigcup_{i=1}^4 |\gamma|_i, \quad d\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx dy \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} (u_3)'_y - (u_2)'_z \\ (u_1)'_z - (u_3)'_x \\ (u_2)'_x - (u_1)'_y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ dx dy \end{pmatrix} = ((u_2)'_x - (u_1)'_y) dx dy$$



$$\Rightarrow \iint_A rot\vec{u} \cdot d\vec{A} = \iint_A (u_2)'_x - (u_1)'_y dx dy = \int_{ca}^{db} (u_2)'_x dx dy - \int_{ac}^{bd} (u_1)'_y dy dx$$

$$= \int_c^d u_2(x, y, e) \Big|_{x=a}^{x=b} dy - \int_a^b (x, y, e) u_1 \Big|_c^d dx$$

$$= \int_c^d u_2(b, y, e) dy + \int_d^c u_2(a, y, e) dy + \int_a^b u_1(x, c, e) dx + \int_b^a u_1(x, d, e) dx$$

D'autre part il vaut:

$$\begin{aligned} \text{Sur } |\gamma|_1: d\vec{r} &= \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_2(b, y, e) dy \\ \text{Sur } |\gamma|_2: d\vec{r} &= \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_1(x, d, e) dy \\ \text{Sur } |\gamma|_3: d\vec{r} &= \begin{pmatrix} 0 \\ dy \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_2(a, y, e) dy \\ \text{Sur } |\gamma|_4: d\vec{r} &= \begin{pmatrix} dx \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{u} \cdot \vec{r} = u_1(x, c, e) dy \end{aligned}$$

Tous les signes '+'. La direction de passage est déterminée par les frontières d'intégration.

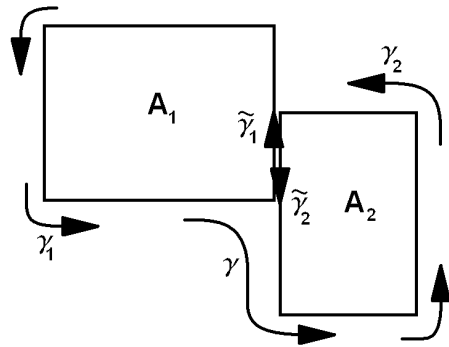
$$\begin{aligned} \Rightarrow \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} &= \int_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_3} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \int_{|\gamma|_4} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \int_c^d u_2(b, y, e) dy + \int_b^a u_1(x, d, e) dy + \\ &\int_d^c u_2(a, y, e) dy + \int_a^b u_1(x, c, e) dy = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \quad (\text{L'expression calculée concorde avec celui d'en haut!}) \\ \rightsquigarrow \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} &= \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$

Figure composée de rectangles

Il vaut (voir fig.):

$$\tilde{\gamma}_2 = -\tilde{\gamma}_1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} &= \iint_{A_1 \cup A_2} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \\ &= \iint_{A_1} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} + \iint_{A_2} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \end{aligned}$$



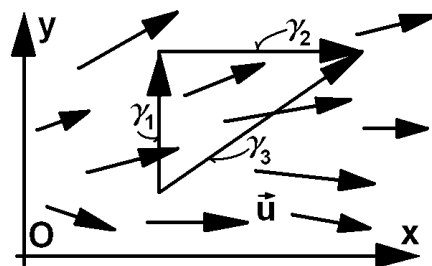
$$\begin{aligned} &= \oint_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_1 = -|\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} \\ &= \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} - \oint_{|\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1 \setminus |\tilde{\gamma}|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2 \setminus |\tilde{\gamma}|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} \\ \Rightarrow \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} &= \oint_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{r} \end{aligned}$$

Maintenant cet argument se laisse étendre par l'induction: \rightsquigarrow Le théorème de Stokes est correct pour les rectangles parallèles aux axes et composés.

Pour aires quelconques, on peut s'imaginer A approximé par des rectangles, comme ça se fait aussi pour les intégrales à plusieurs dimensions. Si A et \vec{u} sont suffisamment raisonnables, l'erreur de l'approximation devient négligeable.

On doit encore réfléchir à ce que des chemins parallèles aux axes peuvent être remplacés par d'autres, qu'ainsi il vaut:

$$\oint_{|\gamma|_1 \cup |\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_1} \vec{u} \cdot d\vec{r} + \oint_{|\gamma|_2} \vec{u} \cdot d\vec{r} = \oint_{|\gamma|_3} \vec{u} \cdot d\vec{r}$$

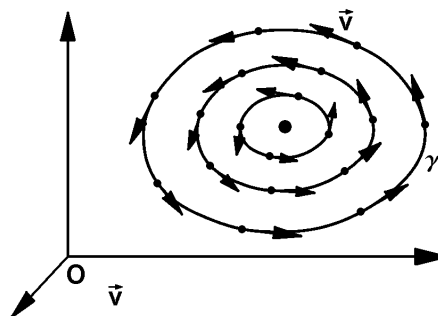


6.7 Circulation, potentiel vectoriel

6.7.1 Circulation et rotationnel

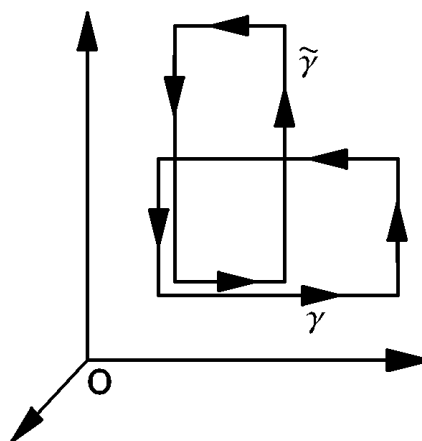
Definition de la circulation

Nous considérons un **tourbillon** dans un fluide (c.-à.-d. dans un *liquide* idéal ou bien dans un **gaz idéal**), dont le champ de vitesse est donné. Il faut remarquer que chaque autre champ donné peut toujours être formellement interprété comme un champ de vitesse.



Soit $|\gamma|$ la trace d'un chemin fermé autour d'un centre qui décrit une ligne de courant. \vec{v} soit le vecteur de vitesse qui est dressé tangentiellement à la ligne de courant.

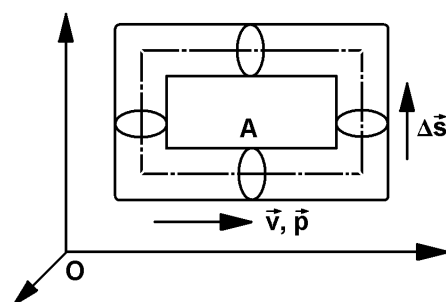
Pour la simplification de la situation soit $|\gamma|$ un rectangle. De tels rectangles peuvent être formés différemment. Le périmètre soit s et \vec{v} constant.



Idée: Nous nous laissons guider de l'idée que ce que nous pourrions comprendre par courant devient avec s et aussi avec \vec{v} proportionnellement plus grand. Nous pourrions donc prendre comme mesure du courant sur une ligne de courant $Z = \vec{v} \cdot s$. Que ce Z ait son autorisation, se voit par sa signification physique:

Soit A la coupe transversale d'un "tuyau de courant" avec le volume V affluant dans ce volume.

Nous calculons l'impulsion du volume affluant dans ce tuyau par coupe transversale:



$$\frac{p}{A} = \frac{m_{total} \cdot |\vec{v}|}{A} = \frac{\rho \cdot V \cdot |\vec{v}|}{A}, \quad m_{total} = \rho \cdot V, \quad V = s \cdot A$$

s est le périmètre moyen.

$$\leadsto \frac{p}{A} = \frac{\rho \cdot s \cdot A \cdot |\vec{v}|}{A} = \rho \cdot s \cdot |\vec{v}| = \rho \cdot Z$$

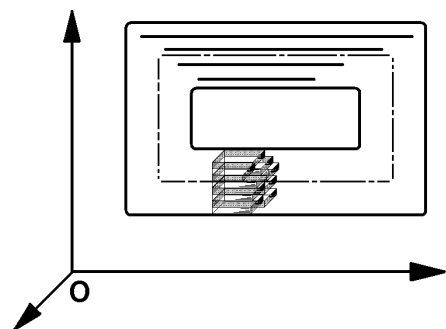
Pour $\rho = 1$ il vaut donc: $Z = \vec{v} \cdot s = \frac{p}{A}$

Cas général: $Z = \vec{v} \cdot s = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{p}{A}$

Z est par conséquent l'**impulsion par coupe transversale** dans un **tuyau de courant** avec la **densité d'unité**. Ou dit différemment: Z est la **densité de surface de l'impulsion** si la **densité est normalisée**. Nous appelons Z **circulation**

Généralisation:

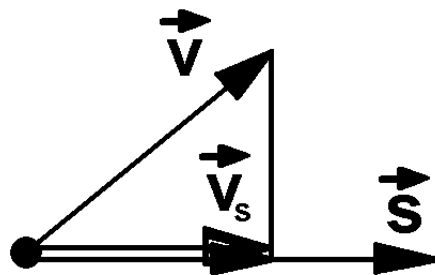
L'élargissement suivant n'est pas problématique:



$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\rho} \cdot \frac{p}{A} = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta p_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta m_i \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta V_i \cdot \rho \cdot \vec{v}_i = \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \sum \Delta s_i \cdot A \cdot \rho \cdot \vec{v}_i \\ &= \frac{1}{\rho \cdot A} \cdot \rho \cdot A \cdot \sum \Delta s_i \cdot \vec{v}_i = \sum \vec{v}_i \cdot \Delta s_i \rightarrow Z = \int_{s_1}^{s_2} |\vec{v}| ds \end{aligned}$$

Pour $\vec{v} \nparallel \Delta\vec{s}$ seulement la composante \vec{v}_s en direction $\Delta\vec{s}$ contribue à l'impulsion:

$$|\vec{v}_s| \cdot |\Delta\vec{s}| = |\vec{v}| \cdot |\Delta\vec{s}| \cdot \cos(\theta) = \vec{v} \cdot \Delta\vec{s}$$

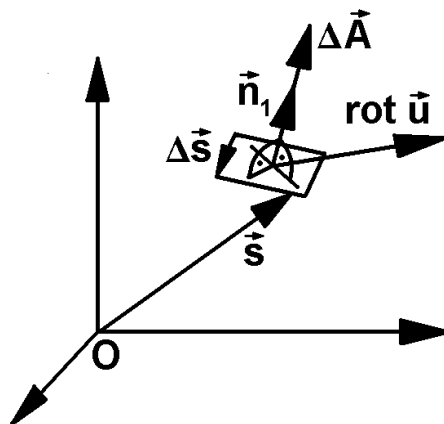
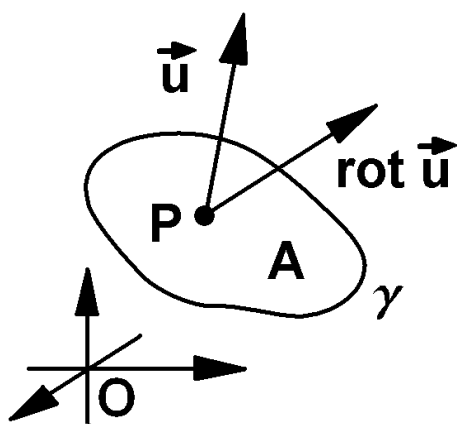


Ça signifie que l'expression sous l'intégrale devient $\vec{v} \cdot d\vec{s}$ à la circulation: $\sim \int_{s_1}^{s_2} \vec{v} \cdot d\vec{s}$

A l'aide de cette formule, on peut définir la circulation pour les chemins fermés et quelconques et pour les champs vectoriels quelconques \vec{u} . La signification est emprunté des fluides comme densité par surface de l'impulsion au long d'une ligne de courant:

Définition: $Z = \int_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{s}$ s'appelle **circulaiton**.

Signification du rotationnel



D'après Stokes il vaut: $Z = \int_{|\gamma|} \vec{u} \cdot d\vec{s} = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A}$

Pour des $A = \Delta A$ très petits il vaut: $\Delta\vec{A} = \vec{n} \cdot \Delta A$

Et d'après le théorème de la moyenne:

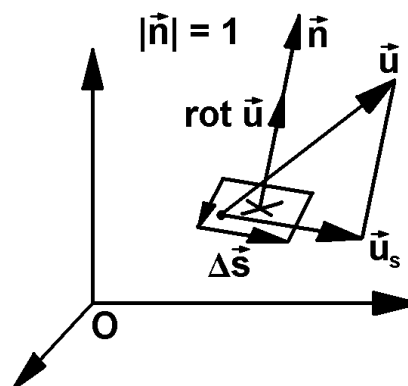
$$Z = \iint_{\Delta A} \text{rot } \vec{u} \cdot d\vec{A} \approx \text{rot } \vec{u}(P_0) \cdot \Delta\vec{A} = \text{rot } \vec{u}(P_0) \cdot \vec{n} \cdot \Delta A \Rightarrow \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} \approx \frac{Z}{\Delta A} = \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

Exactement: $\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$

Soit $\vec{n} = 1 \rightsquigarrow$

$$\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = |\text{rot } \vec{u}| \cdot 1 \cdot \cos(\theta) = |\text{rot } \vec{u}| \cdot \cos(\theta)$$

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{u} \parallel \vec{n} \parallel \vec{A}, \theta = 0 &\Rightarrow \cos(\theta) = 1 \\ \Rightarrow \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} &= |\text{rot } \vec{u}| \end{aligned}$$



\rightsquigarrow **Conséquence:** Signification de $|\text{rot } \vec{u}|$:

$$\text{rot } \vec{u} \parallel \vec{n} \Rightarrow |\text{rot } \vec{u}| = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta A} \cdot \int_{|\gamma|_{\Delta A}} \vec{u} \cdot d\vec{s}$$

C.-à-d. $|\text{rot } \vec{u}|$ est le maximum de la valeur limite de $\frac{Z(\Delta A)}{\Delta A}$ pour $\Delta A \rightarrow 0$ ou la valeur limite de la circulation par surface bornée de la ligne de courant ΔA pour $\Delta A \rightarrow 0$ et le vecteur normal à la surface avec direction optimale \vec{n} .

Conséquence:

Pour $\Delta A \rightarrow P_0$ on peut interpréter $|\text{rot } \vec{u}|$ comme **circulation locale par surface à P_0** ou brièvement comme circulation à P_0 . On a ainsi une **mesure pour le mouvement tourbillonnaire à P_0** . $\text{rot } \vec{u}$ nous donne la direction de la surface dans laquelle ce mouvement tourbillonnaire a lieu.

Si \vec{u} n'est pas un champ de vitesse, on peut toujours le réinterpréter formellement comme un tel champ.

6.7.2 Le potentiel vectoriel

Définition

Problème: Calculer $\Phi_A = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = ?$

A est une surface raisonnable quelconque avec une courbe frontière $|\gamma|$.

Idée:

Chercher une fonction \vec{v} avec $\vec{\omega} = \text{rot } \vec{v}$. D'après Stokes il vaut donc:

$$\Phi_A = \iint_A \vec{\omega} \cdot d\vec{A} = \iint_A \text{rot } \vec{v} \cdot d\vec{A} = \oint_{|\gamma|} \vec{v} \cdot d\vec{s}$$

On a donc maintenant le problème de trouver le champ vectoriel \vec{v} !

Problème: Donné: $\vec{\omega} = \vec{\omega}(\vec{x})$

Trouver: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{x})$ avec $\text{rot } \vec{v} = \vec{\omega}$

Définition:

Soit $\text{rot } \vec{v} = \vec{\omega} \rightsquigarrow$
 \vec{v} s'appelle **potentiel vectoriel** de $\vec{\omega}$

Univocité

Soit $f = f(x, y, z)$ une fonction de potentiel quelconque. Nous savons qu'il vaut donc: $\text{rot}(\text{grad } f) = \vec{0}$

$$\leadsto \text{rot}(\vec{v} + \text{grad } f) = \text{rot}(\vec{v}) + \text{rot}(\text{grad } f) = \text{rot}(\vec{v}) + \vec{0} = \text{rot}(\vec{v})$$

(rot est un opérateur linéaire, comme nous savons.)

\leadsto **Conséquence:** \vec{v} n'est pas univoque.

Lemme:

Hyp.:

\vec{v} potentiel vectoriel pour $\vec{\omega}$
 f fonction de potentiel quelconque

Thè.:

$\vec{v} + \text{grad } f$ est aussi potentiel vectoriel pour $\vec{\omega}$

Important: On peut choisir une composante d'un potentiel vectoriel librement de manière quelconque dans l'ensemble de fonctions raisonnables:

Exemple: Donné: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix}, v_3(x, y, z)$

$$\leadsto \text{Soit } f(x, y, z) = - \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt \Rightarrow \text{grad } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ -v_3(x, y, z) \end{pmatrix}$$

$\leadsto \vec{v}^*(x, y, z) = \vec{v} + \text{Grad } f$ est de nouveau potentiel vectoriel.

$$\begin{aligned} \leadsto \vec{v}^*(x, y, z) &= \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) \\ v_2(x, y, z) \\ v_3(x, y, z) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ -v_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ v_2(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ v_3(x, y, z) - v_3(x, y, z) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} v_1(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_x' dt \\ v_2(x, y, z) - \int_{z_0}^z (v_3(x, y, t))_y' dt \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Théorème: **Hyp.:**

\vec{v} potentiel vectoriel pour $\vec{\omega}$,

$$\text{P.ex. } f(x, y, z) := - \int_{z_0}^z v_3(x, y, t) dt$$

Thè.:

$\vec{v}^*(x, y, z) = \vec{v} + \text{Graf}$ De nouveau potentiel vectoriel dont la troisième composante est 0

Correspondamment pour les autres composantes

Existence

Pour un champ vectoriel raisonnable et quelconque \vec{v} il vaut: $\text{div}(\text{rot } \vec{v}) = 0$

$\leadsto \vec{\omega} = \text{rot } \vec{v} \Rightarrow \text{div}(\vec{\omega}) = \text{div}(\text{rot } \vec{v}) = 0 \leadsto$ Condition nécessaire pour l'existence d'un potentiel vectoriel!

Théorème: **Thè.:**

Pour le champ vectoriel $\vec{\omega}$ il existe un potentiel vectoriel \vec{v}

Thè.: $\text{div } \vec{\omega} = 0$ nécessaire

Construction du potentiel vectoriel

Donné: $\vec{\omega}$

$$\text{Nécessairement on a: } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \text{rot } \vec{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (v_3)_y' - (v_2)_z' \\ (v_1)_z' - (v_3)_x' \\ (v_2)_x' - (v_1)_y' \end{pmatrix}$$

$$\text{Soit } v_3 = 0 \Rightarrow \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(v_2)_z' \\ (v_1)_z' \\ (v_2)_x' - (v_1)_y' \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = - \int \omega_1 dz + C_2, \quad v_1 = \int \omega_2 dz + C_1$$

$$\leadsto \text{ Plus exacte: } v_2(x, y, z) = - \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt + C_2(x, y)$$

$$\leadsto \text{ Supposition: } C_2(x, y) = 0 \leadsto \omega_2 = (v_1)_z' \quad \text{et}$$

$$\omega_3 = (v_2)_x' - (v_1)_y' = \left(- \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt + C_2(x, y) \right)_x' - (v_1)_y' = \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t)_x' dt + C_2(x, y)_x'$$

\leadsto Il vaut:

$$\begin{aligned}
v_1(x, y, z) &= \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, t) dt + C_1(x, y) = \int_{y_0}^y (v_2)_x'(x, t, z) dt - \int_{y_0}^y (\omega_3)_x'(x, t, z) dt + C_3(x, z) \\
&= - \int_{y_0}^y (\omega_3)_x'(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \frac{\partial}{\partial x} \left(- \int_{z_0}^z \omega_1(x, t, s) ds + \underbrace{C_2(x, t)}_{=0} \right) dt \\
&= - \int_{y_0}^y (\omega_3)_x'(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (-\omega_1(x, t, s))_x' ds dt
\end{aligned}$$

Utiliser:

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{v}) = \operatorname{div}(\vec{\omega}) = 0 \Rightarrow (\omega_1)_x' + (\omega_2)_y' + (\omega_3)_z' = 0 \Rightarrow (\omega_1)_x' = -(\omega_2)_y' - (\omega_3)_z'$$

$$\begin{aligned}
\leadsto v_1(x, y, z) &= - \int_{y_0}^y (\omega_3)_x'(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (-(\omega_2)_y'(x, t, s) - (\omega_3)_z'(x, t, s)) ds dt \\
&= - \int_{y_0}^y (\omega_3)_x'(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \int_{y_0}^y (\omega_2)_y'(x, t, s) dt ds + \int_{y_0}^y \int_{z_0}^z (\omega_3)_z'(x, t, s) ds dt \\
&= - \int_{y_0}^y (\omega_3)_x'(x, t, z) dt + C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) - \omega_2(x, y_0, s) ds + \int_{y_0}^y \omega_3(x, t, z) - \omega_3(x, t, z_0) dt \\
&= C_3(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) - \omega_2(x, y_0, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt \\
&= C_4(x, z) + \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt \quad (v_1)_z' = \omega_2 \Rightarrow C_4(x, z) = C_4(x) \\
\Rightarrow \vec{v} &= \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds + \int_{y_0}^y -\omega_3(x, t, z_0) dt + C_4(x) \\ - \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt \\ 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Théorème:

Hyp.:

$$\text{Soit } \vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \vec{v}, \quad \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} \text{ fix}$$

Thè.:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z \omega_2(x, y, s) ds - \int_{y_0}^y \omega_3(x, t, z_0) dt + C(x) \\ - \int_{z_0}^z \omega_1(x, y, t) dt \\ 0 \end{pmatrix}$$

est un potentiel vectoriel possible

Exemple: Soit $\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} \int_{z_0}^z b ds - \int_{y_0}^y c dt + C(x) \\ - \int_{z_0}^z a dt \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} bz - cy + C(x) \\ -az \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rot} \vec{\omega} = \begin{pmatrix} 0 - (-a) \\ b - 0 \\ 0 - (-a) \end{pmatrix} = \vec{\omega} \quad \text{☺ ☺}$$

Kapitel • Chapitre 7

Rayleigh–Quotient (Anhang 1) — Annexe 1 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

7.1 Grundlagen zur Methode mit dem Rayleigh-Quotienten

7.1.1 Übersicht: Problem und Ziel

Im Rahmen der Behandlung der Knickung mag bald auch das Problem auftreten, die Knickfestigkeit eines Trägers mit grossem Eigengewicht und konstantem Querschnitt zu berechnen. Dabei stösst man auf ein Randwertproblem mit einer Differentialgleichung der folgenden Art:

$$y''(x) = -\frac{M(y(x), x)}{(E I_y)}, \quad M(y(x), x) = (F + \rho \cdot A \cdot x) \cdot y(x), \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Im Spezialfall $F = 0$ und $\frac{M(y(x), x)}{(E I_y)} = \frac{(F + \rho \cdot A \cdot x) \cdot y(x)}{(E I_y)} = \frac{\rho \cdot A \cdot x \cdot y(x)}{(E I_y)} = k \cdot x \cdot y(x)$ erhalten wir damit das Randwertproblem:

$$y''(x) = -k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Die Lösung dieses Problems ist allerdings nicht eindeutig, denn setzt man mit einer Lösung $y(x)$ eine andere Lösung $C \cdot y(x)$ ($C =$ beliebige Konstante) in das Randwertproblem ein, so stimmen alle Gleichungen immer noch.

Diese Aufgabe kann man als Eigenwertproblem lesen. In der Praxis stellt sich hier das Problem, den kleinsten möglichen Eigenwert $k = \frac{\rho \cdot A}{E I_y}$ bei gegebenen ρ und E zu berechnen, d.h. $\frac{A}{I_y}$ und damit den Querschnitt zu bestimmen, bei der sich eine Biegelinie einstellt, welche der gegebenen Differentialgleichung genügt. Z.B. im Falle eines Rechteckquerschnitts ist $I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$ und $A = b \cdot h$, d.h. $\frac{A}{I_y} = \frac{12}{h^2}$. Macht man h und damit den Querschnitt kleiner, so wird der Quotient und damit der Eigenwert grösser. Da es sich um die Grenzlage der Biegelinie handelt, wird bei kleinerem Querschnitt die Spannungen auf den Querschnitt grösser, das Grenzmass der Biegelinie wird also überschritten. Damit kommt es bei Vergrösserung von k zum Bruch. Es ist daher unbedingt erforderlich, das kleinste positive k zu finden, so dass das Randwertproblem erfüllt ist.

Dem Autor ist aufgefallen, dass in der lokal zugänglichen technischen Literatur zur Lösung des Problems auch mit der Methode mit dem Rayleigh-Quotienten gearbeitet wird, ohne dass sich korrekte Hinweise auf die mathematische Gültigkeit dieser Methode finden lassen. Um dieser Situation des methodischen Defizits ein Ende zu bereiten, wird die Gültigkeit der Methode in dieser Darlegung nachgewiesen.

Bei der Behandlung der Angelegenheit kommt man aber nicht darum herum, sich erst einige tiefere Grundlagen aus der zugehörigen höheren Mathematik zu erarbeiten.

7.1.2 Theorie bezüglich Rayleigh-Quotient

Bilinearformen und Hilbertraum

Unter einem **Operator** wollen wir in unserem Zusammenhang eine Funktion verstehen, deren Definitionsbereich nicht nur Zahlen, sondern auch Funktionen selbst sein können.

Bsp.: Sei $A(f) = \int_a^b f(x) dx$. A ist hier ein Operator $\mathcal{F} \mapsto \mathbb{R}$, also eine Abbildung der Menge der integrierbaren Funktionen \mathcal{F} in die Menge \mathbb{R} der reellen Zahlen. Analog können wir das Skalarprodukt

$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$ als Operator auf der Menge der Vektorpaare $V^2 = V \times V$ auffassen, der jedem Vektorpar eine reelle Zahl (eben das Skalarprodukt) zuordnet.

Wir betrachten nun Operatoren A , deren Definitionsbereiche Paarmengen $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$ (Mengen von Paaren $(m_1, m_2) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2$) sind. Der Bildbereich sei ein Körper K , so wie etwa \mathbb{R} . Sonst stellen wir im Moment keine weiteren Bedingungen. Solche Operatoren haben dann immer zwei Argumente, hier sind es (m_1, m_2) , und ein Bild, hier $z \in K \rightsquigarrow A : (m_1, m_2) \mapsto z$.

Speziell seien $\mathcal{M}_1 = V$ und $\mathcal{M}_2 = W$ Vektorräume sowie K wie erwähnt ein Körper. Sei $v \in V$, $w \in W$, $k = \lambda \in K$.

Definition: Ein Operator $A : (v, w) \mapsto k$ heisst **Bilinearform**, wenn er linear in v und auch linear in w ist.

Das bedeutet, dass folgende Regeln (**Linearitätsregeln**) gelten sollen:

1. $A(v_1 + v_2, w) = A(v_1, w) + A(v_2, w)$
2. $A(v, w_1 + w_2) = A(v, w_1) + A(v, w_2)$
3. $A(\lambda v, w) = \lambda A(v, w) = A(v, \lambda w)$

Definition: Ein Operator $A : (V \times V) \mapsto K$ heisst **symmetrisch**, wenn $A(v_1, v_2) = A(v_2, v_1)$ gilt.

Man beachte, dass bei symmetrischen Operatoren $V \times W = V \times V$, d.h. $V = W$ gilt.

Definition: Eine Bilinearform $A : (V, V) \mapsto K = \mathbb{R}$ heisst **positiv definit**, wenn für alle $v \in V$ (also $v \neq 0$) gilt: $A(v, v) > 0$.

Bei einer positiv definiten Bilinearform muss somit aus $A(v, v) = 0$ die Bedingung $v = 0$ folgen.

Definition: Eine Bilinearform $A : (V, V) \mapsto K = \mathbb{R}$ heisst **positiv semidefinit**, wenn für alle $v \in V$ gilt: $A(v, v) \geq 0$.

Das **Standardbeispiel** einer positiv definiten Bilinearform ist das **Skalarprodukt** von geometrischen Vektoren. Im Weiteren wollen wir uns aber hier in der Anwendung nicht speziell mit solchen Bilinearformen auseinandersetzen, deren Argumente geometrischen Vektoren sind. Unser Interesse gilt vielmehr den Funktionen statt den genannten Vektoren. Momentan nehmen wir aber keinen unmittelbaren Bezug auf die Natur resp. die Interpretation der Elemente des Vektorraumes V . Wir erwähnen nur, dass hier Funktionenräume bezüglich Addition und Multiplikation mit Skalaren Vektorräume sind, welche somit immer eine Basis besitzen.

Definition: Eine **Skalarprodukt** (inneres Produkt) auf einem Vektorraum V ist eine Funktion $S : (V \times V) \mapsto K = \mathbb{C}$, die jedem Vektorpaar (v_1, v_2) aus V^2 eine komplexe Zahl $\langle v_1, v_2 \rangle \in \mathbb{C}$ zuordnet und die folgende Bedingungen erfüllt:

1. Sesquilinearität:

$$(a) \quad \langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$$

$$(b) \quad \langle z, x + y \rangle = \langle z, x \rangle + \langle z, y \rangle$$

$$(c) \quad \langle \bar{\lambda} x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle = \langle x, \lambda y \rangle$$

2. $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (hermitesch)

3. $\langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positiv definit)

Bemerkung: Wenn V reell ist und $K = \mathbb{R}$ gilt, so verwandeln sich die konjugiert komplexen Werte in obigen Formeln in reelle Werte.

Für Skalarprodukte gilt allgemein der wichtige Satz:

Satz: **Cauchy-Schwarzsche Ungleichung:**

$$|\langle x, y \rangle| \leq \langle x, x \rangle \cdot \langle y, y \rangle$$

Beweis: Siehe unter dem nachfolgenden Link:

http://de.wikipedia.org/wiki/Cauchy-Schwarzsche_Ungleichung.

Definition: Eine **Norm** auf einem Vektorraum V ist eine Funktion $\mathcal{N} : v \mapsto \|v\| \in \mathbb{R}$, die jedem Element (Vektor) von V eine nichtnegative Zahl $\in \mathbb{R}_0^+$ zuordnet und die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (Definitheit)

2. $\|\lambda \cdot v\| = |\lambda| \cdot \|v\| \Leftrightarrow v = 0$ (Homogenität)

3. $\|v_1 + v_2\| \leq \|v_1\| + \|v_2\|$ (Dreiecksungleichung)

Bemerkung: Die **Norm** ist eine Verallgemeinerung des Begriffs der **Länge eines Vektors**. Eine Verallgemeinerung des **Abstands**begriffs, d.h. des Begriffs des **Abstands zwischen zwei Punkten** in einem Punktraum wird dagegen durch den Begriff der **Metrik** gegeben (siehe unten).

Bemerkung: **Skalarproduktnorm:** Es ist einfach einzusehen, dass $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ eine Norm ist. (Für den Beweis muss man dabei auf die Ungleichung von Cauchy-Schwarz zurückgreifen!)

Definition: Sei X eine beliebige Menge. Eine Abbildung $d : (X \times X) \mapsto K = \mathbb{R}$ heisst **Metrik**, wenn sie die folgende Bedingungen erfüllt:

1. $d(x, x) = 0$ (identische Punkte haben Abstand 0)
2. $d(x, y) = 0 \Rightarrow x = y$
(nicht identische Punkte haben nicht Abstand 0)
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (Symmetrie)
4. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$ (Dreiecksungleichung)

Folgerung: Eine Norm $\| \cdot \|$ auf einem Vektorraum induziert durch die Definition $d(x, y) = \|x - y\|$ eine Metrik.

Definition: Ein bezüglich einer gegebenen Metrik **vollständiger** oder **abgeschlossener** Raum X ist ein Raum, in dem jede Cauchy-Folge im Raum gegen einen Grenzpunkt konvergiert, welcher selbst im Raum X drin liegt.

Im Folgenden beachten wir, dass eine Funktionenmenge einen Vektorraum bilden kann bezüglich der Addition der Funktionswerte bei gleichem Argument und der Streckung mittels Skalaren. Dazu genügt es schon, die lineare Hülle einer endlichen Funktionenmenge (Erzeugendensystem) zu nehmen. Im Erzeugendensystem findet man dann eine endliche Basis (minimal grosses Erzeugendensystem). (Vgl. Kurs „Lineare Algebra“.)

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGdf.pdf>

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/KAlgGd.pdf>

Definition: Ein **Hilbertraum** ist ein Vektorraum mit einem Skalarprodukt, welcher vollständig ist bezüglich der durch die Skalarproduktnorm induzierte Metrik ($B(x, x) := \langle x, x \rangle = \|x\|^2$).

Eigenwertgleichung und Bilinearform im Hilbertraum

Seien nun $A(v_1, v_2)$ und $B(v_1, v_2)$ zwei symmetrische, positiv definite Bilinearformen auf $V \times V$, wobei $V =$ reeller Hilbertraum. (Damit sind durch A und B Skalarprodukte gegeben.)

Inspiziert durch die eingangs erwähnte Differentialgleichung sei weiter eine Eigenwertgleichung $\mathcal{F}(\varphi) = \lambda \mathcal{G}(\varphi)$ gegeben, von welcher wir wissen, dass sie in eine Gleichung mit den obigen Bilinearformen umgewandelt werden kann, die wir wie folgt schreiben:

$$A(\varphi, h) = \lambda B(\varphi, h) \quad \forall \varphi \in U \subseteq V \quad \text{oder auch} \quad \mu A(\varphi, h) = B(\varphi, h), \quad \mu = \frac{1}{\lambda}$$

h ist dabei ein Hilfsvektor oder Hilfsfunktion, U ein Unterraum von V , φ ist Eigenfunktion, λ ist Eigenwert. (Vektoren kann man als spezielle, nämlich als konstante Funktionen betrachten.)

Für zwei angenommene Eigenfunktionen $\varphi_i, \varphi_k, i \neq k$ zu $\lambda_i \neq \lambda_k$ gilt nun:

$$\lambda_k B(\varphi_k, \varphi_i) = A(\varphi_k, \varphi_i) = A(\varphi_i, \varphi_k) = \lambda_i B(\varphi_i, \varphi_k) = \lambda_i B(\varphi_k, \varphi_i) \Rightarrow \underbrace{(\lambda_k - \lambda_i)}_{\neq 0} B(\varphi_k, \varphi_i) = 0$$

Somit folgt unter den gemachten Voraussetzungen: $B(\varphi_i, \varphi_k) = 0$.

Satz: Gegeben sei das oben in diesem Abschnitt genannte Problem. Zu zwei Eigenfunktionen φ_i, φ_k mit verschiedenen Eigenwerten λ_i, λ_k gilt $B(\lambda_i, \lambda_k) = 0$

Weiter sieht man sofort:

Satz: Die Eigenfunktionen zum selben mehrfachen Eigenwert λ erzeugen einen linearen Raum.

Beweis:

$$A(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2, h) = k_1 A(\varphi_1, h) + k_2 A(\varphi_2, h) = k_1 \cdot \lambda \cdot B(\varphi_1, h) + k_2 \cdot \lambda \cdot B(\varphi_2, h) \\ = \lambda \cdot (k_1 B(\varphi_1, h) + k_2 B(\varphi_2, h)) = \lambda \cdot (B(k_1 \varphi_1 + k_2 \varphi_2, h))$$

Vor.:

Sei nun für ein beliebiges $u \in U$, $U =$ Unterraum von V : $|u| = \sqrt{A(u, u)}$, $\|u\| = \sqrt{B(u, u)}$.

Sei weiter:

1. U abgeschlossen bezüglich der eben definierten Metrik $|\cdot|$.

D.h. für eine konvergente Folge $\langle u_n \rangle$ gilt immer $u_n \rightarrow u \in U$, wobei es sich hier um Konvergenz bezüglich der genannten Metrik handelt $|u| = \sqrt{A(u, u)}$, d.h. um **Konvergenz im Mittel**.

2. $\exists_{\alpha \in \mathbb{R}^+} \forall_{u \in U} : \|u\| \leq \alpha |u|$ d.h. $B(u, u) \leq \alpha^2 \cdot A(u, u)$.

Aus $|u_n| \rightarrow 0$ folgt also $\|u_n\| \rightarrow 0$, aber nicht umgekehrt: $\|u_n\|$ konvergiert stärker als $|u_n|$.

3. $\forall_{\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U} \forall_{h \in U} : \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \right)$.

Unter diesen Voraussetzungen gilt der folgende Satz:

Satz:

1. Das Eigenwertproblem $A(\varphi, h) = \lambda B(\varphi, h) \forall_{\varphi \in U \subseteq V}$ hat unendlich viele positive Eigenwerte endlich grosser Vielfachheit:
 $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots$ mit $\lambda_n \rightarrow \infty$.
2. Es existiert ein System von Eigenfunktionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots$ mit $B(\varphi_i, \varphi_k) = \delta_{i,k}$, $A(\varphi_i, \varphi_k) = \lambda_i B(\varphi_i, \varphi_k) = \lambda_i \delta_{i,k}$
3. Sei $u \in U$ beliebig und $c_k := B(u, \varphi_k)$ (Fourier-Koeffizient) \rightsquigarrow
 $B(u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$, $A(u, u) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2$

Wer sich in der Theorie der Fourierreihen mühelos bewegen kann, dem mögen die hier aufgestellten Behauptungen wohl nicht allzu grosse Hindernisse bedeuten. Ansonst sei für den Beweis auf die Literatur verwiesen.¹

¹Lit.: Showalter, „Hilbert Spaces Methods for Partial Differential Equations“, Pitman, London

Unter den gemachten Annahmen bilden daher die Eigenwerte in unserem Eigenwertproblem eine unendlich positive Folge, welche gegen ∞ strebt. Die Vielfachheit aller Eigenwerte ist endlich. Und die Eigenfunktionen liefern uns die Fourierkoeffizienten.

Wir definieren nun:

Definition: $R(u) = \frac{A(u, u)}{B(u, u)}$ heisst **Rayleigh-Quotient** zu unserem EWP.

Für $R(u)$ gilt nun: $\lambda_1 \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_1 c_k^2 \leq \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k c_k^2 = A(u, u) = R(u) \cdot B(u, u) = R(u) \cdot \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$

\leadsto Daher gilt: $0 < \lambda_1 \leq R(u)$.

Andererseits gilt für φ_1 : $\lambda_1 c_1^2 = A(\varphi_1, \varphi_1) = R(\varphi_1) \cdot B(\varphi_1, \varphi_1) = R(\varphi_1) \cdot c_1^2 \Rightarrow \lambda_1 = R(\varphi_1)$

Satz: $\lambda_1 = R(\varphi_1) \leq R(u) \forall u \in U$.

Konsequenz: Der erste Eigenwert lässt sich daher durch den Rayleigh-Quotient mit Hilfe einer beliebigen zulässigen Vergleichsfunktion abschätzen.

7.1.3 Berechnung des Rayleigh-Quotienten

Wir betrachten wieder das eingangs erwähnte Problem:

$$-y''(x) = k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Bemerkung: Statt $y(0) = y(x_L) = 0$ könnte man auch z.B. $y'(0) = y(x_L) = 0$ fordern.

Dieses Problem formen wir nun um, indem wir zwei Operatoren (positiv devinite Bilinearformen) konstruieren. Dazu multiplizieren wir die Gleichung beidseitig mit $y(x)$ (statt mit einem beliebigen $u(x)$) und integrieren dann beidseitig von $x = 0$ bis $x = x_L$:

$$-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx = k \cdot \int_0^{x_L} x \cdot (y(x))^2 dx$$

partielle Integration ergibt:

$$-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx = -\underbrace{(y'(x) \cdot y(x)) \Big|_0^{x_L}}_{=0} - \int_0^{x_L} y'(x) \cdot y'(x) dx = \int_0^{x_L} (y'(x))^2 dx$$

Daher — und weil Integrale der Linearitätseigenschaft genügen, ist $B(y, u) = k \cdot \int_0^{x_L} x \cdot y(x) u(x) dx$ Bilinearformen im Hilbertraum der L^2 -integrierbaren Funktionen (Lebesque-Integral, vorläufig mit der L^2 -Norm $\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{x_L} (y(x))^2 dx}$. (zulässige $u(x)$ und $y(x)$ erfüllen wegen dem RWP die Randbedingungen.) Damit ist ein Unterraum U von L^2 festlegen. Nun gilt:

$$\|u\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^{x_L} (y(x))^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{x_L \cdot \int_0^{x_L} (y(x))^2 dx} = \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{\int_0^{x_L} x_L \cdot (y(x))^2 dx}$$

$$\Rightarrow \|u\|_{L^2} \geq \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \sqrt{\int_0^{x_L} x \cdot (y(x))^2 dx} \geq \frac{1}{\sqrt{x_L}} \cdot \|y\|_B \geq 0$$

Daher ist U auch gegenüber der B -Norm abgeschlossen.

Um dagegen $A(y, u) = -\int_0^{x_L} y''(x) \cdot u(x) dx = \int_0^{x_L} y'(x) \cdot u'(x) dx = -\int_0^{x_L} u''(x) \cdot y(x) dx = A(u, y)$ bilden zu können, fordern wir $y, u \in C_2$ (zweimal stetig differenzierbar). U_2 sei die kompakte Hülle zu C_2 bezüglich der Metrik $|\cdot|$. Daher sind unsere Funktionen in $S = U \cap U_2$ zu nehmen. Damit erfüllen wir die auf Seite 204 gemachte Voraussetzung (1).

Sein nun $u(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \cos(\omega k x) + c_k \sin(\omega k x)$ eine konvergente Fourierreihe $\in S$. Die Existenz einer solchen Reihe ist schon in L^2 gesichert. Nach der obigen Abschätzung ergibt sich mit $\omega = \frac{2\pi}{T}$ unter Benutzung von Fourierreihen:

$$\begin{aligned} 0 \leq B(u, u) &= \int_0^{x_L} x \cdot (u(x))^2 dx \leq x_L \cdot \int_0^{x_L} (y(x))^2 dx = x_L \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k^2 dx \\ &\leq x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{2\pi \cdot k}{T}\right)^2 \cdot c_k^2 dx = x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \int_0^{x_L} (u'(x))^2 dx \\ &= -x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot \int_0^{x_L} u''(x) \cdot u(x) dx = x_L \cdot (\max(T, 1))^2 \cdot A(u, u) = \alpha^2 \cdot A(u, u) \\ &\Rightarrow 0 \leq \|u\| = \sqrt{B(u, u)} \leq \alpha \sqrt{A(u, u)} = \alpha |u|, \quad |u_n| \rightarrow 0 \Rightarrow \|u\| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Damit ist auch Voraussetzung (2) von Seite 204 erfüllt.

Wir untersuchen jetzt die Voraussetzung (3) von Seite 204:

$$\forall \{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U \quad \forall h \in U : \left(\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0 \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0 \right).$$

Sei also $\{u_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq U$ eine beliebige Folge mit $A((u_n - u), h) = \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x) dx \rightarrow 0$, $h(x) \in U$ beliebig. Ersetzen wir h durch $(u_n - u)$, so erhalten wir $A((u_n - u), (u_n - u)) = |u_n - u|^2$. Konvergiert die Folge $\langle u_n - u \rangle$ bei einem beliebigen u , so liegt der Grenzwert von $(u_n - u)$ und damit u in U . Konvergiert die Folge nicht, so existiert bekanntlich immer eine konvergente Teilfolge, und u liegt entsprechend wieder in U . Wir können daher allgemein $u \in U$ und damit speziell für $h = (u_n - u)$ $\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), (u_n - u)) = \lim_{n \rightarrow \infty} |u_n - u|^2 = 0$ annehmen.

Wegen $U \subseteq L^2$ gibt es zu $(u_n - u)$ eine Fourierreihe $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} \cos(\omega k x) + a_k \sin(\omega k x)$.

Nach Parseval ist nun

$$|u_n - u|^2 = A((u_n - u), (u_n - u)) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot (u_n(x) - u(x)) dx.$$

Dabei ist es möglich, dass $u''(x) \notin C_2$ gilt, dass z.B. $u''(x)$ als Limes aufgefasst eine Distribution wird. Wegen der L^2 -Integrierbarkeit findet man daher bei partieller Integration allgemein für h :

$$-\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot h(x) dx = -(u_n(x) - u(x))' \cdot h(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} + \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))' \cdot h(x)' dx.$$

$u(x)$ muss nach Konstruktion die Randbedingungen erfüllen (obwohl bei $x_0 = 0$ oder bei $x_0 = x_L$ auch $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) \neq u(x_0)$ gelten kann). Damit wird $(u_n(x) - u(x))' \cdot h(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} = 0$. Somit gilt:

$$\begin{aligned} A((u_n - u), h) &= -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))'' \cdot h(x) dx = +\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))' \cdot h(x)' dx \\ &= (u_n(x) - u(x)) \cdot h'(x) \Big|_{x=0}^{x=x_L} - \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x)'' dx = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot h(x)'' dx \end{aligned}$$

Wählen wir bei $\omega = \frac{2\pi}{x_L}$ für $h(x)$ nacheinander die Basisfunktionen der Fourierreihe

$$\varphi_{-k}(t) = \frac{2}{x_L} \cos(\omega k t) \text{ zur Berechnung des Fourierkoeffizienten } a_{-k} \text{ sowie } \varphi_k(t) = \frac{2}{x_L} \sin(\omega k t)$$

entsprechend für a_k und $\varphi_0(t) = \frac{2}{x_L}$ für a_0 , so können wir jetzt die Fourierkoeffizienten explizit mittels A berechnen. (Dabei tritt aber in der Fourierreihe nur $\frac{a_0}{2}$ statt a_0 auf!)

$$A((u_n - u), \varphi_{-k}) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_{-k}(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot (-1)\omega^2 k^2 \cos(\omega k t) dx = \omega^2 k^2 a_{-k}$$

$$A((u_n - u), \varphi_k) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_k(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot (-1)\omega^2 k^2 \sin(\omega k t) dx = \omega^2 k^2 a_k$$

$$A((u_n - u), \varphi_0) = -\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot \varphi_0(x)'' dx = -\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x)) \cdot 0 dx = 0 = a_0$$

Wegen $\lim_{n \rightarrow \infty} A((u_n - u), h) = 0$ gilt daher: $\omega^2 k^2 a_{-k} \rightarrow 0$, $\omega^2 k^2 a_k \rightarrow 0$ und folglich nach Voraussetzung:

$$(\omega^2 k^2 a_{-k})^2 = \omega^4 k^4 a_{-k}^2 = \varepsilon_{-k} \rightarrow 0, \quad (\omega^2 k^2 a_k)^2 = \omega^4 k^4 a_k^2 = \varepsilon_k \rightarrow 0$$

Infolge unserer Gegebenheiten existiert auch das Integral $\int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))^2 dt$ (wegen $u \in L^2$).

$$\begin{aligned} \text{Nach Parseval ist damit: } \|u_n(x) - u(x)\|^2 &= B(u_n(x) - u(x), u_n(x) - u(x)) = \int_0^{x_L} x (u_n(x) - u(x))^2 dt \\ &\leq \int_0^{x_L} x_L (u_n(x) - u(x))^2 dt = x_L \int_0^{x_L} (u_n(x) - u(x))^2 dt = \text{const.}(n) = x_L^2 \left(\frac{a_0}{4} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{-k})^2 + (a_k)^2 \right) \\ &= \frac{x_L^2}{2} \sum_{k=1}^{\infty} (a_{-k})^2 + (a_k)^2 = \frac{x_L^2}{2} \left(\sum_{k=1}^m (a_{-k})^2 + (a_k)^2 \right) + \varepsilon_r(m) = \frac{x_L^2}{2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_{-k}}{\omega^4 k^4} + \frac{\varepsilon_k}{\omega^4 k^4} \right) + \varepsilon_r(m). \end{aligned}$$

Wähle nun unter den m Werten $\varepsilon_{-1}, \varepsilon_1, \varepsilon_{-2}, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{-m}, \varepsilon_m$ den maximalen Wert $\varepsilon_{\max}(m)$:

$$\leadsto \frac{x_L^2}{2} \left(\sum_{k=1}^m \frac{\varepsilon_{-k}}{\omega^4 k^4} + \frac{\varepsilon_k}{\omega^4 k^4} \right) + \varepsilon_r(m) \leq \frac{x_L^2 \cdot 2 \cdot \varepsilon_{\max}(m)}{2\omega^4} \left(\sum_{k=1}^m \frac{1}{k^4} \right) + \varepsilon_r(m). \text{ Dabei ist } \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} \right) \leq \frac{4}{3}.$$

(Abschätzung durch $f(x) = \frac{1}{x^4}$.) Mit $m \rightarrow \infty$ wird nun $\varepsilon_r(m) \rightarrow 0$ und mit $\varepsilon_{-k}, \varepsilon_k \rightarrow 0$ wird auch $\varepsilon_{\max}(m) \rightarrow 0$. Daher gilt:

$$0 \leq \|u_n(x) - u(x)\|^2 \leq \frac{x_L^2 \cdot 2 \cdot \varepsilon_{max}(m)}{2\omega^4} \cdot \frac{4}{3} + \varepsilon_r(m) \rightarrow 0$$

Somit ist die Voraussetzung (3) bei unserem Randwertproblem auch erfüllt. Man kann also den ersten Eigenwert mittels des Rayleigh-Quotienten und einer geeigneten Eigenfunktion abschätzen. Folglich gilt bei unserem Problem

$$-y''(x) = k \cdot x \cdot y(x), \quad k > 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

die folgende Abschätzung:

$$0 \leq \lambda_1 = R(\varphi_1) \leq R(u) \quad \forall u \in U, \quad R(u) = \frac{A(u, u)}{B(u, u)} = \frac{-\int_0^{x_L} y''(x) \cdot y(x) dx}{\int_0^{x_L} x \cdot y(x)^2 dx}$$

Beispiel:

Wir wählen bei einer Stablänge von 1 intuitiv 10 Testfunktionen und berechnen jeweils den zugehörigen Rayleigh-Quotienten mit Hilfe von *Mathematica* in einer Tabelle:

Input:

```
xL = 1;
R[y_, x1_] := -NIntegrate[y''[x] y[x], {x, 0, x1}]/
  NIntegrate[x y[x]^2, {x, 0, x1}];
y[x_, 1 ] := Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 2 ] := x Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 3 ] := Sqrt[x] Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 4 ] := Sqrt[xL - x] Sin[(Pi)/xL x];
y[x_, 5 ] := x(x - xL);
y[x_, 6 ] := x (x - xL)^2;
y[x_, 7 ] := x^2 (x - xL);
y[x_, 8 ] := x^2 (x - xL)^2;
y[x_, 9 ] := x^3 (x - xL)^3;
y[x_, 10] := x^4 (x - xL)^4;
Table[y[x_] := y[x, k]; {k, y[x], R[y, xL]}, {k, 1, 10}] // MatrixForm
```

Output:

$$\begin{pmatrix} 1 & \sin(\pi x) & 19.7392 \\ 2 & x \sin(\pi x) & 21.7797 \\ 3 & \sqrt{x} \sin(\pi x) & 19.6135 \\ 4 & \sqrt{1-x} \sin(\pi x) & 25.5109 \\ 5 & (x-1) \cdot x & 20.0000 \\ 6 & (x-1)^2 \cdot x & 37.3333 \\ 7 & (x-1) \cdot x^2 & 22.4000 \\ 8 & (x-1)^2 \cdot x^2 & 24.0000 \\ 9 & (x-1)^3 \cdot x^3 & 31.2000 \\ 10 & (x-1)^4 \cdot x^4 & 38.8571 \end{pmatrix}$$

Resultat: Den tiefsten Wert 19.6135 erhalten wir mit der 3. Funktion $\sqrt{x} \sin(\pi x)$, wobei hier nur eine Näherung wiedergegeben ist. Somit ist $k < 19.6136$.
(Voller numerisch Ausgebener Wert: $k- > 19.613548583248857$.)

Um weitere genauere Resultate zu erzielen, müssten wir jetzt die exakte Lösung studieren. *Mathematica* liefert:

Input:

```
xL = 1;
solv = DSolve[{y''[x] == -k x y[x], y[0] == 0}, y, x] // Flatten
```

Output:

$$\left\{ y \rightarrow \text{Function} \left[\{x\}, \text{AiryBi} \left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) c_2 - \sqrt{3} \text{AiryAi} \left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) c_2 \right] \right\}$$

Dabei ist (*Mathematica*-Erklärung):

AiryAi[z] gives the Airy function *Ai(z)*.

AiryBi[z] gives the Airy function *Bi(z)*.

Um diese Funktionen ein wenig zu verstehen, suchen wir ihre Stammfunktionen:

Input:

```
Integrate[AiryAi[z], z]
```

Output:

$$\frac{z \left(\sqrt[3]{3} z \Gamma \left(\frac{2}{3} \right)^2 {}_1F_2 \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{z^3}{9} \right) - 3 \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \Gamma \left(\frac{5}{3} \right) {}_1F_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{z^3}{9} \right) \right)}{9 \cdot 3^{2/3} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) \Gamma \left(\frac{5}{3} \right)}$$

Input:

```
Integrate[AiryBi[z], z]
```

Output:

$$\frac{z \left(3^{2/3} \Gamma \left(\frac{1}{3} \right) \Gamma \left(\frac{5}{3} \right) {}_1F_2 \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}, \frac{4}{3}; \frac{z^3}{9} \right) + z \Gamma \left(\frac{2}{3} \right)^2 {}_1F_2 \left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}, \frac{5}{3}; \frac{z^3}{9} \right) \right)}{3 \cdot 3^{5/6} \Gamma \left(\frac{2}{3} \right) \Gamma \left(\frac{4}{3} \right) \Gamma \left(\frac{5}{3} \right)}$$

(Γ bedeutet die wohlbekanntere Gammafunktion.)

Um die exakte Lösung zum 1. Eigenwert zu erhalten, müssten wir jetzt diesen 1. Eigenwert exakt kennen. Für nicht exakte Werte gibt es nur die triviale Nulllösung $y(x) \equiv 0$.

An der Stelle $x_L = 1$ erhalten wir die Gleichung $Bi\left(-\frac{k}{(-k)^{2/3}}\right)c_2 - \sqrt{3}Ai\left(-\frac{k}{(-k)^{2/3}}\right)c_2 = 0$. In dieser Gleichung ist k und c_2 unbekannt. Zufällige Werte für c_2 oder den Näherungswert k einfach einmal anzunehmen und den jeweils anderen Wert zu berechnen, führt nicht unmittelbar zu brauchbaren Resultaten.

Hier können weitere Studien oder numerische Methoden weiterhelfen, die jedoch in einem anderen Rahmen als dem hiesigen behandelt werden müssen. Eine andere Variante zur Erlangung einer Lösung ist die Behandlung eines exakteren Modells als des hier diskutierten z.B. mit der Shooting-Methode.

7.1.4 Eine genauere numerische Näherung für den 1. Eigenwert

Wir berechnen nochmals die Lösung der Eigenwertgleichung, jedoch ohne die 2. Randbedingung. Damit haben wir nur die Anfangsbedingung $y(x) = 0$ einzugeben, wodurch wir eine Integrationskonstante c_2 erhalten.

Input:

```
solv = DSolve[{y''[x] == -k x y[x], y[0] == 0}, y, x] // Flatten
```

Output:

$$c_2 Bi\left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}}\right) - \sqrt{3} c_2 Ai\left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}}\right)$$

Hier sehen wir, dass bei einem reellen Eigenwert k der Term $\frac{kx}{(-k)^{2/3}}$ komplex werden muss!

Mit Hilfe des Rayleigh-Quotienten hatten wir für den 1. Eigenwert k einen Wert kleiner als 19.6135 ermittelt. Wir können daher numerisch eine Nullstelle als 2. Randbedingung nahe bei $k = 19.0$ suchen, die in die Nähe von $x = 1$ zu liegen kommen sollte:

Input:

```
FindRoot[Im[(yy[x]/. {c2->1, x->1})], {k, 19}]
```

Output:

$$k - > 18.9563$$

Kontrolle des 2. Randwerts mit dem erhaltenen Resultat:

Input:

```
FindRoot[Im[(yy[x]/. {c2->1, k->18.9563})], {x, 1}]
```

Output:

$$x - > 0.999999$$

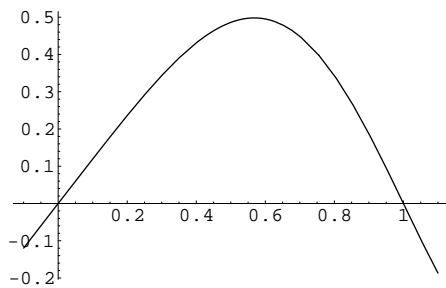
Diese Genauigkeit sollte hier genügen. (Das Programm ist so gebaut, dass die ausgegebenen Ziffern genau sind.)

~> Kontrolle durch Plots für den Realteil und den Imaginäranteil der erhaltenen Funktionen:

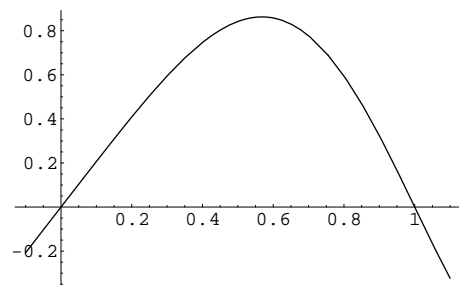
Input:

```
Plot[Re[(yy[x]/{c2->1,k->18.9563})],{x,-0.1,1.1}];
Plot[Im[(yy[x]/{c2->1,k->18.9563})],{x,-0.1,1.1}];
```

Output: Graphiken.



Realanteil



Imaginäranteil

Input:

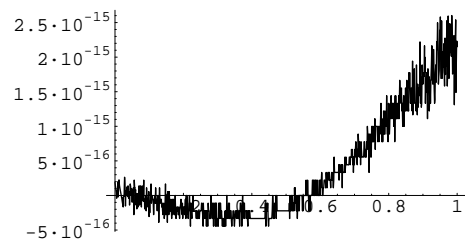
```
Plot[Re[(yy[x]/Re[yy[0.6]/{c2->1,k->18.9563})] - Im[(yy[x]/Im[yy[0.6]/{c2->1,k->18.9563})], {x,0,1}];
```

Output: Graphik.

Hier ist zu vermuten, dass die Funktionswerte des Realteils und des Imaginäranteils der gefundenen Lösung zueinander proportional sind:

$$\Re(yy(x)) = \text{const.} \cdot \Im(yy(x))$$

Daher strecken wir die beiden Graphen je mit dem Kehrwert eines Funktionswerts an einer fix gewählten Stelle, z.B. hier bei $x = 0.6$.



Resultat: Die gefundenen Differenzen zwischen den normierten Funktionen $\Re(yy(x))$ und $\Im(yy(x))$ liegen im Bereich der numerischen Ungenauigkeit, wie der wiedergegebene Plot zeigt. Daher können wir als Biegelinie z.B. die Funktion $\text{const.} \cdot \Re(yy(x))$ verwenden. Die Konstante lässt sich, wie einigangs erwähnt, nicht aus den gemachten Voraussetzungen deduzieren. Somit erhalten wir:

$$yy(x) = \Re \left(Bi \left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) - \sqrt{3} Ai \left(-\frac{kx}{(-k)^{2/3}} \right) \right), \quad k \approx 18.9563$$

7.1.5 Bemerkung zum Ritz–Galerkin–Verfahren

7.1.6 Übersicht

Gegeben sei eine Serie von Vergleichsfunktionen $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$. Das **Ritz–Galerkin–Verfahren** beruht nun darauf, dass man eine Linearkombination dieser Funktionen mit variablen Koeffizienten $y(x) = \sum_{k=1}^n a_k \cdot y_k(x)$ bildet und dann $y(x)$ in einen Ausdruck einsetzt, den man aus dem Rayleigh–Quotienten gewinnt. Damit entsteht eine Funktion $h(a_1, a_2, \dots, a_n)$, welche minimal sein soll. Die Minimalitätsbedingung hat nun $\left(\frac{\partial R}{\partial a_k} = 0 \forall a_k\right)$ zur Folge. Daraus kann man ein homogenes Gleichungssystem gewinnen, welches nicht nur die Nulllösung haben soll. So entsteht die Bedingung, dass eine berechenbare Determinante gleich 0 sein soll. Damit gewinnt man ein charakteristisches Polynom, aus dessen Nullstellen man auf den Eigenwert schliessen kann. Wir wollen dieses Verfahren hier beschreiben. Beispiele können hier jedoch des beschränkten Rahmen wegens nicht weiter eingebaut werden. Sie gehören in die Übungen. (Auch ist es fraglich, ob sich der Aufwand für lange Rechnungen vor dem Hintergrund der heute zur Verfügung stehenden Computeralgebra–Methoden beim gegebenen Rahmen noch rechtfertigt. Aus der Kenntnis der Methoden kann aber bei andern Problemen Nutzen gezogen werden.)

7.1.7 Die Methode

Wir wollen hier die Methode im Hinblick auf das gegebene Fachhochschulniveau selbstständig entwickeln, ohne auf Darstellung in der Literatur zu schauen.

Gegeben sei der Rayleigh–Quotient $\frac{A(u, u)}{B(u, u)} = R(x) \geq \lambda_1 \forall u \in U$ eines Problems $A(u, u) = \lambda B(u, u)$ mit der ersten Eigenfunktion u_1 , $A(u_1, u_1) = \lambda_1 B(u_1, u_1)$ wie oben beschrieben, bei gegebenen zulässigen Randbedingungen. Da die verwendeten Operatoren A und B positiv definit sind, gilt:

$$0 \leq \lambda_1 B(u, u) \leq A(u, u) \Rightarrow 0 \leq A(u, u) - \lambda_1 B(u, u) := H(u, u, \lambda_1), \quad H(u_1, u_1, \lambda_1) = 0$$

Das heisst: $H(u, u, \lambda_1)$ ist sicher positiv semidefinit und wird durch eine erste Eigenfunktion u_1 minimiert.

Sei $M = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)\} \subset U$ eine Auswahl von Vergleichsfunktionen. Damit bilden wir die Funktion $v(x) := v_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x) := \sum_{i=1}^n a_i v_i(x) \in U$, $a_i \in \mathbb{R} \forall i=1, \dots, n$. Die Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n sollen nun so bestimmt werden, dass $v(x)$ den Operator $H(u, u, \lambda_1)$ möglichst klein macht mit der Absicht, dadurch ein Kriterium für eine Schranke von λ_1 zu gewinnen. Wir werden sehen, dass $H(v, v, \lambda_1)$ eine quadratische Funktion in den Koeffizienten a_i ist, woraus die Existenz eines Minimums folgt. Bei der gewählten endlichen Menge M ist nun $v(x)$ eine Linearkombination der bekannten $v_i(x) \in M$. Da x durch die Anwendung des Operators zu einer inneren, gebundenen Variablen wird, können wir setzen: $H(v, v, \lambda_1) := h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)$, wobei λ_1 als fixer Parameter zu denken ist. Für ein Minimum erhalten wir somit die Minimalitätsbedingung:

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} = 0 \quad \forall i=1, \dots, n$$

Um jeweils auf ein spezielles a_j zugreifen zu können, führen wir eine angepasste Schreibweise ein. Sei also:

$$v(x) := v_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x) := a_j v_j(x) + \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i(x) := a_j v_j(x) + r_j(x), \quad r_j(x) = \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i(x)$$

$r_j(x)$ ist somit unabhängig von a_j . Daher gilt:

$$h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) = A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) + \lambda_1 B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$$

Damit können wir $A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$ und $B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j)$ besser „durchleuchten“. Z.B. gilt:

$$\begin{aligned}
& A(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) = A(a_j v_j, a_j v_j + r_j) + A(r_j, a_j v_j + r_j) \\
= & A(a_j v_j, a_j v_j) + A(a_j v_j, r_j) + A(r_j, a_j v_j) + A(r_j, r_j) = a_j^2 A(v_j, v_j) + a_j A(v_j, r_j) + a_j A(r_j, v_j) + A(r_j, r_j) \\
& = a_j^2 A(v_j, v_j) + 2 a_j A(v_j, r_j) + A(r_j, r_j)
\end{aligned}$$

Ebenso ist:

$$B(a_j v_j + r_j, a_j v_j + r_j) = a_j^2 B(v_j, v_j) + 2 a_j B(v_j, r_j) + B(r_j, r_j)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) &= a_j^2 (A(v_j, v_j) - \lambda_1 B(v_j, v_j)) + 2 a_j (A(v_j, r_j) - \lambda_1 B(v_j, r_j)) + (A(r_j, r_j) - \lambda_1 B(r_j, r_j)) \\
&= a_j^2 H(v_j, v_j, \lambda_1) + 2 a_j H(v_j, r_j, \lambda_1) + B(r_j, r_j, \lambda_1)
\end{aligned}$$

Dabei sind hier v_j , r_j und λ_1 unabhängig von a_j . Daher ist es jetzt einfach, $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)$ nach a_j abzuleiten:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_j} &= 2 a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + 2 H(v_j, r_j, \lambda_1) = 0 \quad \forall j=1, \dots, n \\
\Rightarrow a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + H(v_j, r_j, \lambda_1) &= 0 \quad \forall j=1, \dots, n
\end{aligned}$$

Wenn wir den Operator H wieder durch den Ausdruck in A und B ersetzen, so erhalten wir:

$$a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) = a_j (A(v_j, v_j) - \lambda_1 B(v_j, v_j)) = (A(v_j, a_j v_j) - \lambda_1 B(v_j, a_j v_j)) \quad \forall j=1, \dots, n$$

$$H(v_j, r_j, \lambda_1) = A(v_j, r_j) - \lambda_1 B(v_j, r_j) = A(v_j, \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i) - \lambda_1 B(v_j, \sum_{i=1, i \neq j}^n a_i v_i)$$

Daher ist:

$$\begin{aligned}
0 &= a_j H(v_j, v_j, \lambda_1) + H(v_j, r_j, \lambda_1) = A(v_j, \sum_{i=1}^n a_i v_i) - \lambda_1 B(v_j, \sum_{i=1}^n a_i v_i) \\
&\Rightarrow \sum_{i=1}^n a_i (A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i)) \quad \forall j=1, \dots, n
\end{aligned}$$

Diese Bedingung bedeutet, dass wir ein homogenes System von n linearen Gleichungen ($j = 1, \dots, n$) mit n Unbekannten a_1, a_2, \dots, a_n vor uns haben. Von diesem System suchen wir nicht die Trivialsolution $a_1 = 0, \dots, a_n = 0$. Nach dem oben Gesagten muss zur Komposition von $v(x)$ eine nicht triviale Lösung existieren. Daher muss die Determinante dieses Systems $= 0$ sein.

Die Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems hat in den Zellen immer Terme der Form $H(v_j, v_i, \lambda_1) = A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i)$. Dabei ist j der Zeilenindex und i der Spaltenindex. Wir schreiben:

$$d = \det((H(v_j, v_i, \lambda_1))) = \det((A(v_j, v_i) - \lambda_1 B(v_j, v_i))_{j,i=1, \dots, n}) = 0$$

Die Elemente $A(v_j, v_i)$ und $B(v_j, v_i)$ sind Zahlen $\in \mathbb{R}$, die man mit Hilfe der gegebenen Funktionen v_j, v_i und den bekannten Operatoren A und B berechnen kann. Unbekannt in der Determinante ist bei unserem Ansatz einzig der Eigenwert λ_1 . Die Determinante ist nun, wie man aus der Determinantenberechnung weiss, ein Polynom vom Grade n in λ_1 (charakteristisches Polynom). Damit lässt sich für λ_1 aus den Elementen der erhaltenen Lösungsmenge eine obere Schranke gewinnen.

Umgekehrt folgt aus $\det((H(v_j, v_i, \lambda_1))) = 0$, dass unser Gleichungssystem linear abhängig ist, dass also eine nichttriviale Lösung $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ existiert, welche die Bedingung

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} = 0 \quad \forall_{i=1, \dots, n}$$

erfüllen muss, aus der ja das Gleichungssystem gewonnen werden kann. Daher muss die nichttriviale Lösung eine Extremalstelle oder einen sattelartigen Punkt wiedergeben. Daraus kann man ohne weitere Ausführungen plausibel herleiten, dass die kleinste positive Nullstelle des charakteristischen Polynoms den 1. Eigenwert approximiert.

Konsequenz:

Vor.:

Seien $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine zulässige Auswahl von Vergleichsfunktionen $\in U$.

Beh.:

Die kleinste positive Lösung λ von

$$d = d(\lambda) = \det((A(v_j, v_i) - \lambda B(v_j, v_i))_{j,i=1, \dots, n}) = 0$$

approximiert den 1. Eigenwert.

Der betrachtete Unterraum U , aus dem unsere Funktionen stammen, lässt sich schreiben als innere direkte Summe der linearen Hülle U_1 der ersten Eigenfunktion u_1 und der der linearen Hülle U_1^\perp der weiteren Eigenfunktionen u_2, u_3, u_4, \dots . Dabei wissen wir aus der eingangs behandelten Operatoretheorie, dass die Eigenfunktionen paarweise orthogonal sind. Daher könnten wir dieses Verfahren zur Gewinnung weiterer Eigenwerte ausdehnen. Z.B. um den 2. Eigenwert zu approximieren kann man die Testfunktionen auf U_1^\perp einschränken, indem man nach der Berechnung die Beiträge aus U_1 entfernt. (Berechnung der 1. Eigenfunktion siehe Seite 210.)

Glücklicherweise ist eine mit Aufwand verbundene Einschränkung der Testfunktionen auf einen Unterraum U_1^\perp nicht notwendig.

Um das einzusehen betrachten wir unser Eigenwertproblem $\mathcal{P} : A(\varphi, \varphi) = \lambda B(\varphi, \varphi)$, $\varphi \in U$. (Mit $\varphi \in U$ werden unsere Randbedingungen erfüllt.) Nach dem auf Seite 204 dargelegten Satz existiert zu unserem Problem \mathcal{P} in U eine abzählbar unendliche Folge von Eigenfunktionen φ_n und dazu eine monoton wachsende Folge von Eigenwerten $\lambda_n \in \mathbb{R}^+$. Schränkt man die Menge der zulässigen Funktionen auf $U_1^\perp \subset U$ ein, so liegen die Eigenfunktionen ψ_k des eingeschränkten Problems mit U_1^\perp immer noch in U , müssen also unter unter den Funktionen $\{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ vorkommen. Daher gilt: $\{\psi_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{\varphi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Für die zu den ψ_k gehörigen Eigenwerten μ_k gilt entsprechend ebenfalls $\{\mu_k \mid k \in \mathbb{N}\} \subset \{\lambda_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Eine Einschränkung unseres Eigenwertproblems auf U_1^\perp führt also zu Teilmengen der Eigenwerte und der Eigenfunktionen des Eigenwertproblems in U und etwa nicht zu neuen Eigenwerten oder Eigenfunktionen ausserhalb der Menge derjenigen für U . Alle Eigenwerte und Eigenfunktionen erfüllen immer die Gleichung $H(\varphi_k, \varphi_k, \lambda_k) = A(\varphi_k, \varphi_k) - \lambda_k B(\varphi_k, \varphi_k) = 0$ resp. $H(\varphi_k, \varphi_k, \lambda_k) = 0$. Zum Eigenwert λ_2 ist daher $H(v, v, \lambda_2)^2 \geq 0$ unabhängig davon, ob v in U oder speziell in U_1^\perp gewählt wird. Sei U_M die lineare Hülle von M . Unter Verwendung der schon oben benutzten Bezeichnungen existiert nun wegen $H(v, v, \lambda_2)^2 \geq 0$ in U_M für $H(v, v, \lambda_2)^2 = h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2$ ein Minimum bei einer speziellen Wahl der Koeffizienten a_1, a_2, \dots, a_n . (Denn bei $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2$ handelt es sich um ein Polynom vom Grade 4.) Dieses Minimum findet man mit Hilfe der Minimalitätsbedingung

$$\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2}{\partial a_i} = 2 \cdot \frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)}{\partial a_i} \cdot h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) = 0 \quad \forall_{i=1, \dots, n}.$$

Bei der Wahl von beliebigen, von den zugehörigen Eigenfunktionen verschiedenen Testfunktionen ist $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) \neq 0$, und daher $\frac{\partial(h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2)}{\partial a_i} = 0$. Somit wird das charakteristische Polynom $d(\lambda) = 0$, woraus man den Eigenwerte berechnen kann. Damit ist auch der 2. Eigenwert eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms, falls M genügend gross gewählt wird (siehe unten). Würde man andererseits zufällig $M = \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x)\}$ aus lauter Eigenfunktionen zum 2. Eigenwert bilden, so wäre $h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1) \equiv 0$ und somit $\frac{\partial h(a_1, a_2, \dots, a_n, \lambda_1)^2}{\partial a_i}$ ebenfalls = 0.

Zur genügend grossen Wahl von M :

Wählt man zur Approximation von λ_1 die Menge $M = \{\varphi_3\}$ ($\varphi_3 = 3$. Eigenfunktion), so wird man λ_3 statt λ_1 finden. Wählt man zur Approximation von λ_2 entsprechend $M = \{\varphi_3, \varphi_4\}$, so findet man λ_3 und λ_4 , aber nicht λ_2 , denn man approximiert ja über U_M .

Um bei der Bildung von $v(a_1, a_2, \dots, a_n)$ zur Berechnung von λ_2 bei einer Approximation über U einen Funktionsanteil aus $U_{\{\varphi_2\}}$ mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit nicht ausgeschlossen zu haben, muss M mindestens $n = 2$ (linear unabhängige) Testfunktionen enthalten. Geht man entsprechend vor zur Berechnung des 3., 4. oder allgemein des n -ten Eigenwerts λ_n , so muss $|M| \geq n$ sein. (M linear unabhängig.) Zusammengefasst ergibt sich nun

Konsequenz:

Die Eigenwerte der 2., 3., u.s.w. Eigenfunktionen von $A(\varphi, \varphi) = \lambda B(\varphi, \varphi)$ werden durch die weiteren Nullstellen $\lambda_n > \lambda_1$ des charakteristischen Polynoms über U bei günstiger Wahl der Testfunktionen $M = \{v_1, \dots, v_n\}$ approximiert. Zur Approximation von n verschiedenen Eigenwerten ist für die Menge der Testfunktionen M die Bedingung $|M| = n$ notwendig, aber nicht hinreichend.

Daher wird es plausibel, bei der Approximation der weiteren Eigenwerte nach dem auf Seite 210 gezeigten Verfahren mit DSolve und FindRoot Startwerten aus der Nullstellenmenge der charakteristischen Polynoms zu verwenden.

Bsp.:

Input:

```
xL=1;
y1[x_]:=Sin[(Pi)/xL x];
y2[x_]:=x^2 (x-xL)^2;
y3[x_]:=x(x-xL);
A[ya_,yb_]:= -Integrate[D[ya[x],{x,2}] yb[x],{x,0,xL}];
B[ya_,yb_]:= Integrate[x ya[x] yb[x],{x,0,xL}];
H[ya_,yb_,lambda_]:= A[ya,yb] - lambda B[ya,yb];
m = {{H[y1,y1,lambda],H[y1,y2,lambda],H[y1,y3,lambda]},
      {H[y2,y1,lambda],H[y2,y2,lambda],H[y2,y3,lambda]},
      {H[y3,y1,lambda],H[y3,y2,lambda],H[y3,y3,lambda]}};
Print[m//Simplify//MatrixForm];
Print[Det[m]//N//ExpandAll//Simplify];
NSolve[Det[m]==0,{lambda}]
```

Output (Matrix):

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4}(2\pi^2 - \lambda) & -\frac{2(-12 + \pi^2)(2\pi^2 - \lambda)}{\pi^5} & \frac{2(\lambda - 2\pi^2)}{\pi^3} \\ -\frac{2(-12 + \pi^2)(2\pi^2 - \lambda)}{\pi^5} & \frac{24 - \lambda}{1260} & \frac{1}{840}(3\lambda - 56) \\ \frac{2(\lambda - 2\pi^2)}{\pi^3} & \frac{1}{840}(3\lambda - 56) & \frac{20 - \lambda}{60} \end{pmatrix}$$

Output (Determinante):

$$-5.93327 * 10^{-14}(\lambda - 692.818)(\lambda - 178.23)(\lambda - 19.739)$$

Output (Lösungen für λ):

$$\{\{\lambda \rightarrow 19.739\}, \{\lambda \rightarrow 178.23\}, \{\lambda \rightarrow 692.818\}\}$$

Wir kontrollieren und verbessern nun die Resultate mit *Mathematica*. Dabei benutzen wir das auf Seite 210 beschriebene Verfahren und auch die dazugehörigen Programme:

Zur Approximation = 178.23:

Input:

```
FindRoot [Re [(yy[x] /. {c2->1, x->1})], {k, 178.23}]
```

Output:

$$x - > 189.221$$

Input:

```
FindRoot [Im [(yy[x] /. {c2->1, x->1})], {k, 189.221}]
```

Output:

$$x - > 189.221$$

Input:

```
FindRoot [Re [(yy[x] /. {c2->1, x->189.221})], {x, 1.}]
```

Output:

$$x - > 1.$$

Input:

```
FindRoot [Im [(yy[x] /. {c2->1, x->189.221})], {x, 1.}]
```

Output:

$$x - > 1.$$

Resultat: Der 2. gefundene Eigenwert liegt bei 189.221. (Die Approximation ergab 178.23.)

Zur Approximation = 692.818:

Input:

FindRoot [Re [(yy [x] /. {c2->1, x->1})], {k, 692.818}]

Output:

$$x - > 777.698$$

Input:

FindRoot [Im [(yy [x] /. {c2->1, x->1})], {k, 777.698}]

Output:

$$x - > 777.698$$

Input:

FindRoot [Re [(yy [x] /. {c2->1, x->777.698})], {x, 1.}]

Output:

$$x - > 1.$$

Input:

FindRoot [Im [(yy [x] /. {c2->1, x->777.698})], {x, 1.}]

Output:

$$x - > 1.$$

Resultat: Der 3. gefundene Eigenwert liegt bei 777.698. (Die Approximation ergab 692.818.)

Kapitel • Chapitre 8

Partielle Differentialgleichungen (Anhang 2) — Annexe 2 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

8.1 Partielle Differentialgleichungen

Für die Ableitungen werden wir folgende Notationsarten verwenden:

$$u_y := \frac{du}{dy} \Big|_{x=\text{const.}} = u'_y = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad u_{yx} := u''_{yx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

8.1.1 Quasilineare part. D'gl 1. Ordnung mit zwei Variablen

Die Charakteristikmethode

Sei $u_x := u_x'(x, y)$, $u_y := u_y'(x, y)$ und $z := u(x, y)$ (\leadsto Fläche). Wir studieren das Problem

$$\mathcal{D}(u) := a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y = \left\langle \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} \right\rangle = c(x, y, z).$$

Sprechweise: Eine Funktion $z = u(x, y)$, welche obige Gleichung erfüllt, eine Lösungsfunktion also, stiftet eine Fläche, die wir **Integralfläche** nennen.

Wir setzen fest: $v(x, y, z) := u(x, y) - z = 0 = \text{const.}$. Der Gradient $\vec{n} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}$ ist bekanntlich ein Normalenvektor auf die Integralfläche zum Niveau 0 in (x, y, z) . Weiter gilt wegen der D'gl.:

$$\left\langle \vec{n}, \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix} \right\rangle = a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y - c(x, y, z) = 0$$

Da obiges Skalarprodukt gleich $a(x, y, z) u_x + b(x, y, z) u_y + c(x, y, z)(-1) = 0$ ist, erkennen wir $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$ als Tangentialvektor an die Integralfläche. Wir definieren nun:

Definition:

Eine Kurve $\vec{\gamma} : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^3$ mit $t \mapsto \vec{\gamma}(t)$ heisst **Charakteristik** oder **charakteristische Kurve** von $\mathcal{D}(u) = c$, wenn sie eine Integalkurve des nachfolgenden Vektorfeldes ist:

$$\vec{\gamma}'_t = \begin{pmatrix} a(\vec{\gamma}^T(t)) \\ b(\vec{\gamma}^T(t)) \\ c(\vec{\gamma}^T(t)) \end{pmatrix}, \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}.$$

($\vec{\gamma}^T(t)$ ist transponiert, also Zeilenvektor). Wir wollen folgendes Lemma beweisen:

Lemma:

Vor.:

Die Charakteristik γ hat mit der Integralfläche einen Punkt gemeinsam.

Beh.:

γ liegt in der Integralfläche.

Mit Hilfe dieses Lemmas werden wir die Integralfläche mittels Charakteristiken erzeugen oder beschreiben können.

Beweis:

Betrache $u(\vec{\gamma}^T(t)) - z(t) := u(x(t), y(t)) - z(t) = v(t)$.

$$\leadsto v_t' = u_x \cdot x_t + u_y \cdot y_t + (-1)z_t = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{\gamma}_t' \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad \forall t$$

$$\Rightarrow v_t' = \text{const.}$$

Wegen $v_t' = \text{const.}$ ist mit $v(t_0) = 0$ auch $v(t) \equiv 0$. D.h. $u(\vec{\gamma}^T(t)) = z(t)$. ☺

Damit können wir den folgenden Satz formulieren:

Satz:**Vor.:**

1. Sei $\vec{\Gamma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine Kurve auf der Integralfläche zu $\mathcal{D}(u) = c$, welche die Charakteristiken transversal schneidet (Schnittwinkel $\neq 0$).
2. Für jedes s sei die Kurve $\vec{\gamma}_s(t)$ eine Charakteristik mit $\vec{\gamma}_s(0) = \vec{\Gamma}(s)$

Beh.:

$(s, t) \mapsto \vec{\gamma}_s(t)((s, t))$ ist eine Parameterdarstellung der Integralfläche in einer Umgebung Γ (in der Nähe von Γ).

Damit können wir zur Lösung einer gegebenen part. D'gl. $\mathcal{D}(u) = c$ versuchen die Charakteristiken zu bestimmen. Mit Hilfe von $\begin{pmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \end{pmatrix} = \vec{\gamma}_t' = \begin{pmatrix} a(\vec{\gamma}^T(t)) \\ b(\vec{\gamma}^T(t)) \\ c(\vec{\gamma}^T(t)) \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \vec{\gamma}(t)$ ist dies bei einer als Nebenbedingung gegebenen Kurve $\vec{\Gamma}(s)$ meist nicht schwierig.

Bsp.: Gegeben: $\mathcal{D}(u) = 2u_x + y \cdot u_y - x = x_0 u_x + y \cdot u_y + z(-1) = 0$, $u(2, y) = 2y - 3$, $0 \leq y \leq 4$

$$1. \leadsto u(2, y) = 2y - 3 \Rightarrow \Gamma : s \mapsto \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ u = z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ 2y - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 2s - 3 \end{pmatrix}$$

$$2. \leadsto \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ y \\ x \end{pmatrix} = \vec{\gamma}_t' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$3. \begin{aligned} x_t'(t) = 2 &\Rightarrow x(t) = 2t + c_1 \\ y_t'(t) = y(t) &\Rightarrow y(t) = e^t \cdot c_2 \\ z_t'(t) = x(t) &\Rightarrow z(t) = t^2 + t \cdot c_1 + c_3 \\ \leadsto \vec{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ e^t \cdot c_2 \\ -t^2 + t \cdot c_1 + c_3 \end{pmatrix} &\Rightarrow \vec{\gamma}(0) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$4. \vec{\gamma}_s(0) = \vec{\Gamma}_s = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ s \\ 2s - 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{\gamma}_s(t) = \begin{pmatrix} 2t + 2 \\ e^t \cdot s \\ t^2 + t \cdot 2 + 2s - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow t = \frac{x-2}{2}, \quad s = y \cdot e^{-t} = y \cdot e^{-\frac{x-2}{2}}$$

$$5. \quad u(x, y) = z = t^2 + 2t + 2s - 3 = \left(\frac{x-2}{2}\right)^2 + 2\left(\frac{x-2}{2}\right) + 2y e^{-\frac{x-2}{2}} - 3 = \frac{x^2}{4} + 2e^{1-\frac{x}{2}}y - 4$$

8.1.2 Klassifikation bei part. D'gl. 2. Ordnung

Eine **partielle Differentialgleichung** ist eine Differentialgleichung, in der Ableitungen nach verschiedenen Variablen vorkommen. Wir werden hier in unserem kurzen Ausblick nur Differentialgleichungen bis 2. Ordnung studieren und auch von einer eingehenden Betrachtung von Fällen mit mehr als zwei Variablen des gesteckten Rahmens wegen absehen müssen. Zuerst wollen wir eine heute überall verwendete nützliche Klassifikation erklären. Gegeben sei dazu eine Differentialgleichung mit zwei Ortsvariablen x und y und technisch unauffälligen, vernünftigen Lösungen, so dass wir von $u_{xy} = u_{yx}$ ausgehen können:

$$a_{11} u_{xx} + 2a_{12} u_{xy} + a_{22} u_{yy} + b_1 u_x + b_2 u_y + c u = f \quad (= 0)$$

Mit $\vec{D} := \begin{pmatrix} \frac{\partial \cdot}{\partial x} \\ \frac{\partial \cdot}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{grad}(\cdot)$ können wir diese Gleichung unter Beachtung der Symmetrie $a_{12} = a_{21}$

kürzer schreiben:
$$\vec{D}^T \cdot u(x, y) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{=A} \cdot \vec{D} + u \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \cdot D + u \cdot c = f$$

Dabei ist $\det(A) = \left| \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \right| = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2$.

Wir transferieren das Problem jetzt formal in die analytische Geometrie, indem wir setzen:

$$u_x = \alpha, \quad u_y = \beta, \quad u_{xx} = \alpha^2, \quad u_{yy} = \beta^2, \quad u_{xy} = \alpha \cdot \beta, \quad u = 1$$

Damit wird die Differentialgleichung zu einer Kegelschnittgleichung:

$$\Rightarrow P(\alpha, \beta) = a_{11} \alpha^2 + 2a_{12} \alpha \cdot \beta + a_{22} \beta^2 + b_1 \alpha + b_2 \beta + c = 0$$

Hier verwendet man die folgende Klassifikation der Kegelschnitte:

$$\begin{aligned} a_{12}^2 - a_{11} a_{22} &= -\det(A) > 0 && \text{Hyperbel} \\ a_{12}^2 - a_{11} a_{22} &= -\det(A) = 0 && \text{Parabel} \\ a_{12}^2 - a_{11} a_{22} &= -\det(A) < 0 && \text{Ellipse} \end{aligned}$$

Aus formalen Gründen übernehmen wir diese Klassifikation auch für die partiellen Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} \det(A) < 0 &&& \text{Differentialgleichung hyperbolisch} \\ \det(A) = 0 &&& \text{Differentialgleichung parabolisch} \\ \det(A) > 0 &&& \text{Differentialgleichung elliptisch} \end{aligned}$$

8.1.3 Verfeinerung der Klassifikation

Allgemeiner sein eine partielle Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten auf $G \subseteq \mathbb{R}^n$ gegeben:

$$(*) \quad \mathcal{D}(u) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c u = 0$$

(Dabei ist $a_{ij}, b_i, c = \text{const.}$)

Definition:

1. (*) **elliptisch** \Leftrightarrow alle Eigenwerte von (a_{ij}) entweder positiv oder negativ, kein Eigenwert $= 0$.
2. (*) **hyperbolisch** \Leftrightarrow es gibt positive und negative Eigenwerte von (a_{ij}) , keiner ist $= 0$.
3. (*) **parabolisch** $\Leftrightarrow (a_{ij})$ hat einen Eigenwert $= 0$, d. h. nicht nach allen Variablen wird zweimal abgeleitet.

Nun gelten folgende Sachverhalte:

1. Diese Typeneinteilung ist unabhängig von den Variablen.
2. Bei einer bijektiven Variablentransformation bleibt der Typ erhalten.
3. Es gilt die Erfahrungsregel:
 - (a) Beim elliptischen Typ braucht es Randbedingungen.
 - (b) Beim parabolischen Typ braucht es Randbedingungen und Anfangsbedingungen.
 - (c) Beim hyperbolischen Typ braucht es Bedingungen für Werte und Ableitungen und ev. Randbedingungen.

Beispiele:

1. $\Delta u = 0$: Laplace-Gleichung, elliptisch.
2. $\Delta u = f$: Poisson-Gleichung, elliptisch.
3. $u_t = a^2 \Delta u$: Wärmeleitgleichung, parabolisch.
4. $u_{tt} = c^2 \Delta u$: Wellengleichung, hyperbolisch.

Sei (*) $\mathcal{D}(u) = f$.

Diese Gleichung nennen wir **homogen**, wenn $f \equiv 0$ gilt.

(*) heisst hingegen **inhomogen**, wenn $f \not\equiv 0$ ist.

Entsprechend für die Nebenbedingungen.

Nun gilt das Superpositionsprinzip für die homogene Gleichung mit homogenen Nebenbedingungen:

Satz:

Gegeben sei $\mathcal{D}(u) = 0$ mit homogenen Nebenbedingungen.
 $\{u_i \mid i \in I\}$ sein eine Menge von Lösungen (Basislösungen).

Dann ist $\sum_{i=1}^n c_i u_i$ ebenfalls Lösung ($c_i \in \mathbb{R}$).

8.1.4 Das Beispiel der Wärmeleitgleichung

Homogene Randbedingungen in x

Die Wärmeleitgleichung ist eine parabolische Differentialgleichung ($\det(A) \cdot 0^2 - a_{11} \cdot 0 = 0$). Wir studieren den folgenden Fall eines 1-dimensionalen Drahtes (oder Welle, Stab, Stange oder Rute):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

Dabei stellen wir die Rand- und Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } u(0, t) = 0 = u(x_L, t) \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

$u(x, t)$ bedeutet dabei die Temperatur an der Stelle x zur Zeit t . k ist die Temperaturleitfähigkeit². $u(0, t) = 0 = u(x_L, t)$ bedeutet, dass man die Temperatur so geeicht hat, dass am Rand des Stabs die Temperatur 0 herrscht.

Für $f(x)$ fordern wir: $f \in L^2$ über $I = [0, x_L]$. Wenn wir also für f eine ungerade, stückweise stetige, $2x_L$ -periodische Funktion voraussetzen, ist die eben gestellte Forderung erfüllt.

Jetzt versuche wir eine Separationsansatz: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$.

Diesen Ansatz setzen wir in die Gleichung ein und erhalten:

$$X(x) \cdot T'(t) = k \cdot X''(x) \cdot T(t) \Rightarrow \underbrace{\frac{1}{k} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)}}_{=h_1(t)} = \underbrace{\frac{X''(x)}{X(x)}}_{=h_2(x)}$$

Daraus folgt: $k \cdot h_2(x) = h_1(t) = \text{const.}$, denn für ein fixes t_0 ist $c_1 = k \cdot h_2(x) = h_1(t_0)$ und für ein fixes x_0 folgt $k \cdot h_2(x_0) = h_1(t) = c_2 \Rightarrow c_1 = c_2 = \text{const.} = c$. Damit erhalten wir ein Gleichungssystem, in dem wir hier gleiche Temperaturen an den Stabsenden voraussetzen. Dabei normieren wir die Temperaturskala so, dass die Temperatur an den Stabsenden 0 wird:

$$\left(\begin{array}{l} (1) \quad \frac{1}{k} \cdot \frac{T'(t)}{T(t)} = c \\ (2) \quad \frac{X''(x)}{X(x)} = c \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} X(0) \cdot T(t) = 0 \\ X(x_L) \cdot T(t) = 0 \\ \Rightarrow X(0) = X(x_L) = 0 \end{array}$$

Anders geschrieben:

$$(1) T'(t) = k \cdot c \cdot T(t), \quad (2) X''(x) = c \cdot X(x)$$

Auf die eingangs gestellte Anfangsbedingung $u(x, 0) = f(x)$, $0 \leq x \leq x_L$ werden wir erst später zurückgreifen.

Damit erhalten wir mit (2) ein Eigenwertproblem für X :

$$X''(x) = c \cdot X(x), \quad X(0) = X(x_L) = 0$$

Die Basislösungen dieses Problems kennen wir bereits ($c = c_n$ ist Eigenwert, $X(x) = X_n(x)$ ist Eigenfunktion, A_n ist beliebig):

$$X_n(x) = A_n \cdot \sin(\sqrt{c_n} \cdot x) = A_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi}{x_L} \cdot x\right), \quad c_n = -\frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2}$$

²Lit.: Siehe z.B. bei Jürgen Eichler, Physik, Grundlagen für das Ing'studium, Vieweg 2004, p. 107

Die Eigenwerte erhält man übrigens durch Einsetzen der Eigenfunktion in die Eigenwertgleichung infolge der 2. Ableitung.

Und der Fall $n = 0$ fällt hier weg, denn dann wäre $X_0(x) = A_0 \cdot \sin\left(\frac{0 \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \equiv 0$, $c_0 = -\frac{0^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} = 0$.

Weiter gilt: $A_{-n} \cdot \sin\left(\frac{(-n) \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) = -A_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right)$ bei vorläufig freiem A_n . Für negative n erhalten wir also keine neuen Lösungen.

Nun setzen wir die Eigenwerte in Gleichung (1) ein. Es folgt für $T(t) = T_n(t)$:

$$T_n'(t) = k \cdot c_n \cdot T_n(t) = -k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot T_n(t) \Rightarrow T_n'(t) + k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot T_n(t) = 0$$

Hier kennen wir wiederum die Basislösungen:

$$T_{n,B}(t) = e^{-k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t}, \quad T_{n,B}(0) = 1, \quad T_n'(t) = B_n \cdot T_{n,B}(t).$$

Zu einem gegebenen k existieren demnach mehrere Lösungen $u_n(x, t) = X_n(x) \cdot T_n(t)$. Solche Lösungen lassen sich jetzt unter Beachtung der gegebenen Differentialgleichung auch strecken und addieren, da alle beteiligten Funktionen die Randbedingungen erfüllen und daher die Summe auch die RBD erfüllen muss. Mit $C_n = A_n \cdot B_n$ können wir mit Hilfe der Basislösungen schreiben, wobei wir z.B. statt $T_{n,B}(t)$ nun kurz $T_n(t)$ setzen:

$$\left| \begin{array}{l} C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n'(t) = k \cdot C_n \cdot X_n''(x) \cdot T_n(t) \\ C_m \cdot X_m(x) \cdot T_m'(t) = k \cdot C_m \cdot X_m''(x) \cdot T_m(t) \end{array} \right|$$

$$\Rightarrow C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n'(t) + C_m \cdot X_m(x) \cdot T_m'(t) = k \cdot C_n \cdot X_n''(x) \cdot T_n(t) + k \cdot C_m \cdot X_m''(x) \cdot T_m(t)$$

Lemma:

Mit $u_j(x, t) = C_j \cdot X_j(x) \cdot T_j(t)$ ist die Summe zweier Lösungen

$$u_{\text{Summe}}(x, t) = u_n(x, t) + u_m(x, t)$$

wieder Lösung der Wärmeleitgleichung.

Wie wir gesehen haben, existieren unabhängige Lösungen nur für $n > 0$. Daher können wir formulieren:

Lemma:
$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot X_n(x) \cdot T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot e^{-k \cdot \frac{n^2 \cdot \pi^2}{x_L^2} \cdot t}$$

Wegen der Randbedingung $u(x, 0) = f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right)$ haben wir für $u(x, 0)$ eine Fourierreihe (Sinusreihe) gegeben. Dabei ist f , wie eingangs erwähnt, eine ungerade, stückweise stetige, $2x_L$ -periodische Funktion.

Demnach haben wir das Problem, die Fourierkoeffizienten c_n zu berechnen. Von den Fourierkoeffizienten und den Fourierreihen wissen wir:

1.

$$\int_{-x_L}^{x_L} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = x_L \cdot \delta_{mn}$$

δ_{mn} ist das Kronecker-Symbol mit der Bedeutung: $\delta_{mn} = 1$ für $m = n$ und $\delta_{mn} = 0$ sonst.

$$\begin{aligned}
2. \int_{-x_L}^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx &= \int_{-x_L}^{x_L} \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot \int_{-x_L}^{x_L} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot x_L \cdot \delta_{mn} \\
\Rightarrow \int_{-x_L}^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx &= 2 \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx = C_m \cdot x_L \\
\Rightarrow C_m &= \frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \quad \text{Damit gilt:}
\end{aligned}$$

Satz: Die Wärmeleitgleichung $\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < x_L$ mit den Rand- und Anfangsbedingungen

$$\text{RBD: } u(0, t) = 0 = u(x_L, t) \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

hat bei ungeradem, stückweise stetigem und $2x_L$ -periodischem f die folgende Lösung:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) dx \right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{x_L}\right) \cdot e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{x_L^2} t}$$

Konsequenz: Sind die Fourierkoeffiziente von der üblichen Gestalt, dass keine Konvergenzprobleme auftreten, so gilt $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-k \frac{n^2 \pi^2}{x_L^2} t} = 0$ und damit auch $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$. Das ist natürlicherweise auch zu erwarten.

Bsp.: Wir berechnen $u(x, t)$ mit *Mathematica* bei folgenden Bedingungen:

$$x_L = 1, \quad k = 1, \quad f(x) = 8x(1 - x^2)$$

Dann stellen wir $u(x, t_n)$ graphisch dar für

$$n = 0., 0.03125, 0.0625, 0.09375, 0.125, 0.15625, 0.1875, 0.21875, 0.25$$

Input:

```

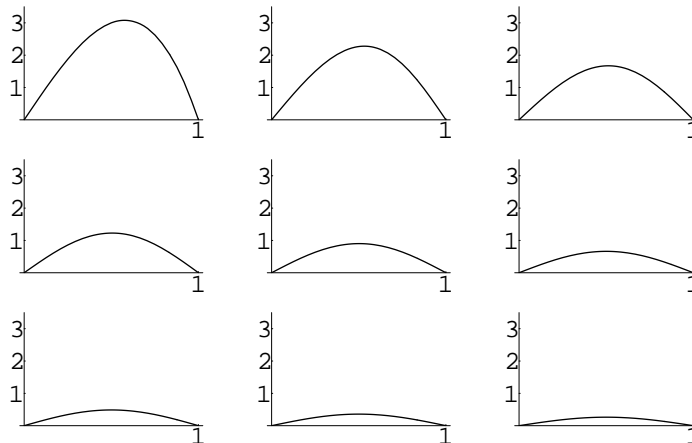
Remove["Global`*"]
xL = 1; k = 1;
f[x_] := 8 x (1 - x^2);
mm = 10; r = 3.5;
Cc[n_] := 2/xL NIntegrate[f[x] Sin[n Pi x /xL], {x, 0, xL}];
u[x_, t_, n_] := Cc[n] Sin[n Pi x /xL] E^(-k t (n Pi/xL)^2);
uApprox[x_, t_, n_] := Sum[u[x, t, j], {j, 1, n}];
graphs = Table[Plot[uApprox[x, t, mm], {x, 0, xL},
  PlotRange -> {0, r}, Ticks -> {{0, 1},
    Range[0, Floor[r]]},
  DisplayFunction -> Identity], {t, 0, 1/4, 1/32}];
graphsarray = Partition[graphs, 3];

```

```
Show[GraphicsArray[graphsarray],
      DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Output:

Graphik



Bemerkung:

Es ist auch möglich, Wärmeleitgleichung mit Hilfe der Laplace-Transformationen zu behandeln. So kann man in $u(x, t)$ die Variable x als Parameter auffassen und die Gleichung bezüglich der Variablen t transformieren: $u(x, t) \circ \bullet U(x, s)$. Wenn man dann im Bildraum die Betrachtungsweise wieder vertauscht und x als Variable und s als Parameter auffasst, so hat man hier eine gewöhnliche Differentialgleichung, die man einfach lösen und als eine Sinusreihe (Fourierreihe mit der Variablen x) schreiben kann. Diese Sinusreihe kann man bezüglich dem Parameter s zurücktransformieren, wodurch man die oben festgestellte Lösung erhält. Die explizite Durchführung des Verfahrens sei als Übung dem Leser überlassen.

Inhomogene Randbedingungen in x

Wir betrachten nun das verwandte Problem

$$\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

mit inhomogene Randbedingungen und obigen Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } v(0, t) = a, \quad v(x_L, t) = b \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } v(x, 0) = g(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

Dieses Problem vergleichen wir mit dem oben besprochenen Problem

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < x_L$$

mit den homogene Randbedingungen und den Anfangsbedingungen:

$$\text{RBD: } u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0$$

$$\text{ABD: } u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L$$

Sei u eine Lösung des Problems mit den homogenen Randbedingungen. Es gilt also

$$u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \text{ für } t \geq 0, \quad u(x, 0) = f(x) \text{ für } 0 \leq x \leq x_L.$$

Wir setzen nun $v(x, t) = u(x, t) + h(x)$, $h(x) = \frac{(b-a)}{x_L} x + a$.

Die Funktion $h(x)$ hat die folgenden Randwerte:

$$h(0) = \frac{(b-a)}{x_L} \cdot 0 + a = a, \quad h(x_L) = \frac{(b-a)}{x_L} \cdot x_L + a = b - a + a = b.$$

Wegen $u(0, t) = u(x_L, t) = 0$ ist daher $v(0, t) = u(0, t) + h(0) = 0 + a = a$, $v(x_L, t) = u(x_L, t) + h(x_L) = 0 + b = b$. Weiter gilt $g(x) = v(x, 0) = u(x, 0) + h(x) = f(x) + h(x) \Rightarrow g(x) = f(x) + h(x)$. Zudem ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} &= \frac{\partial u(x, t) + h(x)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial h(x)}{\partial t} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + 0 = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x, t) + h(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h(x)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 0 = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \end{aligned}$$

denn h ist eine lineare Funktion, deren 2. Ableitung ja 0 sein muss. Damit gewinnt man folgende Aussage:

Satz: $u(x, t)$ sei Lösung von $\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $0 < x < x_L$
mit $u(0, t) = u(x_L, t) = 0$ für $t \geq 0$, $u(x, 0) = f(x)$ für $0 \leq x \leq x_L$

Dann ist $v(x, t) = u(x, t) + h(x)$, $h(x) = \frac{(b-a)}{x_L} x + a$ Lösung von
 $\frac{\partial v}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$, $0 < x < x_L$ mit $v(0, t) = a$, $v(x_L, t) = b$ für $t \geq 0$,
 $v(x, 0) = g(x) = f(x) + h(x)$ für $0 \leq x \leq x_L$.

Damit kann man die Lösungen des Problems mit inhomogenen Randbedingungen auf die Lösungen des Problems mit homogenen Randbedingungen zurückführen.

8.1.5 Koordinatentransformationen bei Operatoren

Vorbereitung

Im Folgenden benötigen wir den **Laplace-Operator** $\Delta \cdot = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ sowie den **biharmonischen Operator** $\Delta^2 \cdot = \Delta(\Delta \cdot)$ in räumlichen Polarkoordinaten (sphärischen Koordinaten), vorerst allerdings eingeschränkt auf die Grundebene (Polarkoordinaten). Aus diesem Anlass soll hier demonstriert werden, wie man diese Operatoren mit Hilfe von Computeralgebra (hier *Mathematica*) rasch gewinnen kann, wenn man sie aus Zeitgründen nicht von Hand berechnen mag oder keine einschlägige Formelsammlung zur Verfügung hat. Als Input verwenden wir jeweils aus drucktechnischen Gründen die „**FullForm**“.

Input:

```
<<Calculus'VectorAnalysis'
```

↪ Start eines Standardpackages, das aus Platzgründen zum Kern hinzugeladen werden muss.

Definitionen**Input:**

```
MatrixForm [{{r, \[Theta], \[CurlyPhi]}}//Transpose]==
MatrixForm [CoordinatesFromCartesian[{x,y,z}, Spherical]]//Transpose]
```

Output:

$$\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \arctan(x, y) \end{pmatrix}$$

Hier definieren wir die sphärischen Koordinaten eines Punktes P . r ist wie üblich der Abstand von P zum Ursprung, θ ist der Winkel von der positiven z -Achse zum Radiusvektor von P und φ der Winkel von der positiven x -Achse zur Projektion des Radiusvektor von P in die Grundebene. Umgekehrt findet man:

Input:

```
MatrixForm [{{r, \[Theta], \[CurlyPhi]}}//Transpose]==
MatrixForm [CoordinatesFromCartesian[{x,y,z}, Spherical]]//Transpose]
```

Output:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \sin(\theta) \\ r \sin(\theta) \sin(\varphi) \\ r \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des totalen Differentials $df = f_r' dr + f_\theta' d\theta + f_\varphi' d\varphi$ erhält man die Ableitung von $f(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z))$ nach x , y oder z . Z.B. nach x :

Input:

```
Dt[f[r[x,y,z], \[Theta][x,y,z], \[CurlyPhi][x,y,z]], x]
```

Output:

$$\begin{aligned} & f^{(1,0,0)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left(\frac{dz}{dx} r^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} r^{(0,1,0)}(x, y, z) + r^{(1,0,0)}(x, y, z) \right) \\ & + f^{(0,1,0)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left(\frac{dz}{dx} \theta^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} \theta^{(0,1,0)}(x, y, z) + \theta^{(1,0,0)}(x, y, z) \right) \\ & + f^{(0,0,1)}(r(x, y, z), \theta(x, y, z), \varphi(x, y, z)) \left(\frac{dz}{dx} \varphi^{(0,0,1)}(x, y, z) + \frac{dy}{dx} \varphi^{(0,1,0)}(x, y, z) + \varphi^{(1,0,0)}(x, y, z) \right). \end{aligned}$$

Dabei ist hier $\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} = 0$. Weiter bedeutet z.B. $f^{(1,0,0)} = f_r'(r, \theta, \varphi)$

Gradient

Für den **Gradienten** $\nabla f = \text{grad}(f) = \begin{pmatrix} f_x' \\ f_y' \\ f_z' \end{pmatrix}$ einer skalaren Funktion f erhalten wir in sphärischen Koordinaten:

Input:

```
{Grad[f[r, \[Theta], f], Spherical[r, \[CurlyPhi], f]]//Transpose//MatrixForm}
```

Output:

$$\begin{pmatrix} f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) \\ \frac{f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ \frac{\csc(\theta) f^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi)}{r} \end{pmatrix}, \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Divergenz

Für die **Divergenz** $\langle \nabla, \vec{f} \rangle = \operatorname{div}(\vec{f}) = f_x' + f_y' + f_z'$ einer Vektorfunktion $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

Input:

```
Div[{
f1[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f2[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f3[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]
}, Spherical[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]]
```

Output:

$$\frac{2 f_1(r, \theta, \varphi) + \cot(\theta) f_2(r, \theta, \varphi) + \csc(\theta) f_3^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + f_2^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + r f_1^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Rotation

Für die **Rotation** $\nabla \times \vec{f} = \operatorname{rot}(\vec{f}) = \begin{pmatrix} (f_3)_y' - (f_2)_z' \\ (f_1)_z' - (f_3)_x' \\ (f_2)_x' - (f_1)_y' \end{pmatrix}$ einer Vektorfunktion $\vec{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$ ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

Input:

```
{Curl[{f1[r, \[Theta], \[CurlyPhi]], f2[r, \[Theta], \[CurlyPhi]],
f3[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]}, Spherical[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]]}
//Transpose//Simplify//MatrixForm
```

Output:

$$\begin{pmatrix} \frac{\cot(\theta) f_3(r, \theta, \varphi) - \csc(\theta) f_2^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + f_3^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ -\frac{f_3(r, \theta, \varphi) - \csc(\theta) f_1^{(0,0,1)}(r, \theta, \varphi) + r f_3^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \\ \frac{f_2(r, \theta, \varphi) - f_1^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + r f_2^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi)}{r} \end{pmatrix}, \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Laplace–Operator

Für die **Laplace–Operator** $\Delta f = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)) = f_{x,x}'' + f_{y,y}'' + f_{z,z}''$ einer skalaren Funktion f ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

Input:

Laplacian[f[r, \[Theta], \[CurlyPhi]], Spherical[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]]//Simplify

Output:

$$\frac{f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + \csc^2(\theta) f^{(0,0,2)}(r, \theta, \varphi) + \cot(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi)}{r^2},$$

$$\csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Biharmonischer Operator

Für den **biharmonischen Operator** $\Delta^2 f = \Delta(\Delta(f))$ einer skalaren Funktion f ergibt sich in sphärischen Koordinaten:

Input:

Biharmonic[f[r, \[Theta], \[CurlyPhi]], Spherical[r, \[Theta], \[CurlyPhi]]]//Simplify

Output:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r^4} \cdot (f^{(4,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^4 + 4 f^{(3,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^3 - \cot^2(\theta) f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + \csc^2(\theta) f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 \\ & - f^{(2,0,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2 \csc^2(\theta) f^{(2,0,2)}(r, \theta, \varphi) r^2 + 2 \cot(\theta) f^{(2,1,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 \\ & + 2 f^{(2,2,0)}(r, \theta, \varphi) r^2 - 2 \cot^2(\theta) f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + 2 \csc^2(\theta) f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r \\ & - 2 f^{(1,0,0)}(r, \theta, \varphi) r + 4 \csc^4(\theta) f^{(0,0,2)}(r, \theta, \varphi) + \csc^4(\theta) f^{(0,0,4)}(r, \theta, \varphi) \\ & + \cot(\theta) \csc^2(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) + 2 \cot(\theta) f^{(0,1,0)}(r, \theta, \varphi) - 2 \cot(\theta) \csc^2(\theta) f^{(0,1,2)}(r, \theta, \varphi) \\ & - 2 \cot^2(\theta) f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) + \csc^2(\theta) f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) - f^{(0,2,0)}(r, \theta, \varphi) \\ & + 2 \csc^2(\theta) f^{(0,2,2)}(r, \theta, \varphi) + 2 \cot(\theta) f^{(0,3,0)}(r, \theta, \varphi) + f^{(0,4,0)}(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \quad \csc(\theta) = \frac{1}{\sin(\theta)}$$

Biharmonischer Operator bei ebenen Polarkoordinaten

Nun wollen wir noch den biharmonischen Operator Δ^2 für ebene Polarkoordinaten herleiten und zwar spezialisiert für den Fall, dass die verwendete Funktion f vor Radius, jedoch nicht vom Winkel abhängig ist. Dadurch wird der Ausdruck dann relativ kurz.

Input (Definition der verwendeten Koordinaten und Berechnung des Gradienten):

```
<<Calculus'VectorAnalysis';
```

```
x[r_, \[CurlyPhi]_] := r Cos[\[CurlyPhi]];
y[r_, \[CurlyPhi]_] := r Sin[\[CurlyPhi]];
rr[xx_, yy_] := Sqrt[xx^2+yy^2];
ff[xx_, yy_] := ArcTan[yy/xx];
```

```
grad = {D[f[r, \[CurlyPhi]], r] D[rr[xx, yy], xx]
+D[f[r, \[CurlyPhi]], \[CurlyPhi]] D[ff[xx, yy], xx],
D[f[r, \[CurlyPhi]], r] D[rr[xx, yy], yy]
+D[f[r, \[CurlyPhi]], \[CurlyPhi]] D[ff[xx, yy], yy]}//Simplify
```

Output (Der Schnelle und der Rechnungsumstände halber verzichten wir auf die darstellerisch idealere Spaltenschreibweise):

$$\left\{ \frac{xx f^{(1,0)}(r, \varphi)}{\sqrt{xx^2 + yy^2}} - \frac{yy f^{(0,1)}(r, \varphi)}{xx^2 + yy^2}, \frac{xx f^{(0,1)}(r, \varphi)}{xx^2 + yy^2} + \frac{yy f^{(1,0)}(r, \varphi)}{\sqrt{xx^2 + yy^2}} \right\}$$

Input (Die Anpassung der obigen Form mit den Variablen xx, yy an diejenige mit den Variablen r, φ ist hier nicht wiedergegeben):

```
grad = {-(Sin[\CurlyPhi]*Derivative[0, 1][f][r, \CurlyPhi])/r)
+(Cos[\CurlyPhi]*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi]),
(Cos[\CurlyPhi]*Derivative[0, 1][f][r, \CurlyPhi])/r
+(Sin[\CurlyPhi]*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi])}
```

Output:

$$\left\{ \cos(\varphi) f^{(1,0)}(r, \varphi) - \frac{\sin(\varphi) f^{(0,1)}(r, \varphi)}{r}, \frac{\cos(\varphi) f^{(0,1)}(r, \varphi)}{r} + \sin(\varphi) f^{(1,0)}(r, \varphi) \right\}$$

Berechnung des Laplace-Operators mit Hilfe von $\operatorname{div}(\operatorname{grad}) = \Delta$:

Input:

```
divGrad = (
D[grad[[1]],r] D[rr[xx,yy],xx]+
D[grad[[1]],\CurlyPhi] D[ff[xx,yy],xx]+
D[grad[[2]],r] D[rr[xx,yy],yy]+
D[grad[[2]],\CurlyPhi] D[ff[xx,yy],yy] //Simplify//InputForm)
/.{xx^2 + yy^2->r^2, xx->r Cos[\CurlyPhi], yy->r Sin[\CurlyPhi]}/Simplify
```

Output:

$$\frac{f^{(0,2)}(r, \varphi) + r f^{(1,0)}(r, \varphi) + r \sqrt{r^2} f^{(2,0)}(r, \varphi)}{r^2}$$

Input (Die Ableitungen nach φ werden 0 gesetzt, da f nicht von φ abhängen soll):

```
Lapl=(Derivative[0, 2][f][r, \CurlyPhi] +
r*Derivative[1, 0][f][r, \CurlyPhi] +
r*r*Derivative[2, 0][f][r, \CurlyPhi])/r^2;
lap[r_,\CurlyPhi_]=Lapl /. {Derivative[0, 2][f][r, \CurlyPhi] ->0};
lap[r,\CurlyPhi]//InputForm
```

Output:

$$(r * \operatorname{Derivative}[1, 0][f][r, f] + r^2 * \operatorname{Derivative}[2, 0][f][r, f])/r^2$$

Input (Berechnung von Δ^2 für $f(r, \varphi) = f(r)$, nicht abhängig von φ):

```
(r*Derivative[1, 0][lap][r, \CurlyPhi] +
r^2*Derivative[2, 0][lap][r, \CurlyPhi])/r^2 //Simplify
```

Output (*):

$$\frac{f^{(4,0)}(r, \varphi) r^3 + 2 f^{(3,0)}(r, \varphi) r^2 - f^{(2,0)}(r, \varphi) r + f^{(1,0)}(r, \varphi)}{r^3}$$

Beobachtung

Die Herleitung zeigt, dass es ratsam ist, der effizienten Arbeit wegen Computeralgebra-Programme zu nutzen. Vor allem muss man sich dann nicht speziell um zeitraubende Vereinfachungen kümmern, denn bei den heutigen Rechenzeiten ist der Einfluss der Komplexität der Ausdrücke auf die „früher ach so teure Rechenzeit“ meist belanglos. Das gilt auch für nicht so teure Computer.

8.1.6 Lineare Operatoren

Einen **Operator** $L : u \mapsto L(u) \in \mathbb{C}$ resp. $\in \mathbb{R}$ nennen wir nach dem früher Gesagten **linear**, wenn er die folgenden **Linearitätsregeln** erfüllt:

1. $L(u_1 + u_2) = L(u_1) + L(u_2)$
2. $L(\lambda u) = \lambda L(u)$

Durch die Abmachung $L^2(u) := L(L(u))$, $L^n(u) := L(L^{n-1}(u))$ definieren wir **Potenzen von Operatoren**. Nun gilt der Satz:

Satz: L linear $\Rightarrow L^n$ linear

Beweis:

Wir zeigen hier L linear $\Rightarrow L^2$ linear. Daraus folgt dann der Beweis durch Induktion über n . Sei $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} L^2(u) &= L(L(u)) = L(L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)) = L(\lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2)) = \lambda_1 L(L(u_1)) + \lambda_2 L(L(u_2)) \\ &= \lambda_1 L^2(u_1) + \lambda_2 L^2(u_2). \end{aligned}$$

Wegen der Linearität der Ableitung einer Funktion mit einer Variablen und des Integrals einer Funktion mit einer Variablen sind auch die uns bekannten Differentialoperatoren *grad*, *div* und Δ linear und wegen dem eben bewiesenen Satz folglich auch $\Delta^2, \dots, \Delta^n$. Entsprechend verhält es sich mit mehrdimensionalen Integralen.

Beispiel des Nachweises für Δ bei zwei Variablen:

In \mathbb{R}^2 gilt mit $u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2$:

$$\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{\partial^2(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2)}{\partial y^2} = \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \lambda_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \\ &= \lambda_1 \left(\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \right) + \lambda_2 \left(\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} \right) = \lambda_1 \Delta u_1 + \lambda_2 \Delta u_2. \end{aligned}$$

Konsequenz: Δ^n ist ein linearer Operator.

Wir betrachten die **inhomogene Gleichung** $L(u) = v$ mit der Lösungsmenge \mathbb{L}_{inh} und dazu die **homogene Gleichung** $L(u) = 0$ mit der Lösungsmenge \mathbb{L}_{hom} . v kann dabei wieder eine Funktion sein. Wegen der Linearität folgt sogleich:

$$u_1, u_2 \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow L(u_1) = 0 \text{ und } L(u_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 L(u_1) = 0 \text{ und } \lambda_2 L(u_2) = 0 \\ \Rightarrow 0 = \lambda_1 L(u_1) + \lambda_2 L(u_2) = L(\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2) = 0$$

Konsequenz: Mit zwei Lösungen $\in \mathbb{L}_{hom}$ ist auch jede Linearkombination dieser Lösungen $\in \mathbb{L}_{hom}$.

$\leadsto \mathbb{L}_{hom}$ ist ein linearer Raum.

$$u_1, u_2 \in \mathbb{L}_{inh} \Rightarrow L(u_1) = v \text{ und } L(u_2) = v \Rightarrow 0 = v - v = L(u_1) - L(u_2) = L(u_1 - u_2) \\ \Rightarrow u_1 - u_2 \in \mathbb{L}_{hom}$$

Konsequenz: Mit zwei Lösungen $\in \mathbb{L}_{inh}$ liegt die Differenz dieser Lösungen in \mathbb{L}_{hom} .

$$u_1 \in \mathbb{L}_{inh}, u_2 \in \mathbb{L}_{hom} \Rightarrow L(u_1) = v \text{ und } L(u_2) = 0 \Rightarrow \lambda_1 L(u_2) = 0 \\ \Rightarrow v = L(u_1) + \lambda_2 L(u_2) = L(u_1 + \lambda_2 u_2) \Rightarrow u_1 + \lambda_2 u_2 \in \mathbb{L}_{inh}$$

Konsequenz: Mit einer Lösung $u_1 \in \mathbb{L}_{inh}$ und einer Lösung $u_2 \in \mathbb{L}_{hom}$ liegt $u_1 + \lambda_2 u_2$ für beliebige λ_2 in \mathbb{L}_{inh} .

Satz: \mathbb{L}_{hom} ist ein linearer Raum und \mathbb{L}_{inh} eine lineare Mannigfaltigkeit. Man kann daher jede beliebige Lösung u_{inh} erhalten als Linearkombination einer speziellen, partikulären Lösung u_{part} und einer Linearkombination von Basislösungen aus \mathbb{L}_{hom} : $u_{inh} = u_{part} + \sum_k \lambda_k u_{k,hom}$.

8.1.7 Zur schwingenden Membran

Die Für die Auslenkung $u(x, y, t)$ einer **schwingenden Membran** auf einem gegebenen Gebiet G ergibt sich die Gleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \cdot \Delta u$$

Dabei kommen üblicherweise Randbedingungen wie $u(x, y, t) = 0$ oder auch $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ für $(x, y) \in \partial G$ ((x, y) auf dem Rand) zur Anwendung. Dabei ist $\frac{\partial u}{\partial n}$ die Richtungsableitung $\langle \text{grad } u, \vec{e}_n \rangle$ senkrecht zum Rand, d.h. $\vec{e}_n \perp$ Höhenlinie resp. Tangente an die Höhenlinie.

Wir wollen in unserem Rahmen nur den Fall $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = p = \text{const.}$ betrachten. Speziell für $p = \text{const.} = 0$ redet man von der **Potentialgleichung**. Die Lösungsfunktionen heissen **harmonische Funktionen** resp. in der Physik auch **Potentiale**, wobei bei der Potentialgleichung üblicherweise $u(x, y) = g(x, y)$ resp. $\frac{\partial u}{\partial n}(x, y) = g(x, y)$ für $(x, y) \in \partial G$ mit einer gegebenen Funktion g gefordert wird. Wie man sofort sieht, ist die Potentialgleichung vom **elliptischen Typ**. Wir heben hervor:

Definition: Funktionen, welche die Potentialgleichung $\Delta u = 0$ erfüllen, heissen **harmonisch**.

Eine Lösungsmenge von $c^2 \cdot \Delta u = 1$ resp. von $\Delta u = \frac{1}{c^2} := p$ kann man mit etwas Phantasie leicht erraten:

$$u(x, y) = (c_1 + \frac{p}{2})x^2 - c_1 y^2 + c_2 x + c_3 y + c_4 + f(x + iy), \quad f(x + iy) = f(z) \text{ holomorph}$$

Dabei sind die c_k beliebige Koeffizienten und $f(x + iy)$ eine komplexe, holomorphe Funktion. Man sieht leicht, dass die Summe der 2. Ableitungen der Polynomanteile nach x und y gerade p ergibt.

Weiter ist $\Delta f = 0$. Denn wegen $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot 1$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial z} \cdot i$ erhält man $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \cdot \underbrace{(i^2)}_{=-1} \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Man erkennt daraus den Satz:

Satz: Holomorphe Funktionen sind harmonisch. Sie erfüllen die Potentialgleichung.

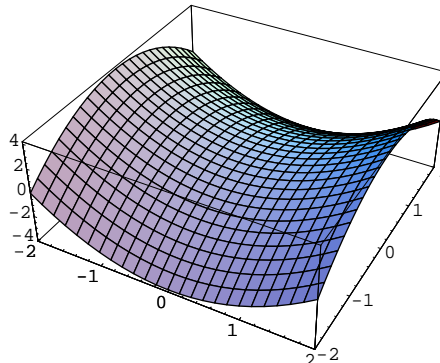
(*Hinweis:* Vgl. dazu Skript Analysis des Autors.)

Weiter gilt für harmonische Funktionen das wichtige **Maximumprinzip**³:

Satz: Nimmt eine auf einem Gebiet harmonische Funktion im Innern ein Maximum oder Minimum an, so ist sie konstant.

Zum Beweis muss hier auf die Literatur³ verwiesen werden, da die Sache sonst unserem Rahmen entgleitet.

Wir betrachten statt dem Beweis das Beispiel $f(x, y) = x^2 - y^2$. f ist offensichtlich harmonisch. Die Form ist hier die eines „Affensattels“.



Als weiteres Beispiel wollen wir eine parabelförmige Lösung für die Gleichung $\Delta u = p = 6$ finden, welche in den vier Punkten $(\pm 10, \pm 10)$ die Bedingung $u(\pm 10, \pm 10) = 20$ sowie in $(0, 10)$ die Bedingung $u(0, 10) = 0$ erfüllt.

Ansatz: $u(x, y) = c_1 x^2 + c_2 x y + c_3 y^2 + c_4 x + c_5 y + c_6$.

Man findet damit sofort:

$$\Delta u(x, y) = 2c_1 + 2c_3 = 6 \Rightarrow c_1 = 3 - c_3 \Rightarrow u(x, y) = (3 - c_3)x^2 + c_2xy + c_3y^2 + c_4x + c_5y + c_6$$

³Lit.: Siehe z.B. René Sperb, Maximum Principles and Their Applications Academic Press 1981

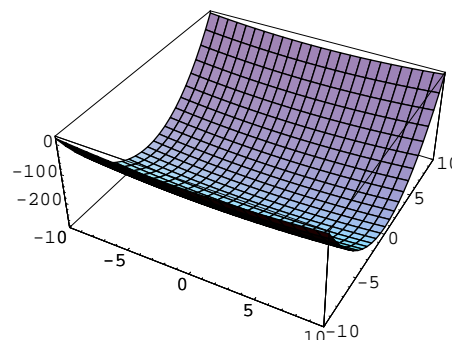
Setzt man hier die Bedingungen

$u(\pm 10, \pm 10) = 20$, $u(0, 10) = 0$ ein,

so findet man die eindeutige Lösung

$$c_2 = c_4 = c_5 = 0, \quad c_3 = \frac{14}{5}, \quad c_6 = -280.$$

Damit wird $u(x, y) = \frac{x^2}{5} + \frac{14y^2}{5} - 280$.



8.1.8 Die Poisson-Gleichung

Die Poisson-Gleichung lautet:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = f(\vec{r}), \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in V, \quad V = \text{gegebenes Volumen.}$$

Dazu sind Randbedingungen gegeben wie z.B. $\Phi(\vec{r}) = 0$ auf ∂V .

Z.B. in der Elektrostatik betrachtet man $f(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$, ρ = Ladungsdichte, ε_0 = Permittivität oder dielektrische Leitfähigkeit des Vakuums.

In der Gravitationstheorie ist $f(\vec{r}) = 4\pi\gamma\rho(\vec{r})$, γ = Gravitationskonstante, ρ = Massenverteilung.

1. Beispiel: Wir wollen hier die folgende einfache Version der Poissongleichung studieren:

$$\Delta \Phi(\vec{r}) = c = \text{const.}, \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in G = K_r(O), \quad O = (0, 0), \quad \Phi(\vec{r}) = 0 \text{ auf } \partial G.$$

Nach dem Maximumprinzip für harmonische Funktionen hat die Gleichung $\Delta \Phi(\vec{r}) = 0$, $\Phi(\vec{r}) = 0$ auf ∂G nur die Lösung $\Phi(\vec{r}) = 0$. Für die Gleichung $\Delta \Phi(\vec{r}) = c$, $\Phi(\vec{r}) = 0$ auf ∂G können wir eine Lösung mit Hilfe eines quadratischen Polynoms konstruieren:

$$\Phi(\vec{r}) = \frac{c}{4} \left(\left(x + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \left(x - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) + \left(y + \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \left(y - \frac{r}{\sqrt{2}} \right) \right) = \frac{c}{4} \left(x^2 + y^2 - 2 \frac{r^2}{\sqrt{2}^2} \right) = \frac{c}{4} (x^2 + y^2 - r^2)$$

Es gilt: $\Delta \Phi(\vec{r}) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{c}{4} \cdot 2 + \frac{c}{4} \cdot 2 = c$ sowie $\Phi(\vec{r}) = \frac{c}{4} (r^2 - r^2) = 0$ für $(x, y) \in \partial G$, d.h. für $x^2 + y^2 = r^2$.

Diese Lösung ist die einzige Lösung. Denn für eine andere Lösung $\Psi(\vec{r})$ wäre ebenfalls $\Delta \Psi(\vec{r}) = c$ und die Randbedingungen wären ebenfalls erfüllt. Man hätte somit $\Delta (\Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r})) = c - c = 0 \Rightarrow \Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r})$ müsste harmonisch sein sowie die Randbedingungen auch erfüllen. Da nun nach dem Maximumprinzip das Maximum und das Minimum einer harmonischen Funktion auf dem Rand angenommen werden muss, kommt dafür wegen den Randbedingungen nur 0 in Frage. Daher ist $\Phi(\vec{r}) - \Psi(\vec{r}) \equiv 0$, d.h. $\Phi(\vec{r}) \equiv \Psi(\vec{r})$. Damit ist eine andere Lösung immer mit Φ identisch. Es gibt somit keine andere Lösung. Wir haben die gefundene Lösung also als eindeutig identifiziert.

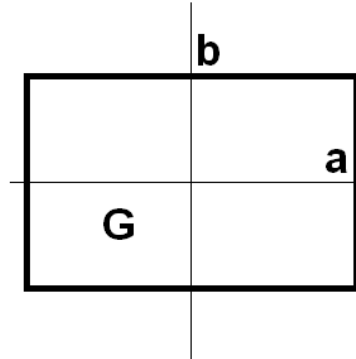
2. Beispiel: Wir betrachten die Poissongleichung auf einem Rechteck:

$$\Delta u(x, y) = f(x, y) = 6, \quad (x, y) \in G$$

$$u(x, y) = g(x, y) \equiv 0, \quad (x, y) \in \partial G$$

Sei $a = 4$, $b = 1$

$$\leadsto G = [-4, 4] \times [-1, 1]$$



Lösungsstrategie:

1. Suche eine partikuläre Lösung, z.B. $u_0(x, y) = 3x^2$
2. Mache den Ansatz: $u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y)$

$$\leadsto \Delta v(x, y) = \Delta(u(x, y) - u_0(x, y)) = \Delta u(x, y) - \Delta u_0(x, y) = f(x, y) - f(x, y) = 0 \quad \text{und}$$

$$\leadsto v(x, y) = u(x, y) - u_0(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y) \quad \text{auf } \partial G$$

Damit wird das inhomogene Dirichletproblem $\Delta u(x, y) = f(x, y)$ in G , $u(x, y) = g(x, y)$ auf ∂G übergeführt in das homogene Dirichletproblem $\Delta v(x, y) = 0$ in G , $v(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y)$ auf ∂G .

Lösung von $\Delta u(x, y) = f(x, y) = \text{const.} = 6$, $G = [-4, 4] \times [-1, 1]$, $u(x, y) \equiv 0$ auf ∂G :

1. Sei $u_0(x, y) = mx^2 + nx + k \Rightarrow \Delta u = 2m = 6 \Rightarrow m = 3$. Wir nehmen aus Symmetriegründen $n = 0$ an. (Wir brauchen nur eine partikuläre Lösung.) Weiter soll k so sein, dass auf einer Seite die Randbedingungen erfüllt sind:

$$u_0(-4, y) = 3(-4)^2 + k = 48 + k = 0 \Rightarrow k = -48 \Rightarrow u_0(x, y) = 3x^2 - 48 = u_0(-x, y).$$

$$\text{Hier gilt: } v(\pm 4, y) = u(\pm 4, y) - u_0(\pm 4, y) = 0 - (3(\pm 4)^2 - 48) = 0 \Rightarrow v(\pm 4, y) = 0$$

$$\text{sowie } v(x, \pm 1) = u(x, \pm 1) - u_0(x, \pm 1) = 0 - (3x^2 - 48) = -3x^2 + 48 = 0 \Rightarrow v(x, \pm 1) = -3x^2 + 48.$$

2. $u(x, y) = u_0(x, y) + v(x, y) = 3x^2 - 48 + v(x, y) \Rightarrow 6 = \Delta u = 6 + \Delta v \Rightarrow \Delta v = 0$

$$\Delta v(x, y) = 0 \text{ in } G, \quad v(x, y) = g(x, y) - u_0(x, y) = 0 - u_0(x, y) \Rightarrow v(x, y) = -u_0(x, y) \text{ auf } \partial G.$$

Das Problem $\Delta v(x, y) = 0$, $v(x, y) = -u_0(x, y)$ auf ∂G , kann man mit einem **Separationsansatz** angehen, um **Basislösungen** zu finden:

$$v(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \Rightarrow \Delta v(x, y) = X_{xx}''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y_{yy}''(y) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = -\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = \pm \omega^2 = \text{const.}$$

Man hat damit zwei neue Randwertprobleme: [1]: $\frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = \pm\omega^2$ mit $X(-4) = X(4) = 0$ sowie [2]: $-\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = \pm\omega^2$ mit $X(x) \cdot Y(\pm 1) \rightsquigarrow -3x^2 + 48$. Um für Y ein Randwertproblem formulieren zu können, muss X schon bekannt sein. Daher berechnen wir zuerst X .

Berechnung der Lösung von [1]: $\frac{X_{xx}''(x)}{X(x)} = \pm\omega^2$ mit $X(-4) = X(4) = 0$:

$\rightsquigarrow X_{xx}''(x) = \pm\omega^2 \cdot X(x)$, $X(-4) = X(4) = 0 \rightsquigarrow$ Verwende bekannte Basislösungen:

- $\pm\omega^2 = 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = 0 \Rightarrow X(x) = c_1 x + c_2$,
 $X(-4) = X(4) = -4c_1 + c_2 = +4c_1 + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$: Fällt weg.
- $\pm\omega^2 > 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = \omega^2 X(x) \Rightarrow X(x) = c_1 e^{+\omega x} + c_2 e^{-\omega x}$
 $\Rightarrow X(4) = c_1 e^{4\omega} + c_2 e^{-4\omega} = 0 \Rightarrow c_1 e^{4\omega} = -c_2 e^{-4\omega} \Rightarrow c_1 e^{8\omega} = -c_2$ und
 $\Rightarrow X(-4) = c_1 e^{-4\omega} + c_2 e^{4\omega} = 0 \Rightarrow c_1 e^{-4\omega} = -c_2 e^{4\omega} \Rightarrow c_1 e^{-8\omega} = -c_2$
 $\Rightarrow e^{-8\omega} = e^{8\omega} \Rightarrow \omega = 0$. Widerspruch! \rightsquigarrow Fällt weg.
- $\pm\omega^2 < 0 \Rightarrow X_{xx}''(x) = -\omega^2 X(x) \Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\omega x) + c_2 \cos(\omega x)$.
 $0 = X(4) = X(-4) \Rightarrow 0 = c_1 \sin(4\omega) + c_2 \cos(4\omega)$ und
 $0 = c_1 \sin(-4\omega) + c_2 \cos(-4\omega) = -c_1 \sin(4\omega) + c_2 \cos(4\omega)$
 $\Rightarrow 2c_1 \sin(4\omega) = 0 \Rightarrow 4\omega = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ und $2c_2 \cos(4\omega) = 0 \Rightarrow 4\omega = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
 $\Rightarrow X(x) = c_1 \sin(\frac{n\pi}{4} x)$ oder $X(x) = c_2 \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8} x) \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{4}$, $\omega = \frac{(1+2k)\pi}{8}$
Wegen $v(x, \pm 1) = X(x) \cdot Y(\pm 1) = -3x^2 + 48 = -3(-x)^2 + 48 = v(-x, \pm 1) = X(-x) \cdot Y(\pm 1)$
muss $X(x) = X(-x)$ gelten, d.h. $X(x)$ ist eine gerade Funktion. Da $X(x)$ aus den gefundenen Basislösungen $\sin(\frac{n\pi}{4} x)$ und $\cos(\frac{(1+2k)\pi}{8} x)$ ausgewählt werden muss, kann nur $X(x) = \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8} x)$ richtig sein, denn der Sinus ist ungerade. Damit fallen die Sinusanteile weg, d.h. $c_1 = 0$. Somit wird $X(x) = X_k(x) = a_k \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8} x)$ mit $c_2 := a_k$.
- Wir erhalten somit: $-\frac{Y_{yy}''(y)}{Y(y)} = -\omega^2 = -(\frac{(1+2k)\pi}{8})^2 \Rightarrow +Y_{yy}''(y) = +(\frac{(1+2k)\pi}{8})^2 \cdot Y(y)$
 $\Rightarrow Y(y) = Y_k(y) = d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8} y} + d_{k,2} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8} y}$ mit $Y_k(-1) = Y_k(+1) \neq 0$
 $\Rightarrow Y_k(-1) = Y_k(+1) = d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}} + d_{k,2} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}} = d_{k,1} \cdot e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8}} + d_{k,2} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{8}}$
 $\Rightarrow d_{k,1} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} + d_{k,2} = d_{k,1} + d_{k,2} \cdot e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} \Rightarrow d_{k,1} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} - 1) = d_{k,2} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{4}} - 1)$
 $\Rightarrow d_{k,1} = d_{k,2} := \frac{d_k}{2} \Rightarrow Y_k(y) = \frac{d_k}{2} \cdot (e^{\frac{(1+2k)\pi}{8} y} + e^{-\frac{(1+2k)\pi}{8} y}) = d_k \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8} y)$
- $\rightsquigarrow v_k(x, y) = X_k(x) \cdot Y_k(y) = a_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8} x) \cdot d_k \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8} y)$
 $\Rightarrow v_k(x, y) = X_k(x) \cdot Y_k(y) = c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot y)$
- Die Allgemeine Lösung erhält man jetzt nach dem Superpositionsprinzip:

$$v(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} v_k(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} X_k(x) \cdot Y_k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot y)$$

$$v(x, \pm 1) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \cdot \cos(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot x) \cdot \cosh(\frac{(1+2k)\pi}{8}) = -u_0(x, y) = -3x^2 + 48$$

$r_k = c_k \cdot \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)$ sind nun Fourierkoeffizienten zu $n = 1 + 2k$ für die Funktion $-3x^2 + 48$.

$$\text{Es gilt: } r_n = \frac{1}{4} \int_{-4}^4 (-3x^2 + 48) \cos\left(\frac{n\pi x}{2 \cdot 4}\right) dx = -\frac{768 \left(n\pi \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \right)}{n^3 \pi^3}$$

$$\Rightarrow c_k = r_{2k+1} \cdot \left(\cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right) \right)^{-1} = \frac{-768 \left((1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)}$$

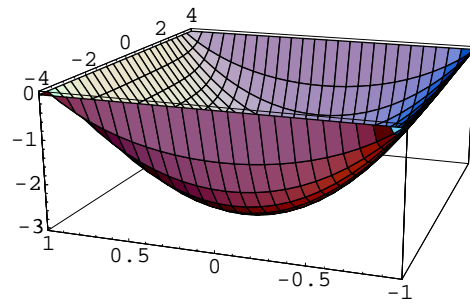
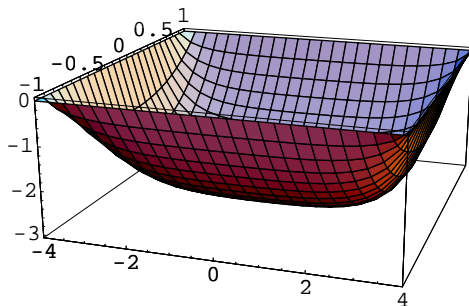
$$\Rightarrow c_k = -\frac{768 \left((1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)}$$

Somit folgt:

$$u(x, y) = 3x^2 - 48 + v(x, y), \quad v(x, y) =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} -\frac{768 \left((1+2k)\pi \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) - 2 \sin\left(\frac{(1+2k)\pi}{2}\right) \right)}{(1+2k)^3 \pi^3 \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8}\right)} \cdot \cos\left(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot x\right) \cdot \cosh\left(\frac{(1+2k)\pi}{8} \cdot y\right)$$

Wir berechnen die Glieder in der letzten Formel bis zu $k = 14$ und ein zweites Mal bis $k = 20$. Dann brechen wir die Summen jeweils ab. Beim Zeichnen von Graphiken mit dem Computer ist bei so verändertem k kein Unterschied zu erkennen. Man erhält folgende Formen:



8.1.9 Exkurs: Wichtige Formeln

Im letzten Abschnitt (Seite 235) haben wir bereits das Maximumprinzip kennengelernt. Im Zusammenhang mit diesem Prinzip und weiter mit dem Laplace-Operator sowie harmonischen Funktionen kennt man eine Anzahl wichtiger Formeln. Einige davon sollen der Vollständigkeit halber hier wiedergegeben werden. (Auf Beweise müssen wir allerdings des gesetzten Rahmens wegen hier verzichten. Man konsultiere dazu die einschlägige Literatur über Analysis und partielle Differentialgleichungen):

Satz:

(Greensche Formel)

$$\int_G (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV = \int_{\partial G} \left(\varphi \frac{\partial \Psi}{\partial \vec{n}} - \Psi \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} \right) d\sigma$$

Die Greensche Formel „verallgemeinert“ die partielle Integration für den Laplace-Operator.

Satz: (Poissonsche Integralformel)

Vor.: Gegeben sei das Dirichletproblem $\Delta u = 0$ in G
 $G =$ Kreisscheibe $K_{r_0}(\vec{0})$, Randbedingungen: $u(\vec{x}) = f(\vec{x})$ auf ∂G
 $\rightsquigarrow u(\vec{x}) = \tilde{u}(r, \varphi) = f(\varphi)$ auf $\partial K_{r_0}(\vec{0})$

Beh.:

$$\tilde{u}(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \frac{r_0^2 - r^2}{r_0^2 - 2r_0 r \cos(t - \varphi) + r^2} dt, \quad r < r_0$$

Aus dieser Formel kann man den Mittelwertsatz für harmonische Funktionen herleiten:

Satz: (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen)

Vor.: Sei $K_{r_0}(x_0, y_0) \subseteq G = D_u$, u harmonisch

Beh.:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x_0 + r \cos(t), y_0 + r \sin(t)) dt, \quad r < r_0$$

Aus dem Mittelwertsatz wiederum ist es möglich, auf das Maximumprinzip zu schliessen. Die Erfahrung zeigt, dass diese hier genannten Formeln sehr nützliche Dienste leisten bei der Untersuchung von Differentialgleichungen im Zusammenhang mit harmonischen Funktionen.

8.1.10 Plattengleichung und biharmonischer Operator

Wir betrachten die folgende Gleichung, welche ein Modell für die Biegung einer dünnen Platte darstellt:

$$\Delta^2 u(x, y) = \Delta(\Delta u(x, y)) = \frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y)$$

Wir nennen diese Gleichung die **Plattengleichung**. Δ^2 heisst dabei **biharmonischer Operator**. E, ν und h sind in der Physik beheimatete Konstanten, die wir hier nicht weiter besprechen wollen. $q(x, y)$ ist eine Funktion, welche oft auch konstant ist. Wir werden solgleich sehen, dass die Modellierung der Randbedingungen sehr ins Physikalische hineingreifen und die Auffindung einer Lösung daher in der Folge nicht von der Mathematik aus alleine steuerbar ist.

Die Ein Spezialfall der Plattengleichung ist die Gleichung $\Delta^2 u(x, y) = 0$. Es handelt sich dabei um den homogenen Fall der Plattengleichung. Wir wollen die Lösungen dieser Gleichung **biharmonische Funktionen** nennen. Trivialerweise gilt wegen $\Delta u(x, y) = 0 \Rightarrow \Delta^2 u(x, y) = 0$:

Satz: Die Menge der harmonischen Funktionen ist eine echte Teilmenge der biharmonischen Funktionen.

So ist z.B. $\Delta(x^3) = 6x \neq 0$, jedoch $\Delta^2(x^3) = \Delta(6x) = 0$.

Um zu Lösungen der Plattengleichungen zu kommen genügt es also, eine Trivillösung zu finden und dazu Linearkombinationen von biharmonischen Funktionen zu addieren. Das Problem einer genaueren Erforschung der Menge der biharmonischen Funktionen wollen wir hier nicht angehen. Dafür besprechen wir zwei Spezialfälle:

8.1.11 Das Modellierungsbeispiel der an vier Punkten aufgehängten Platte

Sei $\frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y) = p = 6$.

Zudem sei eine quadratische Platte mit den Eckpunkten $(\pm x_0, \pm y_0)$ gegeben.

Wir suchen wieder eine achsensymmetrische Lösung bei der Bedingung, dass die Platte an vier Punkten befestigt ist. Daher machen wir den Ansatz für die Auslenkung bzw. Durchbiegung:

$$u(x, y) = c_6 x^4 + c_5 x^2 y^2 + c_4 y^4 + c_3 x^2 + c_2 y^2 + c_1$$

Damit wird:

$$\Delta u(x, y) = 2c_5 x^2 + 12c_6 x^2 + 12c_4 y^2 + 2c_5 y^2 + 2c_2 + 2c_3 \Rightarrow \Delta^2 u(x, y) = 24c_4 + 8c_5 + 24c_6 = 6$$

Weiter stellen wir die „Querkräftebedingung“: $\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$ für $x = \pm x_0$
und $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2 - \nu) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0$ für $y = \pm y_0$.

$$\leadsto 4c_5 x + 24c_6 x = 0, \quad 24c_4 y + 4c_5 y = 0.$$

Für $\pm x_0$ und $\pm y_0$ erhalten wir jedoch damit nur 2 und nicht 4 Bedingungen. Damit haben wir bis jetzt aber 3 Gleichungen für die Unbekannten c_4, c_5, c_6 . Fordert man weiter noch $u(\pm x_0, \pm y_0) = 0$, so hat man noch eine weitere Gleichung. Weitere Bedingungen kann man mittels der Biegemomente auf dem Rand erhalten, womit die fehlenden Konstanten aufgrund der Modellierung bestimmbar werden. Damit erkennen wir, dass es möglich ist, durch einen Ansatz (hier ein Polynom vom Grade 4) eine Lösung quasi vorauszubestimmen. Denn bei diesem Lösungskonzept geht es nicht um die Frage, welche Lösung aus der Menge aller möglichen Lösungen die richtige sei, sondern um die Frage, ob ein angenommenes Modell für eine Lösung wohl dem Modell der Differentialgleichung der Platte genügen kann und diese Lösung daher nicht zum Vornherein ausgeschlossen werden muss.

Wir haben somit hier infolge unserer **Ansatzmethode** eine **nicht ausschliessbare Lösung** und nicht eine **zwingend einschliessbare** vor uns.

8.1.12 Das Modellierungsbeispiel Kreisplatte

Sei wieder $\frac{q(x, y) \cdot 12(1 - \nu^2)}{E \cdot h^3} = \text{const.} \cdot q(x, y) = p = 6$. Zudem sei eine kreissymmetrische Platte mit dem Radius R gegeben, welche am Rande gelenkig gelagert ist, d.h. es gilt $u(R \cos(\varphi), R \sin(\varphi)) = 0$.

Um das Problem behandeln zu können, müssen wir zuerst den Laplace-Operator in Polarkoordinaten schreiben. Dazu benutzen wir die Formeln ab Seite 228, speziell Formel (*) von Seite 232.

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u(r, \varphi)}{\partial r^4} + 2 \frac{\partial^3 u(r, \varphi)}{\partial r^3} \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} \frac{1}{r^2} + \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \frac{1}{r^3} &= p \quad | \cdot r^4 \\ \Rightarrow \frac{\partial^4 u(r, \varphi)}{\partial r^4} r^4 + 2 \frac{\partial^3 u(r, \varphi)}{\partial r^3} r^3 - \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} r^2 + \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} r &= p r^4 \end{aligned}$$

Diese Gleichung kennt man unter dem Namen „Eulersche Differentialgleichung“. Der Schnelle halber lösen wir sie mit der Maschine:

Input:

```
solv = DSolve[r^4 u''''[r]+2 r^3 u'''[r]-r^2 u''[r]+r u'[r]== p r^4,u,r]//Flatten
```

Output:

$$\left\{ u \rightarrow \text{Function} \left[\{r\}, \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} - \frac{c_3 r^2}{4} + \frac{1}{2} c_3 \log(r) r^2 + c_4 + c_1 \log(r) \right] \right\}$$

Da bei der Platte $u(0)$ endlich sein muss, muss $c_1 = 0$ sein. Ebenso muss die Krümmung — und damit $u''(r)$ an der Stelle $r = 0$ endlich sein. Somit muss auch der Term $c_3 = 0$ sein. Wir erhalten:

$$u(r) = \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} + c_4$$

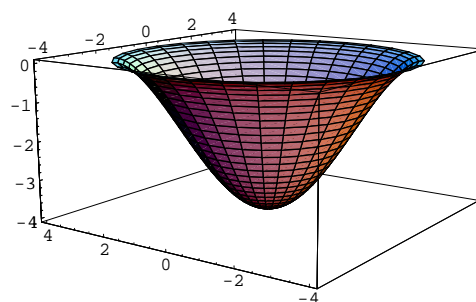
Input:

```
u1[r_] := (u[r] /. solv) /. {C[3] -> 0, C[1] -> 0}; Print["u1(r) = ", u1[r]];
solv1 = Solve[Evaluate[{u1[R] == 0, (u1'[r] /. r -> R) == 0}], {C[2], C[4]}] // Flatten;
Print[solv1];
u2[r_] := u1[r] /. solv1; Print["u2(r) = ", u2[r]];
u3[r_] := u2[r] /. {R -> 4, p -> -1}; Print["u3(r) = ", u3[r]];
ParametricPlot3D[{r Cos[fi], r Sin[fi], u3[r]}, {r, 0, 4}, {fi, 0, 2 Pi}]
```

Man beachte, dass die hier gewählten Werte für R und p nur der gut erkennbaren Dokumentation des Verfahrens dienen, jedoch darüber hinaus keine praktische Bedeutung haben.

Output:

$$\begin{aligned} u1(r) &= \frac{p r^4}{64} + \frac{c_2 r^2}{2} + c_4 \\ \left\{ c_4 \rightarrow \frac{p R^4}{64}, c_2 \rightarrow -\frac{p R^2}{16} \right\} \\ u2(r) &= \frac{p r^4}{64} - \frac{1}{32} p R^2 r^2 + \frac{p R^4}{64} \\ u3(r) &= -\frac{r^4}{64} + \frac{r^2}{2} - 4 \end{aligned}$$



8.1.13 Numerische Methoden

Im Kurs Analysis haben wir die Differentiationsmethode mit Hilfe der zentralen Differenzen kennen gelernt. Wir erinnern uns:

Definition:

1. $y_k' := \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{x_{k+1} - x_{k-1}} = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h}$ heisst **zentraler Differenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.
2. $(y_k')_{fw} := \frac{y_{k+1} - y_k}{x_{k+1} - x_k} = \frac{y_{k+1} - y_k}{h}$ heisst **Vorwärtsdifferenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.
3. $(y_k')_{bw} := \frac{y_k - y_{k-1}}{x_k - x_{k-1}} = \frac{y_k - y_{k-1}}{h}$ heisst **Rückwärtsdifferenzenquotient** in $x_k = x_0 + k \cdot h$.

Satz:

Vor.:

Sei $f(x)$, $f(x, y)$ in I genügend oft differenzierbar,
 $x_k = x_0 + k h_x \in I$, $k = 0, 1, \dots, n$, $h = h_x$
 $y_j = y_0 + k h_y \in I$, $k = 0, 1, \dots, n$
 $f(x) := y(x)$ oder $f(x, y) := w(x, y)$

Beh.:

1. $y_k' = f'(x_k) = \frac{y_{k+1} - y_{k-1}}{2h} + O[h^2]$
2. $y_k'' = f''(x_k) = \frac{y_{k+1} - 2y_k + y_{k-1}}{h^2} + O[h^2]$
3. $y_k''' = \frac{y_{k+2} - 2y_{k+1} + 2y_{k-1} - y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2]$
4. $y_k^{(4)} = \frac{y_{k+2} - 4y_{k+1} + 6y_k - 4y_{k-1} + y_{k-2}}{2h^3} + O[h^2]$
5. $\frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial x} = w'_{x|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} - w_{k-1,j}}{2h_x} + O[h - x^2]$
6. $\frac{\partial f(x_k, y_j)}{\partial y} = w'_{y|k,j} \approx \frac{w_{k,j+1} - w_{k,j-1}}{2h_y} + O[h_y^2]$
7. $\frac{\partial^2 f(x_k, y_j)}{\partial x \partial y} = w''_{xy|k,j} \approx \frac{w_{k+1,j+1} - w_{k+1,j-1} - w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}}{4h_x h_y} + O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)]$
8. $\frac{\partial^4 f(x_k, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} = w_{xxyy|k,j}^{(4)} \approx O[\text{Max}(h_x^2, h_y^2)] +$
 $\frac{w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1} - 2w_{k+1,j} - 2w_{k,j+1} - 2w_{k,j-1} - 2w_{k-1,j} + 4w_{k,j}}{h_x^2 h_y^2}$

Auf dieser Basis können wir den Laplace-Operator sowie den biharmonischen Operator diskretisieren und auf partielle Differentialgleichungen anwenden. Da die Indices in den hier nachfolgend behandelten Fällen sternförmig angeordnet sind, sprechen wir von **Differenzesternern**.

Nach Ausführung der notwendigen Additionen erhalten wir als Resultat:

Korollar:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta w_{k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2}$$

$$\Delta^2 f(x, y) = \frac{\partial^4 f}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 f}{\partial y^4} \Rightarrow \Delta \Delta w_{k,j} \approx \frac{1}{h^4} (20w_{k,j} - 8(w_{k+1,j} + w_{k-1,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}) + 2(w_{k+1,j+1} + w_{k+1,j-1} + w_{k-1,j+1} + w_{k-1,j-1}) + (w_{k+2,j} + w_{k-2,j} + w_{k,j+2} + w_{k,j-2}))$$

8.1.14 Numerische Beispiele: Differenzenverfahren

1. Beispiel:

Wir behandeln das Randwertproblem $y''(x) + xy(x) = (10 - x)$, $y(0) = 0$, $y(10) = 0$. Wir lösen das Problem zuerst einmal exakt mit der Maschine *Mathematica*:

Input

```
Remove["Global`*"];
solv=DSolve[
{y''[x]+ x y[x]== (10-x), y[0]==0, y[10]==0}, y, x]//Flatten;
z[x_]:=y[x]/.solv;
z[x]//N//InputForm
```

Da der Output mit der exakten Lösungsfunktion sehr umfangreich ist und daher hier so nicht wiedergegeben werden kann, formatieren wir diesen Output um. In eine numerische Form umgerechnet wird er kürzer, jedoch auch ungenau. Das Symbol I ersetzen wir noch durch i (imaginäre Einheit). Die **Ausgabe des Outputs** erfolgt bis auf i in der InputForm:

```
(-0.08964587887974669 + 0.15527121690888887 * i) * ((-164.5127163185611 - 6.802642361168156 * i) *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] + (90.44636614419267 - 3.9275073984206585 * i) *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] - (8.761118449750352 + 15.174702286096874 *
i) *
AiryAiPrime[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] + (8.761118449750352 + 15.174702286096874 *
i) *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] * AiryBiPrime[(0.5000000000000001 +
0.8660254037844386 * i) * x] + (107.74890041919937 + 5.258016244624741 *^- 13 * i) * x *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.3333333333333333, 0.6666666666666666, 1.3333333333333333, -0.1111111111111111 *
x^3] - (62.20885666191094 + 3.126388037344441 *^- 13 * i) * x *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.3333333333333333, 0.6666666666666666, 1.3333333333333333, -0.1111111111111111 *
x^3] + (19.637536992104444 + 34.01321180583861 * i) * x^2 *
AiryAi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.6666666666666666, 1.3333333333333333, 1.6666666666666667, -0.1111111111111111 *
x^3] + (11.337737268612731 + 19.63753699210468 * i) * x^2 *
AiryBi[(0.5000000000000001 + 0.8660254037844386 * i) * x] *
HypergeometricPFQ[0.6666666666666666, 1.3333333333333333, 1.6666666666666667, -0.1111111111111111 *
x^3])
```

Da hier komplexe Funktionen vorkommen, verzichten wir aus Zeitgründen auf den Versuch, damit einen Plot herzustellen. Statt dessen verwenden wir das vorgegebene Programm zur Auffindung einer numerischen Lösung:

Input:

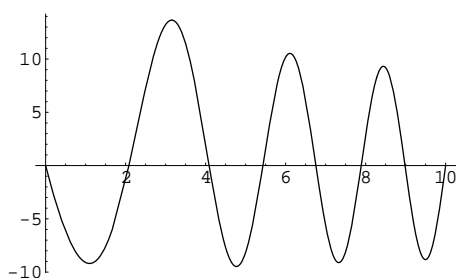
```
Remove["Global`*"];
Nsolve=NDSolve[
{y'[x]+ x y[x]== (10-x),y[0]==0, y[10]==0},y,x//Flatten;
Plot[y[x]/.Nsolve,{x,0,10}];
```

Output siehe unten!

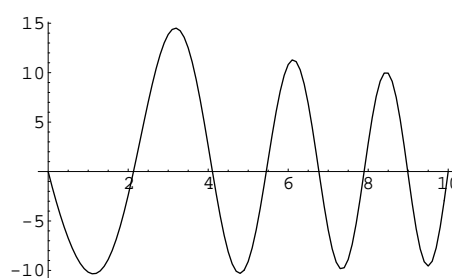
Nun versuchen wir, die Lösung selbst einmal numerisch mit Hilfe von Differenzgleichungen zu berechnen. Nachstehend das Programm:

Input:

```
Remove["Global`*"];
s=100; h=10/s;
x[k_]:=k h;
tab1=Table[x[k],{k,0,s,10/s}];
y[0]=0; y[s]=0;
tab2=Table[y[k],{k,1,s-1}];
y2[k_]:= (y[k+1]-2 y[k]+y[k-1])/h^2;
gleich[k_]:= (y2[k]+x[k] y[k]==(10-x[k]));
solv = Solve[Table[gleich[k],{k,1,s-1}],tab2]//Flatten;
z[k_]:=y[k]/.solv; z[0]=y[0];z[s]=y[s];
tab=Table[{x[k],z[k]}/N,{k,0,s}];
ListPlot[tab,PlotJoined->True];
```

Output:

Hergestellt mit NDSolve (*Mathematica*)



Hergestellt mittels Berechnung mit Hilfe von Differenzgleichungen (*Mathematica*)

2. Beispiel: Verfahren von Richardson, biharmonischer Operator.

Wir behandeln das Randwertproblem (eingespannte Platte)

$$\Delta^2 z(x, y) = \Delta(\Delta(z(x, y))) = 2, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = z(x, 0) = z(x, 10) = 0, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G$$

$$\Rightarrow \frac{dz(x, y)}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, x = 10, \quad \frac{dz(x, y)}{dy} = 0 \text{ für } y = 0, y = 10$$

Auf dem Rand kann der zentrale Differenzenquotient nicht ohne Gebietserweiterung verwendet werden. Wir benutzen daher für die Umsetzung der Randbedingungen den Vorwärtsdifferenzenquotient und den Rückwärtsdifferenzenquotient. Daraus schliesst man, dass für $k = 1, k = s - 1, j = 1, j = s - 1$ die Werte der Lösungsfunktion ebenfalls 0 gesetzt werden müssen.

Im Verfahren von Richardson wird ein Rechteckgebiet der Länge nach in $s_k \in \mathbb{N}$ und der Breite nach in $s_j \in \mathbb{N}$ Teilrechtecke aufgeteilt. Dadurch entstehen $s_k \cdot s_j$ gleich grosse Teilrechtecke. Im Beispiel ist $s_k = s_j = s$.

Wenn das gegebene Gebiet jedoch kein Rechtecksgebiet ist, so wählen wir bei derselben Rasterung diejenigen Punkte, welche dem Rande am nächsten liegen, als Randpunkte. Damit verändern wir die Gebietsform ein klein wenig. Dieses Vorgehen kann mit rechtem Aufwand verbunden sein, denn man muss dabei peinlich darauf achten, dass die Anzahl der zu berechnenden Punkte (Variablen) mit der Anzahl Gleichungen übereinstimmt und dass in jeder Zeile und Spalte genügend bekannte Randbedingungen dafür bereitgestellt werden.

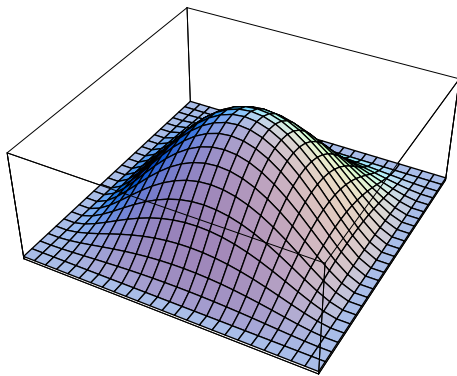
Folgendes Programm liefert nun den Output für unser Beispiel:

Input:

```
Remove["Global`*"];
breite = 10; laenge=breite;
s=24; h=breite/s;
x[k_]:=k h;
y[j_]:=k h;
tab1=Table[{x[k],y[j]},{k,0,s,breite/s},{j,0,s,breite/s}];
z[0,j_]=0; z[s,j_]=0;
z[1,j_]=0; z[s-1,j_]=0;
z[k_,0]=0; z[k_,s]=0;
z[k_,1]=0; z[k_,s-1]=0;
tab2=Table[z[k,j]},{k,2,s-2},{j,2,s-2}]/Flatten;
zBH[k_,j_]:= 1/(h^4) (20 z[k,j]-
8(z[k+1,j]+z[k-1,j]+z[k,j+1]+z[k,j-1])+
2(z[k+1,j+1]+z[k+1,j-1]+z[k-1,j+1]+z[k-1,j-1])+
(z[k+2,j]+z[k-2,j]+z[k,j+2]+z[k,j-2])
);
gleich[k_,j_]:= (zBH[k,j]==2);
solv = Solve[Table[gleich[k,j]},{k,2,s-2},{j,2,s-2}]/Flatten,tab2]/Flatten;
w[k_,j_]:=z[k,j]/.solv;
w[0,j_]=0; w[s,j_]=0;
w[1,j_]=0; w[s-1,j_]=0;
w[k_,0]=0; w[k_,s]=0;
w[k_,1]=0; w[k_,s-1]=0;
tab=Table[w[k,j]//N,{k,0,s},{j,0,s}];
ListPlot3D[tab,Axes->False];
Print["Maximale Höhe = ",w[s/2,s/2]//N];
```

Output:

Maximale Höhe = 21.1238



Die Berechnung erfolgte mit Hilfe von Differenzgleichungen und *Mathematica 5.2* auf einem alten PC aus dem Jahre 2003. Bei den verwendeten 25×25 Punkten ist das Programm genügend leistungsfähig, sodass der Output sofort erscheint.

Da der Graph als geplottete Liste erzeugt worden ist, werden hier bei der Grundeinstellung die Achsen nach den verwendeten Indices skaliert statt nach Länge und Breite. Um den Programmieraufwand für eine dem Problem angepasste Skalierung zu sparen, wurde diese weggelassen.

Hinweis: Wenn irgend eine partielle Differentialgleichung in eine Differenzgleichung umgewandelt wird, so sind jeweils die **Konvergenzbedingungen** zu beachten. Z.B. bei zwei Variablen x und y können h_x und h_y nicht beliebig gewählt werden. Abhängig von der Gleichungsart muss für die Sicherung der Konvergenz üblicherweise eine gewisse Beziehung zwischen h_x und h_y bestehen. Man konsultiere dazu die Fachliteratur.

3. Beispiel: Verfahren von Richardson, Potentialproblem (Dirichletproblem).

Wir behandeln das Randwertproblem (Potentialproblem)

$$\Delta z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = \sin\left(y \frac{\pi}{10}\right), \quad z(x, 0) = \sin\left(x \frac{\pi}{10}\right), \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G.$$

In diesem Fall müssen wir den Operator Δ diskretisieren:

$$\Delta f(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \Rightarrow \Delta w_{k,j} \approx \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2},$$

$$\Delta f(x, y) = 0 \Rightarrow \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2} = 0$$

Folgendes Programm liefert nun den Output für unser Beispiel:

Input:

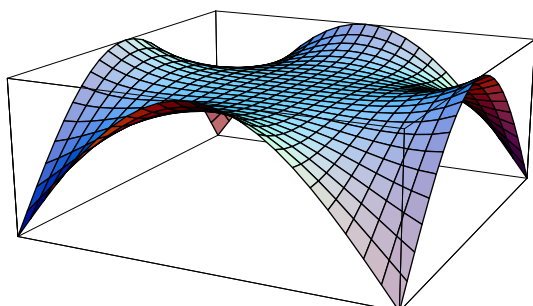
```
Remove["Global' *"];
gleichungen[
s_] := Module[{breite, h, x, y, k, j, z, tab1, tab2, fkt, zBH, solv, w, tab},
  breite = 10; laenge = breite;
  h = breite/s;
  x[k_] := k h;
  y[k_] := k h;
  fkt[x_, y_] := 0;
  tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}] // N;
  tab2 = Table[z[k, j], {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten;
  z[0, j_] := Sin[j Pi /s] // N;
  z[s, j_] := Sin[j Pi /s] // N;
```

```

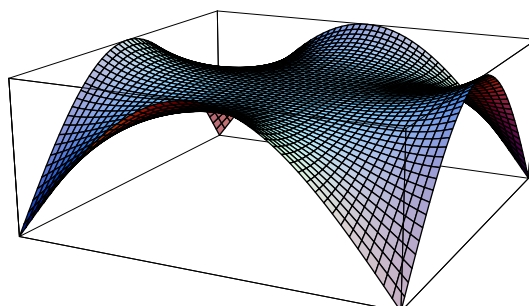
z[k_, 0] := Sin[k Pi /s] // N;
z[k_, s] := Sin[k Pi /s] // N;
zBH[k_, j_] := 1/(h^2) (-4 z[k, j] + z[
  k + 1, j] + z[k - 1, j] + z[k, j + 1] + z[k, j - 1]);
gleich[k_, j_] := (zBH[k, j] == 0);
solv = Solve[Table[gleich[k, j], {k, 1,
  s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten, tab2] // Flatten;
w[k_, j_] := z[k, j] /. solv;
w[0, j_] = Sin[j Pi /s] // N; w[s, j_] = Sin[j Pi /s] // N;
w[k_, 0] = Sin[k Pi /s] // N; w[k_, s] = Sin[k Pi /s] // N;
tab = Table[w[k, j] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
ListPlot3D[tab, Axes ->
  False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}, PlotRange -> {0, 1}];
Print["Zentrale Höhe = ", w[s/2, s/2] // N];];
gleichungen[24];
gleichungen[50];
gleichungen[80];
gleichungen[100];

```

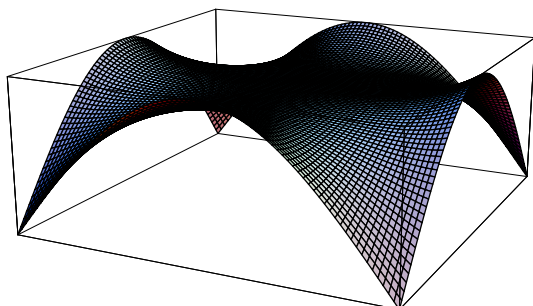
Output:



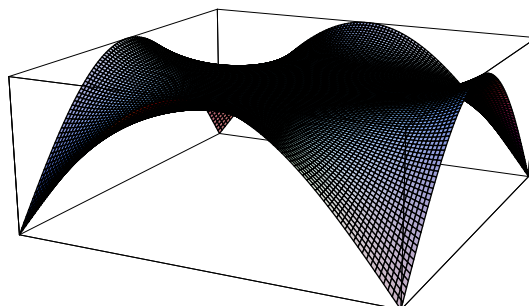
$s = 24$, zentrale Höhe = 0.798711



$s = 50$, zentrale Höhe = 0.797451



$s = 80$, zentrale Höhe = 0.797221



$s = 100$, zentrale Höhe = 0.797168

8.1.15 Numerische Beispiele: Iterationsverfahren

Das Gauss–Seidelschen Relaxationsverfahren

Oben haben wir beim biharmonischen Operator mit $25 \cdot 25 = 625$ Punkten resp. Gleichungen gearbeitet. Nimmt man mehr Punkte, so kann je nach Aufgabe und Punktzahl die Rechenzeit untragbar gross werden. Für viele Bedürfnisse ist jedoch eine höhere Genauigkeit erforderlich, z.B. $1000 \cdot 1000 = 10^6$ Punkte resp. Gleichungen. In diesem Fall kann es einfacher sein, eine Iteration zu versuchen.

Dabei geht man von gegebenen Differenzensternen resp. vergleichbaren Gebilden z.B. der Art $w_{k,j} = q(w_{k-2,j}, w_{k-1,j-1}, w_{k-1,j}, w_{k-1,j+1}, \dots)$ aus.

Man kann nun für eine gegebene Gleichung $\mathcal{D}(z(x, y)) = f(z(x, y), x, y)$ eine Iteration folgender Art versuchen:

1. Bestimme aus dem zugehörigen Differenzenstern die notwendigen Gleichungen für die Werte $w_{k,j}$.
2. Wähle für alle Punkte, an denen der Funktionswert unbekannt ist, eine vernünftige Startnäherung $w_{k,j}^0 = c_{k,j}$.
3. Iteriere das System nach Umschreibung der Gleichungen in Rekursionsgleichungen, z.B.

$$w_{k,j}^{n+1} = q(w_{k-2,j}^n, w_{k-1,j-1}^n, w_{k-1,j}^n, w_{k-1,j+1}^n, \dots)$$

4. Falls sich die Werte quasi stabil verhalten, so hat man vielleicht eine Lösung gefunden. Ohne die Beschaffung von Konvergenzkriterien zum jeweiligen Problem kann es aber leicht zu Irrtümern kommen. Probleme sind hier **numerische Instabilität** und **langsame Konvergenz**, so dass Abbruchbedingungen fälschlicherweise greifen, also den Programmabbruch auslösen. Man kann das Resultat kontrolliere durch Überprüfung der Gleichung $\mathcal{D}(z(x, y)) = f(z(x, y), x, y)$, welche für diese Überprüfung wiederum zu diskretisieren ist. Bei langsamer Konvergenz kann jedoch die Überprüfung bei Mangel an Genauigkeit keine Information liefern. Nachfolgende Beispiele können das veranschaulichen.
5. Bezüglich Konvergenzbeweisen muss des Rahmens wegen auf die einschlägige Fachliteratur verwiesen werden.

1. Beispiel: Relaxationsverfahren, Potentialproblem (Dirichletproblem).

Wir behandeln wiederum wie vorhin das Randwertproblem (Potentialproblem)

$$\Delta z(x, y) = 0, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = \sin(y \frac{\pi}{10}), \quad z(x, 0) = \sin(x \frac{\pi}{10}), \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G.$$

$$\frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} - 4w_{k,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{h^2} = 0 \Rightarrow w_{k,j} = \frac{w_{k+1,j} + w_{k-1,j} + w_{k,j+1} + w_{k,j-1}}{4}$$

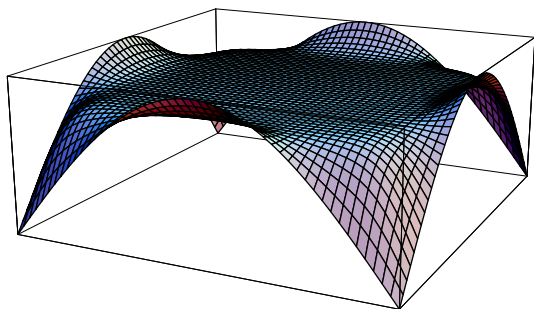
Diese Gleichung können wir in eine Iterationsgleichung verwandeln:

$$w_{k,j,n} = \frac{w_{k+1,j,n-1} + w_{k-1,j,n-1} + w_{k,j+1,n-1} + w_{k,j-1,n-1}}{4}$$

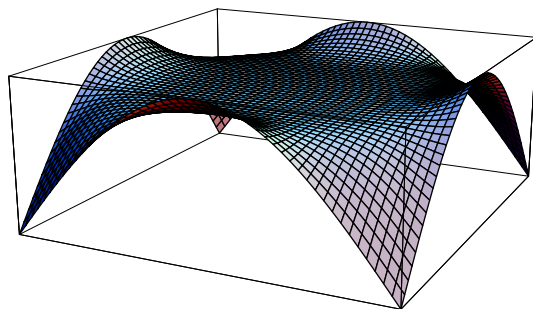
$$|w_{k,j,n}| \leq \text{Max}(|w_{k+1,j,n-1}|, |w_{k-1,j,n-1}|, |w_{k,j+1,n-1}|, |w_{k,j-1,n-1}|)$$

Da die Werte auf dem Rande gegeben sind und für das Dirichletproblem das Maximumprinzip gilt, können die Werte von $w_{k,j,n}$ das Intervall der Randextrema nicht verlassen. Daraus kann man auf die Konvergenz schliessen. Wie wir aber sehen werden, ist die Konvergenz sehr langsam. Wir starten unsere Iteration mit konstanten Werten im innern: $wert = c$.

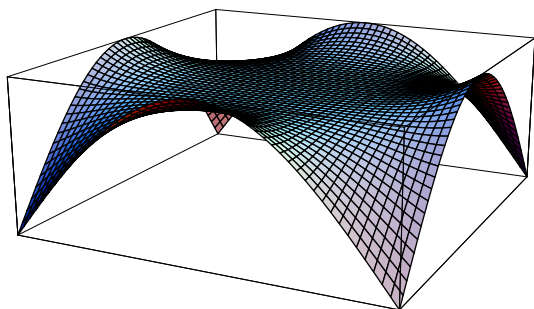
Output (hier mit $wert = c = 0.797221183398142 = \text{Resultat von vorhin}$):



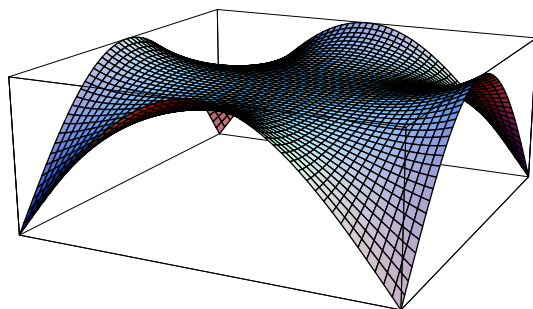
20 Schritte, zentrale Höhe = 0.797221



50 Schritte, zentrale Höhe = 0.797221



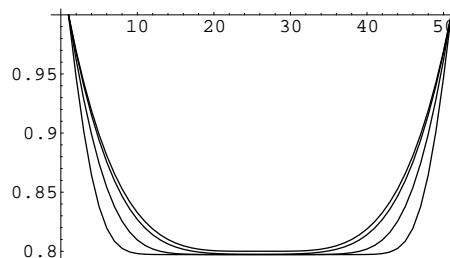
100 Schritte, zentrale Höhe = 0.797418



1000 Schritte, zentrale Höhe = 0.800046

Hier sieht man das Verhalten der Kurven in der Mitte des Bildes.

D.h. für $x = \frac{Laenge}{2}$ oder $y = \frac{Breite}{2}$.



Verwendetes Programm (Input):

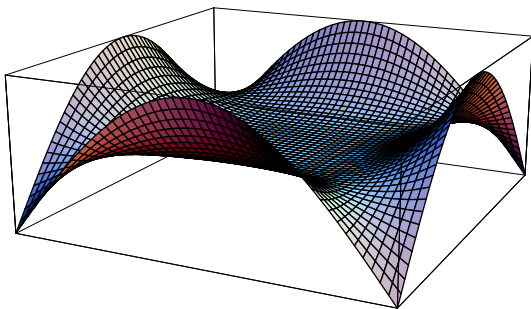
```
Remove["Global'"];
bild[s_, end_, wert_] := Modul[{breite, fkt, h, x, y, k, j, u, w, uu},
  Remove[u, w, uu, fkt, x, y];
  breite = 10; laenge = breite;
  h = breite/s; x[k_] := k h; y[k_] := k h;
  fkt[x_, y_] := wert;
  tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}];
  tab2 = Table[z[k, j, n], {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}] // Flatten;
  u[k_, j_, 0] = fkt[x[k], y[j]];
  u[0, j_, n_] := Sin[j Pi /s]; u[s, j_, n_] := Sin[j Pi /s];
  u[k_, 0, n_] := Sin[k Pi /s]; u[k_, s, n_] := Sin[k Pi /s];
  w[0, j_, n_] := Sin[j Pi /s]; w[s, j_, n_] := Sin[j Pi /s];
  w[k_, 0, n_] := Sin[k Pi /s]; w[k_, s, n_] := Sin[k Pi /s];
  Do[(w[k, j, 1] = (u[k + 1, j, 0] + u[k - 1, j, 0] + u[k, j + 1, 0]
    + u[k, j - 1, 0])/4), {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
  Do[(uu[k, j, 0] = w[k, j, 1] // N), {k, 0, s}, {j, 0, s}];
  For[n = 1, n = end,
    Table[w[k, j, 1] = (uu[k + 1, j, 0] + uu[k - 1, j, 0]
```

```

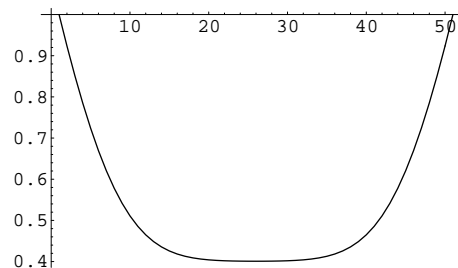
+ uu[k, j + 1, 0] + uu[k, j - 1, 0])/4)// N, {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
Table[(uu[k, j, 0] = w[k, j, 1]), {k, 1, s - 1}, {j, 1, s - 1}];
n++;
tab3D = Table[w[k, j, 1] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
tab2D = Table[w[k, s/2, 1] // N, {k, 0, s}];
(*Print[tab];*)
pl3D[s, end, wert] = ListPlot3D[tab3D, Axes ->
False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}, PlotRange -> {0, 1}];
pl2D[s, end, wert] = ListPlot[tab2D, PlotJoined -> True];
Print["Zentrale Höhe = ", w[s/2, s/2, 1] // N]; end];
s = 50; end = 20; wert = 0.797221183398142;
bild[50, end, 0.797221183398142];
bild[50, 50, 0.797221183398142];
bild[50, 100, 0.797221183398142];
bild[50, 1000, 0.797221183398142];
Show[pl2D[s, 20, wert], pl2D[s, 50, wert], pl2D[s, 100, wert], pl2D[s, 1000, wert]];

```

Eine Iteration mit $end = 100$ Schritten, $s = 50$ Intervallen und einem Startwert der erwarteten Funktion von $wert = c = 0.4$ ergibt:

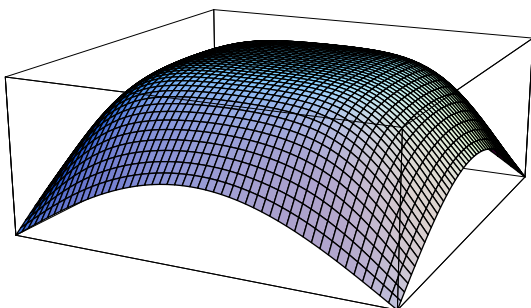


Zentrale Höhe = 0.400824

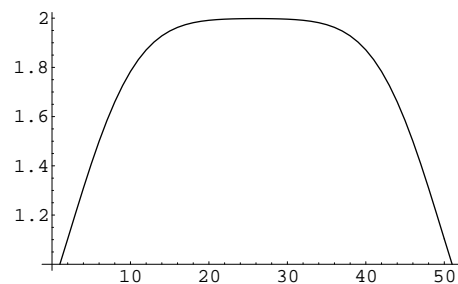


Wie man sieht, ist bei einer Starthöhe von 0.4 in 100 Schritten die erwartete zentrale Höhe ≈ 0.8 längst noch nicht erreicht: Es hat sich dort praktisch noch nichts bewegt.

Eine Iteration mit $end = 100$ Schritten, $s = 50$ Intervallen und einem Startwert der erwarteten Funktion von $wert = c = 2.0$ ergibt:



Zentrale Höhe = 1.9983

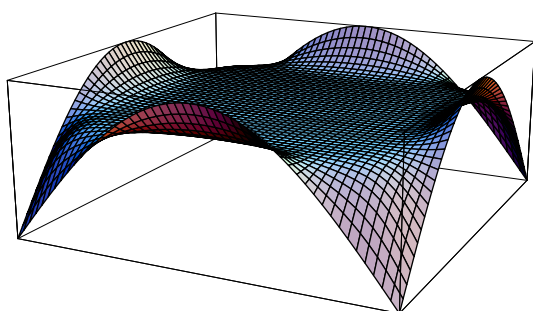


Wie man wiederum sieht, ist auch hier bei einer Starthöhe von 2.0 in 100 Schritten die erwartete zentrale Höhe ≈ 0.8 längst noch nicht erreicht. Um ein brauchbares Resultat zu erhalten, muss end sehr gross gewählt werden.

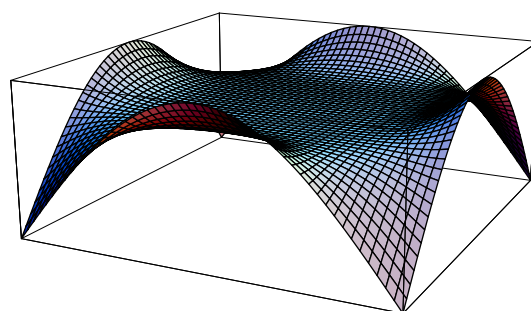
Wir untersuchen noch das Verhalten der Iteration bei einer Starthöhe (Funktionswerte) $wert = c = 0.7$:

```
s=50;end=20;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=50;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=100;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
s=50;end=3000;wert=0.7;
bild[s,end,wert];
Show[p12D[50,20,0.7],p12D[50,50,0.7],p12D[50,100,0.7],p12D[50,3000,0.7]];
```

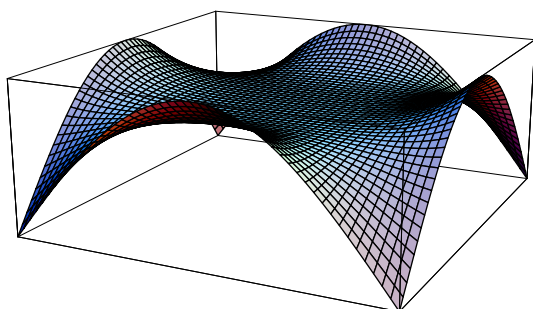
Output (hier mit $wert = c = 0.7$):



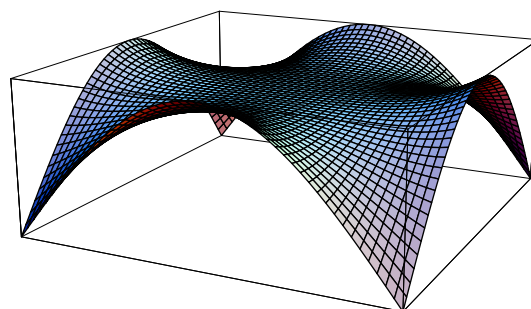
20 Schritte, zentrale Höhe = 0.7



50 Schritte, zentrale Höhe = 0.7

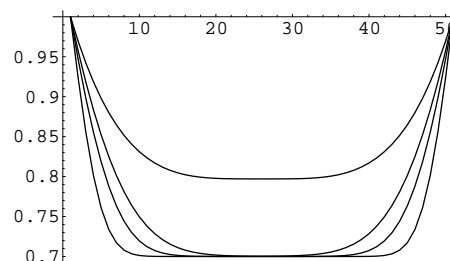


100 Schritte, zentrale Höhe = 0.700351



3000 Schritte, zentrale Höhe = 0.797081

Bei 3000 Schritten dauerte die Wartezeit zur Berechnung und Generierung des 3D-Graphen bei Verwendung eines PS's aus dem Jahre 2003 nur ein paar Sekunden. Man sieht jedoch, dass bei einem beliebig geschätzten und gewählten Startwert ohne eine grosse Schrittzahl mit diesem Verfahren nichts auszurichten ist.



2. Beispiel: Relaxationsverfahren, Problem der eingespannten Platte:

Wir behandeln wie auf Seite 245 das Randwertproblem:

$$\Delta^2 z(x, y) = \Delta(\Delta(z(x, y))) = 2, \quad (x, y) \in G = [0, 10] \times [0, 10]$$

$$z(0, y) = z(10, y) = z(x, 0) = z(x, 10) = 0, \quad \frac{\partial z(x, y)}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ für } (x, y) \in \partial G$$

$$\Rightarrow \frac{dz(x, y)}{dx} = 0 \text{ für } x = 0, x = 10, \quad \frac{dz(x, y)}{dy} = 0 \text{ für } y = 0, y = 10$$

Zu iterieren wäre hier das System der Gleichungen (in jedem innern Punkt eine Gleichung):

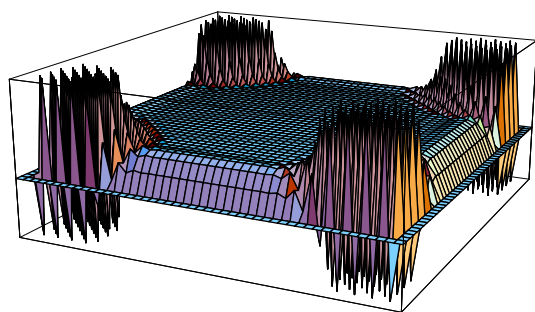
$$u(k, j, n) = \frac{1}{20} (fkt(x(k), y(j)) h^4 - u(k-2, j, n-1) - 2u(k-1, j-1, n-1) + 8u(k-1, j, n-1) - 2u(k-1, j+1, n-1) - u(k, j-2, n-1) + 8u(k, j-1, n-1) + 8u(k, j+1, n-1) - u(k, j+2, n-1) - 2u(k+1, j-1, n-1) + 8u(k+1, j, n-1) - 2u(k+1, j+1, n-1) - u(k+2, j, n-1))$$

Wir verwenden das folgende Programm:

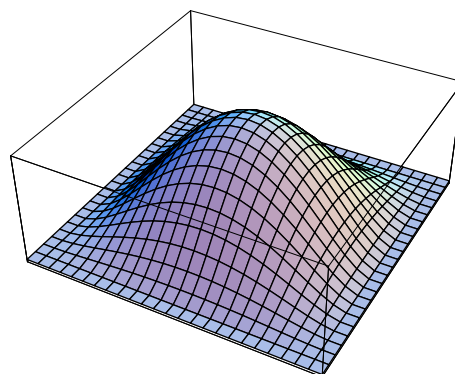
Input:

```
Remove["Global' *"];
end = 20; fkt[x_, y_] := 0.2;
breite = 10; laenge = breite; s = 48; h = breite/s;
x[k_] := k h; y[k_] := k h;
tab1 = Table[{x[k], y[j]}, {k, 0, s, breite/s}, {j, 0, s, breite/s}];
tab2 = Table[z[k, j, n], {k, 2, s-2}, {j, 2, s-2}] // Flatten;
solv = Solve[1/(h^4) (20 u[k, j, n] - 8(u[k+1, j, n-1]
+ u[k-1, j, n-1] + u[k, j+1, n-1] + u[k, j-1, n-1])
+ 2(u[k+1, j+1, n-1] + u[k+1, j-1, n-1] + u[k-1, j
+ 1, n-1] + u[k-1, j-1, n-1]) + (u[k+2, j, n-1]
+ u[k-2, j, n-1] + u[k, j+2, n-1] + u[k, j-2, n-1]))
== fkt[x[k], y[j]], {u[k, j, n]}] // Flatten;
w[kk_, jj_, nn_] := (u[k, j, n] /. solv) /. {k -> kk, j -> jj, n -> nn};
u[k_, j_, 0] = 0;
u[0, j_, n_] = 0; u[s, j_, n_] = 0;
u[1, j_, n_] = 0; u[s-1, j_, n_] = 0;
u[k_, 0, n_] = 0; u[k_, s, n_] = 0;
u[k_, 1, n_] = 0; u[k_, s-1, n_] = 0;
w[0, j_, n_] = 0; w[s, j_, n_] = 0;
w[1, j_, n_] = 0; w[s-1, j_, n_] = 0;
w[k_, 0, n_] = 0; w[k_, s, n_] = 0;
w[k_, 1, n_] = 0; w[k_, s-1, n_] = 0;
Do[
  Do[w[k, j, n], {k, 2, s-2}, {j, 2, s-2}];
  Do[u[k, j, n] = w[k, j, n], {k, 2, s-2}, {j, 2, s-2}]
, {n, 1, end}];
tab = Table[w[k, j, end] // N, {k, 0, s}, {j, 0, s}];
ListPlot3D[tab, Axes -> False, ViewPoint -> {-2.682, -1.311, 0.856}];
```

Output (hier mit Startwert 0.2, 48 × 48 Intervalle, 20 Iterationsschritte):



Erhaltene Situation, beginnende Divergenz



Erwartete Situation

Wie man beobachten kann, funktioniert das Verfahren beim biharmonischen Operator nicht. Auch kann man aus unserer Rekursionsgleichung keine sofort ins Auge springende Abschätzung gewinnen, welche auf eine Konvergenz hindeuten würde.

Konsequenz:

Bevor von einem erhaltenen Resultat auf eine Konvergenz geschlossen werden kann, muss ein Konvergenzbeweis vorliegen. Es könnte sich auch um eine Scheinkonvergenz handeln, welche innerhalb der numerischen Genauigkeit in der Rechnung nicht von einer Divergenz unterscheidbar ist. Da es sich beim verwendeten Iterationsverfahren um eine Approximation einer Lösung eines Gleichungssystems handelt, das selbst wiederum nur eine Approximation liefert, zeigt sich die Sache hier als doppelt kritisch. Daher ist ein nicht begründetes Resultat unbrauchbar.

Bemerkung zur Methode der finiten Elemente:

Auf den ersten Blick scheint es aufwändiger, statt einem Rechtecksgitter ein der Geometrie des zu untersuchenden Gebiets angepasstes Gitter zu verwenden. Jedoch zeigen die Verfahren der finiten Elemente, welche diese Idee nutzbar machen, dass die Effizienz recht gross sein kann. Zu nennen sind die **Verfahren von Ritz** und **von Galerkin**. (Mehr darüber in einem der weiter hinten folgenden Abschnitte mit Hilfe der unten dargestellten Variationsrechnung.)

8.2 Schritte in die Variationsrechnung

8.2.1 Der Begriff der ersten Variation

In der Absicht, weitere Methoden zur Modellierung mathematischer Beschreibungen physikalischer oder technischer Vorgänge zu finden, befassen wir uns noch mit den Grundideen der Variationsrechnung. Dabei handelt es sich um eine mathematische Methode, welche auf Leonard Euler zurückgeht.

Demonstrationsmodell: Als Demonstrationsmodell wählen wir in Anlehnung an die fachliche Tradition ein **Minimumproblem**, welches wir physikalisch interpretieren können. Wir betrachten das Integral

$$E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV.$$

Dabei ist es hilfreich, bei $E(w)$ an eine Energie zu denken. $w = w(\vec{x})$ soll eine Funktion sein aus der Klasse der im Gebiet $G = V \in \mathbb{R}^3$ differenzierbaren Funktionen mit fix gegebenen Randwerten:

$$w \in M = \{w(\vec{x}) \mid \vec{x} = \overrightarrow{OP}, (P \in G \Rightarrow w(\vec{x}) \in \mathcal{D}_{x,y,z}), (P \in \partial G \Rightarrow w(\vec{x}) = g(\vec{x}))\}$$

Gesucht: Eine Funktion $u(\vec{x})$ so, dass $E(w)$ minimal auf M .

Annahme: Sei $u(\vec{x})$ eine Funktion, die $E(w)$ in M minimiert. Sei $\varphi(\vec{x})$ eine genügend differenzierbare Funktion mit $\varphi(\vec{x}) = 0$ auf ∂G . Sei $w(\vec{x}, \varepsilon) = u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}) \Rightarrow w(\vec{x}, \varepsilon) \in M$.

$\Rightarrow w(\vec{x}, \varepsilon)$ nimmt das Minimum $u(\vec{x})$ in M für $\varepsilon = 0$ an. $\Rightarrow \left. \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0$.

Definition:

$$\frac{\delta E}{\delta u} := \left. \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial E(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi)}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$$

$\rightsquigarrow \frac{\delta E}{\delta u}$ heisst **erste Variation** von E in **Richtung** φ .

Konsequenz: Wenn u eine minimalisierende Funktion für E ist, so ist an der Stelle u die erste Variation von E in jede Richtung gleich 0 (d.h. für alle zulässigen φ).

Bemerkung:

$E(w)$ ist ein **Funktional**. Mit Funktional bezeichnet man in der Mathematik meist eine Funktion aus einem Vektorraum V in den Körper K , über dem der Vektorraum betrachtet wird. Der Vektorraum ist oft ein Funktionenraum, d.h. ein Vektorraum, dessen Elemente reell- oder komplexwertige Funktionen sind. Ein Funktional ist somit eine Funktion auf Funktionen. Das Gebiet der **Funktionalanalysis** erhielt seinen Namen, da es aus dem Studium solcher Funktionale entstand.

8.2.2 Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung

Im Folgenden schreiben wir kurz: $w_x' := w_x$, $w_x'' := w_x$ u.s.w. Es gilt dann mit $w_x = u_x + \varepsilon \varphi_x$, ...:

$$\begin{aligned} \frac{\delta E}{\delta u} &= \left. \frac{\partial E(w(\vec{x}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial E(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_G \frac{\partial J(\vec{x}, \overbrace{u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x})}^{=w}, \overbrace{\nabla(u(\vec{x}) + \varepsilon \varphi(\vec{x}))}^{=(w_x, w_y, w_z)^T})}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} dV = \\ &= \int_G \left(\frac{\partial J(\vec{x}, \dots)}{\partial \vec{x}} \cdot \underbrace{\frac{\partial \vec{x}}{\partial \varepsilon}}_{=0} + \frac{\partial J(\dots, w, \dots)}{\partial w} \cdot \underbrace{\frac{\partial w}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi} + \frac{\partial J(\dots, w_x)}{\partial w_x} \cdot \underbrace{\frac{\partial w_x}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_x} + \frac{\partial J(\dots, w_y)}{\partial w_y} \cdot \underbrace{\frac{\partial w_y}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_y} + \frac{\partial J(\dots, w_z)}{\partial w_z} \cdot \underbrace{\frac{\partial w_z}{\partial \varepsilon}}_{=\varphi_z} \right) dV \\ &= \int_G \left(\frac{\partial J(\dots, w, \dots)}{\partial w} \varphi + \frac{\partial J(\dots, w_x)}{\partial w_x} \varphi_x + \frac{\partial J(\dots, w_y)}{\partial w_y} \varphi_y + \frac{\partial J(\dots, w_z)}{\partial w_z} \varphi_z \right) dV = 0 \quad \forall \varphi \end{aligned}$$

Wir verwenden nun den Divergenzsatz von Gauss, z.B. für den Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$:

$$\Rightarrow \int_G \underbrace{\text{div } \vec{v}}_{=r_x \cdot s + r \cdot s_x} dV = \int_{\partial G} \langle \vec{v}, \vec{n} \rangle dO \Rightarrow \int_G \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \cdot \varphi + \frac{\partial J}{\partial w_x} \cdot \frac{d\varphi}{dx} \right) dV = \int_{\partial G} \frac{\partial J}{\partial w_x} \cdot \underbrace{\varphi}_{\partial G: \varphi=0} dO = 0$$

Damit erhalten wir: $\int_G \frac{\partial J}{\partial w_x} \varphi_x dV = - \int_G \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \varphi dV$. Ebenso für y und z .

$$\Rightarrow 0 = \left. \frac{\delta E}{\delta u} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \int_G \left(\frac{\partial J}{\partial w} \cdot \varphi - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} \right) \varphi - \left(\frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} \right) \varphi - \left(\frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} \right) \varphi \right) dV$$

$$\Rightarrow 0 = \int_G \varphi \cdot \left(\frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} \right) dV \quad \forall \varphi \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} = 0$$

Definition:
$$\frac{\partial J}{\partial w} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial w_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial w_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial w_z} = 0$$

heisst **Euler–Lagrange–Differentialgleichung**.

Bemerkung: Bei der Euler–Lagrange–Differentialgleichung handelt es sich um eine **partielle** Differentialgleichung.

Damit können wir eine notwendige Bedingung für eine Minimalfunktion $w = u$ von $E(w)$ folgern:

Satz: **Vor.:**
$$u = w \text{ minimalisiert } E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV$$

Beh.:
$$\frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial u_x} - \frac{d}{dy} \frac{\partial J}{\partial u_y} - \frac{d}{dz} \frac{\partial J}{\partial u_z} = 0$$

Damit lässt sich aus einer Minimalitätsforderung für eine Funktion $E(w) = \int_{G=V} J(\vec{x}, w, \nabla w) dV$, welche ein physikalisches System beschreibt, eine partielle Differentialgleichung, die Euler–Lagrange–Differentialgleichung, als mathematisches Modell herleiten. Man hat so das physikalische System **mathematisch modelliert** resp. in die Sprache der Mathematik übersetzt, wo man mit mathematischen Methoden Lösungen gewinnen kann.

Wir wollen uns jetzt einigen Anwendungsbeispielen zuwenden.

8.2.3 Die Herleitung der Potentialgleichung

Wir wissen: $\text{grad}(u) = \nabla u \Rightarrow \langle \text{grad}(u), \text{grad}(u) \rangle = |\text{grad}(u)|^2 = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$. Dabei ist $|\text{grad}(u)|$ die Richtungsableitung von u in der Richtung der grössten Steigung im betrachteten Punkt. Damit wollen wir ein Potential modellieren, indem wir fordern, dass $|\text{grad}(u)|^2$ im Mittel möglichst klein sein soll, d.h. dass das Integral über $|\text{grad}(u)|^2$ pro Volumen möglichst klein werden soll. Bei konstantem Volumen muss damit $\int_G |\nabla u|^2 dV$ minimal werden. Damit können wir wie folgt schliessen:

Sei $\int_G |\nabla u|^2 dV \rightarrow \text{Min}$, $u = g$ auf ∂G . Wir setzen: $J(\vec{x}, u, \nabla u) = |\nabla u|^2 = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2$.

Hier ist $\frac{\partial J}{\partial u} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial u_x} = 2u_x, \dots$

Die Euler–Lagrange–Differentialgleichung lautet damit: $0 - 2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) = 0 \Rightarrow \Delta u = 0$.

u erfüllt also die Potentialgleichung. u ist daher eine Potentialfunktion.

8.2.4 Die Kettenlinie

Eine zwischen zwei horizontal auseinanderliegenden Punkten $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ aufgehängte Kette nimmt bekanntlich etwa die Form einer Parabel an. Wir werden aber gleich erfahren, dass es sich bei dieser Form nicht um eine exakte Parabel handelt. Um später eine Handhabe für das Studium der

Abweichungen zur Parabel zu haben, wollen wir die Differentialgleichung der Kettenlinie herleiten. Wir gehen dabei von der physikalisch begründeten Feststellung aus, dass die Kette eine Form annimmt, in der ihre potentielle Energie minimal ist. Sonst müsste sie sich ja bewegen, um den energietiefsten Zustand zu erreichen. Daher muss $\int_{x_1}^{x_2} dE_{pot} = \int_{x_1}^{x_2} dm g y(x)$ minimal sein. Wir können hier also die Variationsrechnung einsetzen.

Es gilt: $m = \rho \cdot V \Rightarrow dm = \rho \cdot dV = \rho \cdot A ds$. Dabei ist A ein angenommener gleichmässiger Querschnitt und ds die infinitesimale Kettenlänge.

Wir wissen, dass gilt: $ds = \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx \Rightarrow dm = \rho \cdot A \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$.

Damit wird $E_{pot} = \int_{x_1}^{x_2} g \cdot \rho \cdot A \cdot y(x) \cdot \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = c \int_{x_1}^{x_2} y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$
mit $J(x, y(x), y'(x)) = c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2}$.

Auf J können wir nun die Euler–Lagrange Differentialgleichung anwenden:

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial J}{\partial y'} \right) &= 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial y'} c y(x) \sqrt{1 + (y'(x))^2} \right) = 0 \\ \leadsto 0 &= \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{d}{dx} \left(\frac{y \cdot 2 y'}{2 \sqrt{1 + (y')^2}} \right) = \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y' y' + y y'') \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y y' \cdot 2 y' y''}{2 \sqrt{1 + (y')^2}}}{(\sqrt{1 + (y')^2})^2} \\ \leadsto 0 &= (1 + (y')^2)^{3/2} - \left(((y')^2 + y y'') \sqrt{1 + (y')^2} - \frac{y (y')^2 y''}{\sqrt{1 + (y')^2}} \right) \\ \leadsto 0 &= (1 + (y')^2)^2 - (((y')^2 + y y'') (1 + (y')^2) - y (y')^2 y'') \\ &= 1 + 2 (y')^2 + (y')^4 - (y')^2 - (y')^4 - y y'' - y y'' (y')^2 + y (y')^2 y'' = 1 + (y')^2 - y y'' \end{aligned}$$

Damit erhalten wir eine **erste Form der Differentialgleichung der Kettenlinie**:

$$\Rightarrow y y'' - (y')^2 = 1$$

Differenzieren nach x ergibt:

$$0 = 2 y' y'' - y' y'' - y y''' = y' y'' - y y''' = \frac{y' y'' - y y'''}{(y'')^2} = \left(\frac{y}{y''} \right)' = 0 \Rightarrow \frac{y}{y''} = c \Rightarrow y = c y''$$

Da $c = 0$ für die Lösung wegfällt (mit „unendlicher Kraft“ gestreckte Kette), können wir mit $\gamma = \frac{1}{c}$ auch schreiben: $y'' - \gamma y = 0$. Von dieser homogenen Gleichung kennen wir die Basislösungen: $y(x) = c_1 e^{\sqrt{\gamma} x} + c_2 e^{-\sqrt{\gamma} x}$. Dies führt für negative γ auf Sinus und Cosinus, welche in unserem Fall nicht in Frage kommen. Für positive γ erhalten wir als Basislösungen die Exponentialfunktionen $e^{\sqrt{\gamma} x}$ und $e^{-\sqrt{\gamma} x}$, aus denen wir durch Basiswechsel die neue Basis $\{\cosh(\sqrt{\gamma} x), \sinh(\sqrt{\gamma} x)\}$ gewinnen.

Nehmen wir an, dass die Kette symmetrisch im Koordinatensystem liegt, d.h. ihr Minimum auf der y -Achse annimmt, so muss wegen $y(-x) = y(x)$ der \sinh -Anteil wegfallen. Als Lösung bleibt:

$$y(x) = c_1 \cosh(\sqrt{\gamma} x)$$

Setzt man diese Lösung in die Gleichung $y y'' - (y')^2 = 1$ ein, so folgt:

$$c_1 \cosh(\sqrt{\gamma} x) c_1 \gamma \cosh(\sqrt{\gamma} x) - (c_1 \sqrt{\gamma} \sinh(\sqrt{\gamma} x))^2 = c_1^2 \gamma \underbrace{(\cosh^2(\sqrt{\gamma} x) - \sinh^2(\sqrt{\gamma} x))}_{=1} = 1 \Rightarrow \gamma = \frac{1}{c_1^2}$$

Wir setzen $c_1 = a \Rightarrow$ im Falle einer symmetrischen Lösung erkennen wir: $y(x) = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$.

a wird durch die Randbedingungen festgelegt. Eine Rechnung ergibt, dass a gerade der Krümmungsradius im Minimum der Kettenlinie ist.

8.2.5 Ein isoperimetrisches Problem und die Lagrange-Funktion

Situation: Gegeben sei die Länge l einer unbekanntenen Kurve C sowie zwei Punkte $P_1 = P_1(x_1, 0)$ und $P_2 = P_2(x_2, 0)$ auf der x -Achse. C soll von P_1 nach P_2 führen. Selbstverständlich setzen wir dabei voraus, dass $l \geq |x_2 - x_1|$ ist.

Aufgabe: Bestimme C so, dass der Inhalt der zusammen mit der x -Achse **umschlossenen Fläche maximal** wird. Einschränkung: C soll durch eine Funktionskurve einer integrierbaren Funktion $u : x \mapsto y = u(x)$ beschrieben werden können, also rechtseindeutig sein. Der Flächeninhalt soll damit als Integral berechenbar sein $\leadsto A(u) = \int_{x_1}^{x_2} u(x) dx$.

Wenn $P_1 = P_2$ gilt, so vermutet man wahrscheinlich sofort, dass die Kurve ein Kreis sein muss. Denn der Kreis ist diejenige Kurve, bei welcher die Krümmung konstant ist. Und wenn die Fläche möglichst gross sein soll, so muss wohl die Krümmung möglichst überall möglichst klein sein, um möglichst viel zu umschliessen. Denn grosse Krümmung bedeutet wenig umschliessen. Daraus könnte man vermuten, dass die Krümmung überall gleich klein sein muss. Das wollen wir nun mit den Methoden der Variationsrechnung exakt untersuchen.

Sei $A(w) := E(w) = \int_{x_1}^{x_2} w(x) dx$, $J(x, w(x), w_x'(x)) = w(x)$. \leadsto Gesucht ist eine Funktion $u(x)$ mit $E(u) = \text{Min}(E(w))$, $w \in M = \{w(x) \mid w(x_1) = w(x_2) = 0\}$. Dabei gilt noch die **Nebenbedingung** $l = N(w) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(w_x'(x))^2 + 1} dx = \text{const}$. Mit $E(w)$ und $N(w)$ bilden wir nun die Lagrange-Funktion:

Definition: $L(w, \lambda) := E(w) + \lambda N(w)$ heisst **Lagrange-Funktion** zu E und N .

Da $N(w) = N(u) = \text{const}$. ist, können wir für $L(w, \lambda)$ unmittelbar die Eigenschaft festhalten:

Satz: Für $N(w) = N(u) = \text{const}$. ist mit $E(u)$ auch $L(w, \lambda)$ zu gegebenem konstantem λ minimal.

Korollar: Damit erfüllt $L(w, \lambda)$ die Euler-Lagrange-Differentialgleichung.

Folgerung: $L(w, \lambda) = \int_{x_1}^{x_2} (w(x) + \lambda \sqrt{(w_x'(x))^2 + 1}) dx \rightarrow \text{Min} = L(u, \lambda)$.

$$\Rightarrow J(x, u, u_x', \lambda) = u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1} \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial u_x} = 0.$$

$$\leadsto \frac{\partial(u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1})}{\partial u} - \frac{d}{dx} \frac{\partial(u(x) + \lambda \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1})}{\partial u_x} = 1 - \frac{d}{dx} \lambda \frac{2 u_x'}{2 \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1}} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{1}{\left(\frac{d}{dx} \frac{u_x'}{\sqrt{(u_x'(x))^2 + 1}}\right)} = \frac{\sqrt{(1 + u'(x)^2)^3}}{u''(x)} = \rho(x) = \text{Krümmungsradius.}$$

Da die Minimalitätsbedingung unter der Voraussetzung eines konstanten λ gilt, finden wir eine Kurve mit konstanter Krümmung $\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\lambda} = \frac{u''(x)}{\sqrt{(1 + u'(x)^2)^3}}$. Bekanntlich ist diejenige Kurve, bei der die

Krümmung konstant ist, ein Kreis. Von diesem Kreis wissen wir damit, dass er durch die Punkte $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$ geht, dass die Kurvenlänge $= l$ ist und dass der Kreismittelpunkt wegen der Krümmung und der Forderung nach einer Funktion nicht auf derselben Seite der x -Achse liegen kann wie die Kurve $u(x)$. $u(x)$ soll ja Funktion und nicht nur Abbildung sein. Aus geometrischen Gründen liegt der Kreismittelpunkt auf der Mittelsenkrechten durch $(x_1, 0)$ und $(x_2, 0)$: $P_m = P_m\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, y_m\right)$.

Damit wird $r = \rho = \sqrt{(x_2 - x_m)^2 + y_m^2}$ und $(u(x) + y_m)^2 + (x - x_m)^2 = r$. Daraus kann man eine Gleichung für $u(x) = u(x, y_m)$ herleiten. Aus der Bedingung $\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{(u_x'(x))^2 + 1} dx$ folgt dann y_m . Die Durchführung der Berechnung von y_m und damit von $u(x)$ sei dem Leser überlassen.

8.2.6 Das Prinzip der kleinsten Wirkungen und erste Variation

Das Prinzip

Definition:

Als **Wirkung** oder **Wirkungsintegral** bezeichnen wir in der Mechanik den Ausdruck

$$A = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin}(t) - E_{pot}(t)) dt.$$

(Entsprechend für die Elektrodynamik.)

Pierre-Louis Moreau de Maupertuis und allgemeiner William Rowan Hamilton haben ein Prinzip formuliert, das eine Bewegung eines Körpers oder den Zustand eines Systems bezüglich der Wirkung A beschreibt. Dieses Prinzip ist in der Physik akzeptiert. Wir setzen es daher als physikalisch gegeben voraus.

Das Prinzip der kleinsten Wirkungen: Die Zustandsänderung eines Systems resp. die Bewegung eines Körpers ohne äusseren Eingriff erfolgt in der Mechanik in der Weise, dass das Wirkungsintegral A minimal wird, d. h. dass die erste Variation von $A = A(w)$ gleich 0 wird.

$w = w(t)$ ist dabei eine Ortsfunktion in Abhängigkeit von der Zeit, ein Potential u.s.w.

Es gilt daher der Satz:

Satz:
$$\frac{\delta A}{\delta u} := \left. \frac{\partial A(w(\vec{t}, \varepsilon))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left. \frac{\partial A(u(t) + \varepsilon \varphi(t))}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = 0 \text{ und damit}$$

$$J(t, u, u_t) = E_{kin}(t, u, u_t) - E_{pot}(t, u, u_t) \quad \text{mit} \quad \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial u_t} = 0$$

Beispiel 1: Ein Massenpunkt in einem Gravitationsfeld

Es ist $A = \int_{t_1}^{t_2} J(t, u, u_t) dt = \int_{t_1}^{t_2} (E_{kin}(t, u, u_t) - E_{pot}(t, u, u_t)) dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t)\right) dt.$

$$\begin{aligned} \leadsto \frac{\partial J}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial u_t} &= \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t))}{\partial u} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (u_t'(t))^2 - m \cdot g \cdot u(t))}{\partial u_t} = 0 \\ \Rightarrow -m \cdot g - \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t'(t) &= -m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t''(t) = 0 \Rightarrow F = m \cdot g = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot u_t''(t). \end{aligned}$$

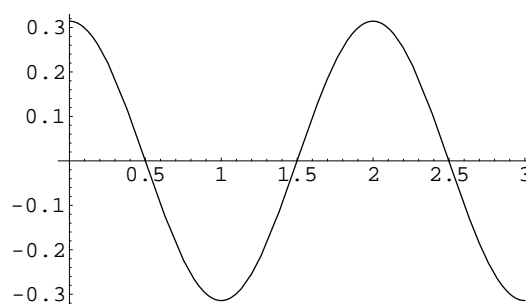
Wir erhalten somit das bekannte Bewegungsgesetz (Fallgesetz) einer Masse m im Gravitationsfeld mit der Feldstärke g .

Beispiel 2: Das mathematische Pendel im Gravitationsfeld

Wir betrachten das mathematische Pendel mit einer Masse m an einem Faden mit der Pendellänge l und dem Auslenkungswinkel φ im Gravitationsfeld mit der Feldstärke g . Es wird somit $E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2$ und $E_{pot} = m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi))$.

$$\begin{aligned} \text{Damit erhalten wir } J(t, \varphi, \varphi_t) &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)) \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \varphi_t} = ? \\ \frac{\partial J}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial J}{\partial \varphi_t} &= \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)))}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial(\frac{1}{2} \cdot m \cdot (r \cdot \varphi_t)^2 - m \cdot g \cdot (r - r \cdot \cos(\varphi)))}{\partial \varphi_t} \\ &= -m \cdot g \cdot r \cdot \sin(\varphi) - m \cdot r^2 \cdot \varphi_{tt} \Rightarrow \varphi_{tt} + \frac{g}{r} \cdot \sin(\varphi) = 0. \end{aligned}$$

Interessanterweise hat hier die Masse keinen Einfluss auf die Auslenkung, denn sie fällt aus der Gleichung heraus. Wir lösen das Problem für $g = 10$, $r = 1$, $\varphi(0) = \frac{\pi}{8}$ und $\varphi'(0) = 0$. Die Lösung suchen wir am einfachsten numerisch im Bereich $t \in [0, 3]$. Damit erhalten wir eine Vorstellung von der Lösung. (Dabei benutzen wir *Mathematica*).



Output

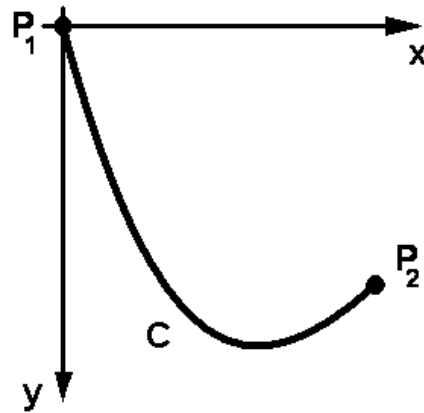
Input:

```
a=b;
solv=NDSolve[{f'[t]+10 Sin[f[t]]==0, f[0]==Pi/10, f'[0]==0},f[t],{t,b}];
Plot[f[t]/.solv,{t,0,b}];
```

8.2.7 Bernoullis Brachystochronen-Problem

In nebenstehender Skizze ist eine Kurve C von $P_1 = P_1(0, 0) = P_1(x_1, y_2)$ nach $P_2 = P_2(x_2, y_2)$ gezeigt, wobei der einfache Fall $x_1 = x_2$ hier nicht studiert werden soll. Die Kurve kann daher als Funktionskurve $y(x)$ verstanden werden. Der einfacheren Rechnung wegen ist die y -Achse nach unten gerichtet. P_2 soll weiter unten liegen als P_1 . Setzt man nun in P_1 eine kleine Kugel hin und lässt man diese Kugel rollen oder ohne namhaften Widerstand gleiten, so gelangt sie nach P_2 .

Frage: Für welche Kurve braucht die Kugel die kürzeste Zeit um nach P_2 zu gelangen?



Zur Vereinfachung wollen wir die Rotationsenergie oder die in die Reibung geleitete Energie nicht beachten.

Problem: Es gilt somit eine Kurve C in der Form $y = y(x)$ zu finden, für welche die gesamte Durchlaufzeit $T(x_2, y_2)$ minimal ist. t sei dabei die laufende Zeit.

Zur Lösung wollen wir die Euler-Lagrange-Differentialgleichung nutzen und zu diesem Zweck ein Minimumproblem formulieren.

Wir beginnen mit der Energiebilanz $E_{pot} + E_{kin} = E_{total} = E_{initial} = 0$. Denn zu Beginn ist die Energie in $P_1 = P_1(0, 0)$ gleich 0.

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{1}{2} m v^2 = -E_{pot} = -m g (-y) \Rightarrow v = \sqrt{2 g y}$$

$$\text{mit } x = x(t), \quad y = y(t), \quad v = v(t) = \sqrt{(x_t'(t))^2 + y_t'(t)^2}.$$

$$\text{Nun gilt: } v \approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta t}\right)^2} = \frac{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}{\Delta t} = \frac{\sqrt{1 + \frac{(\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}}}{\Delta t} \cdot \Delta x$$

$$\leadsto v = \sqrt{2 g y} = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{dt} \cdot dx \Rightarrow \text{Separation: } dt = \frac{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{\sqrt{2 g y}} dx = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}} dx$$

$$T(t_1) = \int_0^{t_1} dt = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}} dx \rightarrow \text{Min} \Rightarrow J(x, y, y_x') = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2 g y}}$$

Damit können wir auf $J(x, y, y_x')$ die Euler-Lagrange-Differentialgleichung anwenden: $\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = 0$.

Wenn wir die Gleichung $\frac{\partial J}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = 0$ mit y_x multiplizieren, so bringt uns das weiter. Dabei beachten wir, dass J nicht explizit von x abhängig ist, dass die partielle Ableitung $\frac{\partial J}{\partial x}$ also 0 ist.

$$\leadsto 0 = \frac{\partial J}{\partial y} \cdot y_x - y_x \cdot \frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} = \frac{\partial J}{\partial y} \cdot y_x + \left[\frac{\partial J}{\partial y_x} \cdot y_{xx} \right] - \left(\frac{d}{dx} \frac{\partial J}{\partial y_x} \right) \cdot y_x - \left[\frac{\partial J}{\partial y_x} \cdot y_{xx} \right] = \frac{d}{dx} (J - J_{y_x} \cdot y_x).$$

Damit ist die totale Ableitung $\frac{d}{dx} (J - J_{y_x} \cdot y_x) = 0$, also der Ausdruck $J - J_{y_x} \cdot y_x = \text{const.}$

$$\leadsto J - J_{y_x} \cdot y_x = \frac{\sqrt{1 + (y_x')^2}}{\sqrt{2gy}} - \frac{2y_x \cdot y_x}{2\sqrt{1 + (y_x')^2} \sqrt{2gy}} = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot \frac{1 + (y_x')^2 - (y_x')^2}{\sqrt{1 + (y_x')^2}} = \text{const.}$$

$$\leadsto c_1 = \frac{1}{\sqrt{2gy}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (y_x')^2}} \Rightarrow y = \frac{c_2}{1 + (y_x')^2} \quad \text{oder} \quad y_x' = \pm \sqrt{\frac{c_2}{y} - 1}$$

Mit $c_2 = 2r$ finden wir:

$$(y_x')^2 = \frac{c_2 - y}{y} := \frac{2r - y}{y}$$

Diese Gleichung kennt man als die **Zykloidengleichung** $(y_x')^2 = \frac{2r - y}{y}$.

Mit Hilfe von $y_t' = y_x' \cdot x_t'$ kann man nun verifizieren, dass die folgende parametrisierte Kurve (Zykloide) das Problem löst resp. $(y_x')^2 = \frac{2r - y}{y}$ erfüllt:

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t - \sin(t)) \\ y(t) &= r(1 - \cos(t)) \end{aligned}$$

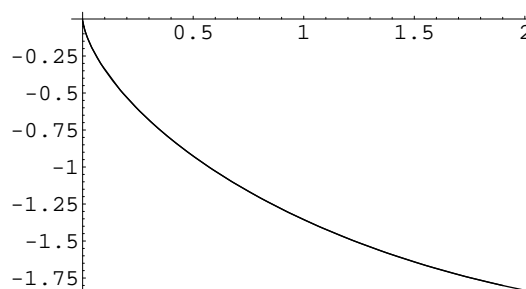
Wir testen das Gefundene anhand eines Beispiels mit *Mathematica*. Dazu wählen wir $r = 1$ und erzeugen die Kurven einerseits numerisch als Lösungskurve der Differentialgleichung und andererseits als Plot der parametrisierten Zykloide:

Input:

```
r=1;
x[t_]:=r (t-Sin[t]);
y[t_]:=-r (1-Cos[t]);
p1=ParametricPlot[{x[t],y[t]},{t,0,2.5},
DisplayFunction -> Identity];
solv=NDSolve[{y1'[x1]==Sqrt[2r/y1[x1]-1], y1[0]== 0.0001}, y1[x1],{x1,2}]
p2=Plot[-y1[x1]/.solv,{x1,0.001,2},
DisplayFunction -> Identity];
Show[p1,p2,
DisplayFunction -> $DisplayFunction];
```

Output:

Die beiden Kurven liegen ununterscheidbar übereinander!



8.2.8 Variation und finite Elemente: Triangulationsmethode

Die Idee der Umkehrung der Methode mittels Euler–Lagrange

Problem: Gegeben ist für ein einfach zusammenhängendes Gebiet G das Randwertproblem:

$$a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u = d, \quad (x, y) \in G, \quad \text{RBD: } u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial G$$

Hier handelt es sich um eine Verallgemeinerung der Potentialgleichung. Für $a = b = 1$ und $c = 0$ erhalten wir $\Delta u = d$.

Die Gleichung $a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u - d = 0$ können wir als Euler–Lagrange–Gleichung interpretieren:

$$\begin{aligned} a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u - d &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \frac{a \cdot u_x^2}{2} + \frac{\partial}{\partial u_y} \frac{b \cdot u_y^2}{2} \right) + \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{2} c \cdot u^2 - d \cdot u \right) = 0 \\ \leadsto \frac{\partial}{\partial u} \left(d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial}{\partial u_x} \frac{a u_x^2}{2} + \frac{\partial}{\partial u_y} \frac{b u_y^2}{2} \right) &= 0 \leadsto \text{setze } J(x, u, \nabla u) = d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2} \end{aligned}$$

Konsequenz:

Eine Lösung von

$$E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) \, dx \, dy \rightarrow \text{Min}$$

mit $J(x, u, \nabla u) = d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2}$, $u(x, y) = g(x, y)$ in ∂G , ist auch Lösung des Problems $a \cdot u_{xx} + b \cdot u_{yy} + c \cdot u = d$ in G , $u(x, y) = g(x, y)$ auf ∂G .

Konzept: Statt eine Lösung der gegebenen Differentialgleichung zu suchen, kann man daher auch versuchen u derart zu konstruieren, dass damit $E(u)$ minimiert wird, wobei die Randbedingungen erfüllt sein müssen. (In der Fachsprache sagt man an Stelle von *minimal* auch, dass u **stationär** wird.)

Dieses Konzept wollen wir nun in eine Methode umgießen:

Die Idee zur Methode nach Ritz

Wir wähle eine linear unabhängige Menge von „**Basisfunktionen**“ wie folgt:

$$\begin{aligned} u_0(x, y) &= g(x, y), \quad (x, y) \in \partial G \\ u_k(x, y) &= 0, \quad (x, y) \in \partial G, \quad k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Damit machen wir den **Ansatz**:

$$u(x, y) \approx u_A(x, y) := u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y), \quad c_k \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Die c_k , $k = 1, \dots, n$ müssen dabei so gewählt werden, dass $u_A(x, y) := u_{c_1, \dots, c_n}(x, y)$ das Funktional $E(w)$ über der Menge der Funktionen $u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)$ minimiert.

$u_A(x, y)$ erfüllt wegen den Randwerten $u_0(x, y) = g(x, y)$ und $u_k(x, y) = 0$ auch die Randbedingungen, ist

also ein Kandidat für die gesuchte Funktion. Für ein auffindbares absolutes Minimum haben wir dann die beste Approximation über der gegebenen Funktionenmenge M gefunden. Daher gilt für das Minimum:

$$E(u) \approx E(u_A) = E\left(u_0(x, y) + \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)\right) := E(c_1, \dots, c_n) = \text{Min}(M)$$

Als notwendige Bedingung für das gesuchte Minimum können wir daher wie üblich setzen:

$$\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0, \quad k = 1, \dots, n$$

Sei nun $u = u_A$. Wegen $E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) dx dy = \int_G d \cdot u - \frac{1}{2} c u^2 + \frac{a u_x^2}{2} + \frac{b u_y^2}{2} dx dy$ finden wir in $J(x, u, \nabla u)$ die c_k in den Termen u , u^2 , u_x^2 und u_y^2 . Da die c_k in u linear eingehen, kommen sie danach in den genannten Termen quadratisch oder linear vor. $E(u)$ ist also eine quadratische Funktion von den c_k , $k = 1, \dots, n$. Somit erscheinen diese c_k in $\frac{\partial E}{\partial c_k}$ höchstens linear.

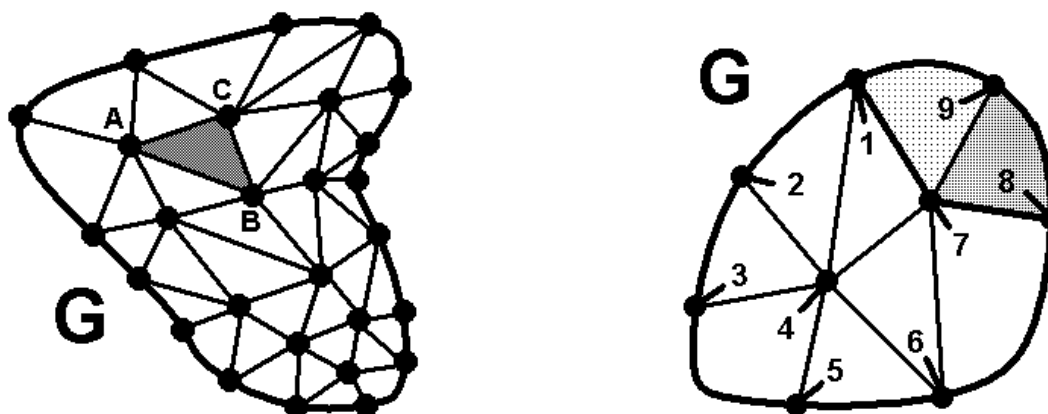
Konsequenz:

Das System $\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0$, $k = 1, \dots, n$ ist ein lineares Gleichungssystem in den c_k . Wir haben hier n Gleichungen und n Unbekannte. In der Regel können wir ein solches Gleichungssystem mit Hilfe einer entsprechend grossen Matrix schreiben.

Nun ist noch die Frage zu klären, wie eine etwaige Basis $\{u_k \mid k = 0, \dots, n\}$ konstruiert werden soll und ob die zu erwartende grosse Matrix sich allenfalls als Bandmatrix schreiben lässt, was wegen der damit verbundenen vereinfachten Berechnungsmöglichkeiten ja wünschenswert wäre.

Triangulationsmethode, Basiswahl, Komposition der Funktion

Eine mögliche Wahl einer Basis stützen wir auf eine **Triangulation** von G . Unter Triangulation verstehen wir dabei eine Einteilung des Gebiets G in n Dreiecke, wobei jene „Dreiecke“, welche an den Rand stossen, auch eine „krumme Kante“ haben dürfen (siehe Bilder unten). Wir sind dann natürlich bestrebt die Einteilung so fein zu machen, dass diese Ungereimtheit zu keinem grossen Fehler führt.



Wir betrachten im linken Bild das Dreieck $\triangle ABC := \triangle A_k B_k C_k$. In diesem Dreieck definieren wir $u_k(x, y)$ wie folgt:

$$u_{k,\alpha,\beta,\gamma}(x,y) = \begin{cases} \alpha_k x + \beta_k y + \gamma_k & (x,y) \in \triangle ABC \\ 0 & (x,y) \notin \triangle ABC \end{cases}$$

Dabei wählen wir zu jedem k die Koeffizienten $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ auf drei Arten, so dass gilt:

$$\begin{aligned} (A) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,A} : u_{k,A}(B_k) = u_{k,A}(C_k) = 0, \quad u_{k,A}(A_k) = 1, \\ (B) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,B} : u_{k,B}(C_k) = u_{k,B}(A_k) = 0, \quad u_{k,B}(B_k) = 1, \\ (C) \quad & u_{k,\alpha,\beta,\gamma} = u_{k,C} : u_{k,C}(A_k) = u_{k,C}(B_k) = 0, \quad u_{k,C}(C_k) = 1. \end{aligned}$$

Mit $u_{k,A}$, $u_{k,B}$ und $u_{k,C}$ können wir jetzt eine neue Funktion u_k konstruieren, welche in den Eckpunkten A_k, B_k, C_k einsetzbare Werte zulässt. Wir setzen:

$$u_k(x,y) := c_{k,A} \cdot u_{k,A} + c_{k,B} \cdot u_{k,B} + c_{k,C} \cdot u_{k,C}$$

Diese Funktion u_k nimmt ausserhalb des Dreiecks \triangle_k immer den Wert 0 an und innerhalb des Dreiecks sowie auf dem Rande erhalten wir aufgrund der Linearkombination von drei Ebenengleichungen wieder eine Ebenengleichung, welche in den Eckpunkten die eingegebenen Werte $c_{k,A}, c_{k,B}, c_{k,C}$ annimmt. Mit solchen Funktionen können wir G überziehen und so eine Funktion $u = \sum_{k=1}^n u_k(x,y)$ definieren, welche an den Dreiecksrändern nahtlos zusammenschweisst, also stetig und daher integrierbar ist, und für welche in den Eckpunkten die Funktionswerte als Parameter definierbar sind. Unerfasst bleibt hier einzig noch die ungenaue Approximation des Randes, was aber bei vernünftigen Rändern und vernünftigen Randfunktionen $g(x,y)$ kein Problem für unser Integral $E(u)$ mit sich bringt.

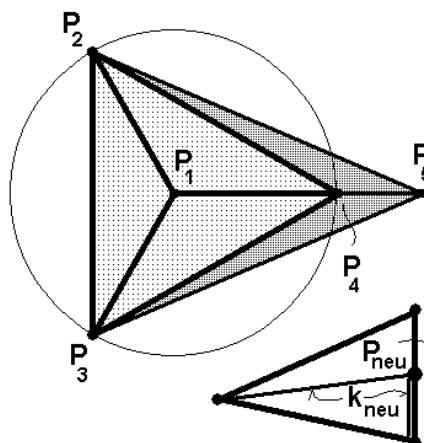
Ein Organisationsproblem entsteht noch infolge möglicher „wilder Triangulationen“. In jedem Dreieck \triangle_k gilt es einen Punkt A_k , einen Punkt B_k und einen Punkt C_k zu bezeichnen. Doch wie soll man dabei vorgehen? Wir wollen darüber kurz nachdenken und erinnern uns zu diesem Zweck an den eulerschen Polyedersatz.

Nach diesem Satz gilt bei einem räumlichen Polyeder die Beziehung $e + f - k = 2$. (e = Eckenzahl, f = Flächenzahl, k = Kantenzahl). Schneidet man ein Polyeder längs einer Kante auf und dehnt es dann in die Ebene aus, so gilt dort wegen dem Duplizieren der Kante beim Aufschneiden: $e + f - (k + 1) = 2 - 1 \Rightarrow e + f - k = 1$. Bei einem regelmässigen n -Eck als Beispiel finden wir aussen n Ecken und bei einer regulären Triangulation noch eine Ecke im Zentrum. Man hat daher $n + 1$ Ecken, $2n$ Kanten und n Flächen. $(n + 1) + n - (2n) = 1$ ist erfüllt. Aber einen eindeutigen unwillkürlichen Bezug zwischen Ecken und Flächen zwecks einfacher Abzählbarkeit lässt sich hier wegen $e \neq f$ nicht stiften.

Hinweis: Wir verwenden hier die Sprache der Graphentheorie. *Ecke* bedeutet ein zu beachtender Zusammenstosspunkt von Kanten, auch Knoten genannt. In einer Ecke stossen bei unserer Triangulation immer mindestens drei Kanten zusammen. (Vgl. Kapitel „Graphentheorie“ im Skript „Diskrete und angewandte Mathematik“ des Autors, zu finden auf <http://rowicus.ch/Wir/Scripts/Scripts.html>, aufgeführt in der Liste unter dem zitierten Link als „Themen aus der diskreten Mathematik“.)

Wählen wir nun eine Triangulation, welche gleich viele Flächen wie Ecken aufweist, so gilt: $2e = k + 1$. Wir wollen eine solche Triangulation hier eine **EGF-Triangulation** nennen. (EGF-Triangulation ist die Abkürzung für „Ecken gleich Flächen-Triangulation“.) Die Kantenzahl muss daher bei einer solchen EGF-Triangulation immer ungerade sein. Solche Triangulationen sind möglich. Im erwähnten rechten Bild oben gilt $k = 17$, $e = f = 9$. Löscht man aber z.B. beim Dreieck mit der Nummer 9 die Aussenkante weg, so bleiben 16 Kanten, 8 Flächen und 9 Ecken. Die notwendige Zuordnungsart der Flächen zu den Ecken ist dann also nicht mehr möglich, da $8 \neq 9$ ist.

Wir wollen nun zeigen, dass der natürlich triangulierte Graph eines regulären n -Ecks mit zentralem Punkt immer zu einer EGF-Triangulation erweitert werden kann. Nebenstehend ist als einfachstes Beispiel ein reguläres Dreieck mit zentralem Punkt gezeigt. Hier ist $e = 4$, $f = 3$ und $k = 6$. Allgemein ist bei einem solchen n -Eck $e = n + 1$, $f = n$ und $k = 2n$, also $e + f - k = n + 1 + n - 2n = 1$. Fügt man nun aussen einen weiteren Punkt P_{n+2} an (in der Skizze P_5), so wird $e = n + 2$. Verbindet man diesen Punkt P_{n+2} mittels drei neuen Kanten mit drei aufeinanderfolgenden Nachbarpunkten wie in der Skizze gezeigt, so entstehen zwei neue Flächen. Dann gilt:



$$e + f - k = (n + 2) + (n + 2) - (2n + 3) = 2n - 2n + 4 - 3 = 1 \Rightarrow e_{\text{neu}} = f_{\text{neu}}$$

Damit können wir hier einen neuen Satz formulieren:

Satz: Die natürliche Triangulation eines regulären und damit auch eines beliebigen konvexen n -Ecks lässt sich durch anfügen eines einzigen äusseren Punktes in eine EGF-Triangulation verwandeln. Es existieren somit unendlich viele EGF-Triangulationen.

Weiter kann man in einem bestehenden Dreieck immer eine neue Ecke in eine bestehende gewählte Kante setzen und dann diese neue Ecke mit der im Dreieck gegenüberliegenden Ecke verbinden. (Siehe Skizze oben, Teilfigur rechts.) Dadurch entsteht ein neuer Graph mit einer Ecke mehr, zwei Kanten mehr und auch einer Fläche mehr. Man hat dann $e + f - k = (e + 1) + (f + 1) - (k + 2) = 1$. Das ergibt einen weiteren Satz:

Satz: Eine EGF-Triangulation kann durch einsetzen einer Ecke in eine bestehende Kante in einem Dreieck und durch verbinden dieser neuen Ecke mit der gegenüberliegenden Ecke des Dreiecks in eine neue EGF-Triangulation verwandelt werden, welche eine Fläche mehr besitzt.

Damit kann man jetzt beliebig EGF-Triangulationen erzeugen.

Bei einer EGF-Triangulation kann man die Flächen und die darauf bezogenen Ecken von 1 bis n durchnummerieren. Zum Dreieck Δ_k gehört so die Ecke P_k , welche wir bezüglich diesem Dreieck A_k nennen. B_k und C_k kann man nun bezüglich Δ_k durch Abzählung nach rechtsdrehendem Umlauf ebenfalls eindeutig definieren. Da eine Ecke immer zu mehreren Dreiecken gehört, bekommt sie so bezüglich jedem anstossenden Dreieck eine andere Nummer. A_9 kann daher in einem bestimmten Fall z.B. durchaus gleich B_4 sein u.s.w.

Schliesslich bekommen wir bei diesem Verfahren eine Funktion $u_{\text{innen}}(x, y) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot u_k(x, y)$, welche in den innern Punkten die Parameterwerte c_k aufweist und auf dem Rande die Werte 0. Diese Funktion überlagern wir mit einer analog konstruierten Funktion $u_0(x, y)$, welche in den Randpunkten die gegebenen Randwerte und in den innern Punkten immer den Wert 0 aufweist. $u(x, y) = u_0(x, y) + u_{\text{innen}}(x, y)$ enthält damit n Parameter c_1, \dots, c_n , welche durch die numerische

Auswertung von $E(u) = \int_G J(x, u, \nabla u) dx dy$ in ein quadratisches Polynom mit n Variablen c_k einfließen. Wir erhalten also die Zuordnung $E(u_A) \rightarrow p_2(c_1, \dots, c_n)$. Daraus bestimmen wir die c_k als Lösung des linearen Gleichungssystems $\frac{\partial E}{\partial c_k} = 0$, $k = 1, \dots, n$.

Beim Lösen des erwähnten Gleichungssystems muss wie erwähnt darauf geachtet werden, dass man die Vorteile von Bandmatrizen ausnutzen kann.

Weitere Methoden

Solange keine praktische Erfahrung mit der Sache der finiten Elemente vorliegt, macht es wenig Sinn, auf das anschnittweise vorgestellte und in diesem Sinne besprochene Verfahren weitere Theorie aufzubauen. An dieser Stelle soll nur noch auf weitere Themenkreise oder Methoden hingewiesen werden:

1. Die Methode des gewichteten Fehlers (Orthogonalisierungsmethode nach Galerkin).
2. Die Kollokationsmethode resp. Methode der kleinsten Quadrate.

8.2.9 Weitere Probleme

Weitere interessante Probleme, welche sich mit Hilfe der Variationsrechnung gut modellieren lassen:

1. Weitere praktisch nützliche Kurvengleichungen
2. Das Doppelpendel
3. Der elektrische Schwingkreis (siehe auch Seite 83)
4. Das Brechungsgesetz (Snellius)
5. Wellenphänomene

Des beschränkten Rahmens wegen verzichten wir hier auf weitere Ausführungen zu diesen Problemen wie auch allgemein auf weitere Ausführungen zur Variationsrechnung. Man konsultiere dazu die einschlägige Literatur oder versuche selbst, eine Lösung zu finden.

Eine Herleitung mit Animation zum Doppelpendel findet man unter

<http://scienceworld.wolfram.com/physics/DoublePendulum.html>

Mit Hilfe der Variationsrechnung gelingt jetzt auch der Einstieg in die heute in der Anwendung sehr weit verbreitete Theorie der **finiten Elemente**, angewandt auf partielle Differentialgleichungen.

Eine ausführliche Darstellung der heute üblichen Verfahren übersteigt jedoch den hier möglichen Rahmen. Der Leser ist gebeten, in dieser Sache wiederum die einschlägige Fachliteratur zu konsultieren.

8.3 Schwingungen und partielle Differentialgleichungen

8.3.1 Die homogene Wellengleichung, Voraussetzungen

Die lineare partielle Differentialgleichung 2. Ordnung

$$c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = v(x_1, x_2, \dots, x_N, t)$$

trägt in der Physik den Namen **Wellengleichung**, da ihre Lösungen zur Modellierung der Ausbreitung von Wellen in diversen Gebieten benutzt werden können (Mechanik, Akustik, Elektrodynamik, moderne Physik u.s.w.). Wir wollen diesen Namen hier ebenfalls benutzen. Die Funktion $u = u(x_1, x_2, \dots, x_N, t) := u = u(\vec{x}, t)$ nennen wir für unsere Bedürfnisse kurz **Auslenkung** oder **Amplitude**.

Speziell betrachten wir die **homogene Wellengleichung** auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \text{ oder } \Delta u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = \square u = 0$$

Definition:

$\square := \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ heisst **d'Alembert-Operator** (auch **Quablaoperator** oder **Viereckoperator**).

Voraussetzung:

Das betrachtete Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^N$ soll hier einfach zusammenhängend und beschränkt sein. Wegen den Fraktalen setzen wir noch fest: $\dim(\partial G) = N - 1$. Zur Beschreibung der notwendigen Randbedingungen gehen wir, sofern nicht anders vermerkt, von einer vernünftigen (nicht fraktalen) Zerlegung des Randes in zwei disjunkte Teilmengen aus: $\partial G = M_1 \cup M_2$, $M_1 \cap M_2 = \{\}$. M_1 und M_2 seien dabei stückweise zusammenhängend und glatt. Weiter sei $c \neq 0$.

Auf M_1 gelte die homogene **Dirichlet'sche** Randbedingung: $u(x_1, \dots, x_N, t) = 0$, $(x_1, \dots, x_N) \in \partial G$.

Auf M_2 gelte die **von Neumann'sche** Randbedingung: $\frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$, $(x_1, \dots, x_N) \in \partial G$.

Randbedingungen lassen sich damit **mischen**: $\alpha u(x_1, \dots, x_N, t) + \beta \frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$ mit $u(x_1, \dots, x_N, t) = 0$ auf M_1 und $\frac{\partial u(x_1, \dots, x_N, t)}{\partial \vec{n}} = 0$ auf M_2 .

Daneben muss man natürlich für die Variable t noch Anfangsbedingungen stellen.

8.3.2 Separationsansatz und stehende Welle

Ziel: Wir wollen Lösungen der homogenen Wellengleichung suchen, welche stehende Wellen oder Schwingungen von Punkten aus Kurven, Flächen oder Volumen darstellen. Diese Schwingungen sollen bei praktischen Beispielen verwendet werden können.

Methode: Zur Erreichung des Ziels machen wir den Separationsansatz $u(\vec{x}, t) := U(\vec{x}) \cdot T(t)$. Die so angesetzte Funktion setzen wir in der homogenen Wellengleichung $c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ ein, wodurch wir eine Separation erreichen können:

$$c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 (U(\vec{x}) \cdot T(t))}{\partial x_i^2} = T(t) \cdot c^2 \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 U(\vec{x})}{\partial x_i^2} = T(t) \cdot \Delta U(\vec{x}) = \frac{\partial^2 (U(\vec{x}) \cdot T(t))}{\partial t^2} = U(\vec{x}) \cdot \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2} = U \cdot T''$$

$$\Rightarrow \frac{T''(t)}{T(t)} = c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})} = \text{const.} := \pm \omega^2$$

$\frac{T''(t)}{T(t)}$ ist hier nur noch von t abhängig und $c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})}$ nur noch von \vec{x} . Damit ergeben sich zwei getrennt behandelbare Gleichungen:

$$T''(t) = \pm T(t) \cdot \omega^2 \quad \text{und} \quad c^2 \cdot \Delta U(\vec{x}) = \pm U(\vec{x}) \cdot \omega^2$$

- Wir behandeln zuerst $T''(t) - T(t) \cdot \omega^2 = 0$. Hier kennen wir die Basislösungen $e^{\pm \omega t}$ resp. $\sinh(\omega t)$, $\cosh(\omega t)$. $\leadsto (e^{\pm \omega t})'' = \omega^2 e^{\pm \omega t} \Rightarrow (e^{\pm \omega t})'' - \omega^2 e^{\pm \omega t} = 0$. Problem: Die reelle Exponentialfunktion liefert uns zwar eine Lösung, jedoch keine Schwingung. Wir erhalten bloss eine monotone Funktion, die entweder mit der Zeit t über alle Massen wächst oder sich gedämpft asymptotisch der t -Achse annähert. Diese Lösung dürfen wir daher für den Zweck der Beschreibung von Schwingungen **verwerfen**.
- $T''(t) + T(t) \cdot \omega^2 = 0$. Hier kennen wir die Basislösungen ebenfalls: $e^{\pm i \omega t}$ resp. $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$.

Wir machen den Ansatz: $T(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t) = \tilde{A} e^{i \omega t} + \tilde{B} e^{-i \omega t}$.
 $\Rightarrow T(t)'' = -\omega^2 A \sin(\omega t) - \omega^2 B \cos(\omega t) = -\omega^2 T(t) \Rightarrow T(t)'' = -\omega^2 T(t)$.

Hier erhalten wir mit \sin und \cos eine Schwingung. Damit ergibt sich:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\omega^2 = c^2 \cdot \frac{\Delta U(\vec{x})}{U(\vec{x})} \Rightarrow c^2 \Delta U + \omega^2 U = 0 \Rightarrow \Delta U + \frac{\omega^2}{c^2} U = 0$$

Die partielle Differentialgleichung für $U(\vec{x})$ trägt in der Physik oder der Elektrotechnik auch den Namen **Helmholtz-Gleichung**.

Wir setzen: $\frac{\omega^2}{c^2} = \lambda > 0 \leadsto \omega = c \cdot \sqrt{\lambda}$. (ein eventuelles Vorzeichen ist in c enthalten.)

Damit können wir zusammenfassen:

Resultat:

Die gefundenen Lösungen der Wellengleichung $(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2})(u) = 0$, welche auf „Schwingungen“ führen, sind durch Funktionen der Form $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$ gegeben.

Da $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t)$ durch $T(t) = A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)$ zeitlich gestreckt wird, haben wir eine **stehende Welle** vor uns. $U_\lambda(\vec{x})$ ist dabei Lösung der **Helmholtz-Gleichung** $\Delta U_\lambda + \lambda U_\lambda = 0$.

Die Lösungen von $U_\lambda(\vec{x}) = 0$ heissen **Knoten, Knotenlinien, Knotenflächen** u.s.w.

8.3.3 Schwingung eines dünnen Balkens

Wir betrachten einen beidseitig eingespannten **dünnen Balken**, den wir vereinfacht als eine **Saite** verstehen können. Dabei soll die Form des Querschnitts vernachlässigbar sein. Damit haben wir räumlich ein 1-dimensionales Problem vor uns. In der Physik wird dafür folgendes Modell erarbeitet:

$$u_{tt} = c \cdot u_{xx} = c \Delta(u), \quad u(0, t) = u(x_L, t) = 0 \quad (\partial G), \quad t \geq 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, x_L]$$

Dabei schreiben wir kurz: $u_{tt}'' := u_{tt}$, $u_{xx}'' := u_{xx}$. f und g sind gegebene Funktionen.

Weiter ist $c^2 = \frac{\sigma}{\rho}$. σ bedeutet die Spannung, ρ die Längendichte (Masse pro Länge).

Wir wissen: $u(\vec{x}, t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot T(t) = U_\lambda(\vec{x}) \cdot (A \sin(\omega(t)) + B \cos(\omega(t))), \quad (U_\lambda)_{xx} + \lambda \cdot U_\lambda = 0$.

Hier gilt es nun, die Helmholtz-Gleichung $(U_\lambda)_{xx} + \lambda \cdot U_\lambda = 0$ unter Berücksichtigung der homogenen Randbedingungen zu lösen, wobei wir die dazu möglichen Basisfunktionen wiederum kennen. Wegen den homogenen Randbedingungen kommen wiederum keine Exponentialfunktionen resp. der Sinus- und Cosinus hyperbolicus-Funktionen in Betracht, wie man sich sofort durch Nachrechnung überzeugt. Damit bleibt als Kandidatenmenge die parametrisierte Linearkombination:

$$U_\lambda(x) = \alpha \cos(\sqrt{\lambda}x) + \beta \sin(\sqrt{\lambda}x), \quad \lambda > 0$$

Die Randbedingungen ergeben:

$$0 = U_\lambda(0) = \alpha \Rightarrow \alpha = 0, \quad U_\lambda(x_L) = \beta \sin(\sqrt{\lambda}x_L) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} \cdot x_L = k \cdot \pi \neq 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N}.$$

(k kann keine negativen Werte tragen, denn es gilt $\sqrt{\lambda}, x_L, \pi > 0$.)

Mit der Helmholtz-Gleichung ist ein **Eigenwertproblem** gegeben. Die Eigenwerte und Eigenfunktionen sind somit:

$$\lambda_k = \frac{k^2 \pi^2}{x_L^2}, \quad U_k(x) = \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right), \quad k \in \mathbb{N}$$

Mit $\omega = c \cdot \sqrt{\lambda} = c \cdot \frac{k \pi}{x_L}$ erhalten wir als Basisfunktionen der Schwingungsgleichung des dünnen Balkens:

$$u_k(x, t) = U_k(x) \cdot T_k(t) = \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right) + B \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right) \right)$$

Für $k = 1$ ergibt sich so die **Grundschiwingung**, für $k = 2$ die **1. Oberschiwingung** u.s.w.

Da die Helmholtz-Gleichung $u_{tt} = c u_{xx}$ eine homogene Gleichung ist, können wir auf die obigen Basisfunktionen das Superpositionsprinzip anwenden um die Anfangsbedingungen zu erfüllen.

$$\Rightarrow u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A_k \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} t\right) \right)$$

$$\Rightarrow f(x) = u(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \underbrace{\left(A_k \sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right) \right)}_{=0} = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \cdot B_k$$

$$g(x) = u_t(x, 0) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin\left(\frac{k \pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A_k \frac{c \cdot k \pi}{x_L} \underbrace{\cos\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right)}_{=1} + B_k \left(-\frac{c \cdot k \pi}{x_L}\right) \underbrace{\sin\left(\frac{c \cdot k \pi}{x_L} 0\right)}_{=0} \right)$$

Damit haben wir:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right), \quad g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \frac{c \cdot k\pi}{x_L} \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right)$$

Jetzt sind die Funktionen f und g als Fourierreihen erkannt. Speziell in diesem Beispiel sind es Sinusreihen. A_k und B_k können daher mit Hilfe der Fourierkoeffizienten berechnet werden:

$$A_k = \frac{2}{c k \pi} \int_0^{x_L} g(x) \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} x\right) dx, \quad B_k = \frac{2}{x_L} \int_0^{x_L} f(x) \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} x\right) dx$$

Diese Fourierkoeffizienten kann man bei geeigneten gegebenen Funktionen f und g damit bis zu einem gewissen $k = m$ berechnen und damit die gesuchte Lösung approximieren:

$$u_{approx}(x, t) = \sum_{k=1}^m \sin\left(\frac{k\pi}{x_L} \cdot x\right) \left(A_k \sin\left(\frac{c \cdot k\pi}{x_L} t\right) + B_k \cos\left(\frac{c \cdot k\pi}{x_L} t\right) \right)$$

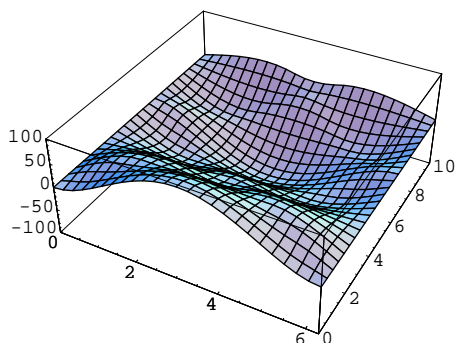
Beispiel

Seien $c = 1$, $x_L = 2\pi$, $f(x) = x^2(x - 2\pi)^2$, $g(x) = -\frac{x^7}{645120} + \frac{x^5}{3840} - \frac{x^3}{48} + \frac{x}{2}$, $m = 17$

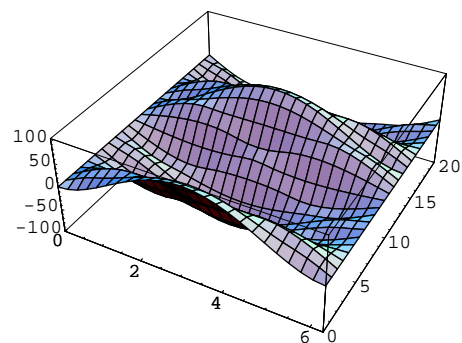
Input: (*Mathematica*)

```
Remove["Global' *"];
c=1; xL=2 Pi; f[x_]:= x^2 (x-2 Pi)^2;
g[x_]:=x/2 - x^3/48 + x^5/3840 - x^7/645120; m=17;
A[k_]:= 2/(c k Pi) Integrate[g[x] Sin[k Pi x/xL],{x,0,xL}]/N//Chop;
B[k_]:= 2/xL Integrate[f[x] Sin[k Pi x/xL],{x,0,xL}]/N//Chop;
tab1 = Table[{A[k]//Chop,B[k]//Chop},{k,1,m}];
AA[k_]:=tab1[[k]][[1]]; BB[k_]:=tab1[[k]][[2]];
uApprox[x_,t_,m_]:= Sum[Sin[k Pi x/xL] (AA[k] Sin[c k Pi t/xL]
+BB[k] Cos[c k Pi t/xL]),{k,1,m}];
Plot3D[uApprox[x,t,m],{x,0,xL},{t,0,20}]
```

Output:



Plot für $t = 10$



Plot für $t = 20$

Die weitere praktische Durchführung dieses Unterfangens soll in den Übungen erledigt werden.

8.3.4 Die schwingende dünne Platte

Eine dünne Platte soll hier als vereinfachtes Modell einer Bodenplatte, einer Decke, einer Wand oder einer in der Technik genutzten Membran dienen. Man denke etwa an die Membran einer Trommel. Aus dem Grunde der in der Technik bei Bodenplatten am häufigsten vorkommenden Rechtecksform wollen wir uns beim theoretischen Studium auf **rechteckige Platten** beschränken. Für andere Formen muss die Herleitung entsprechend angepasst werden. Weiter können wir das auf Seite 269 gefundene Resultat betreffend der stehenden Wellen und der Helmholtz-Gleichung verwenden.

Sei also:

$$G = I_x \times I_y = [0, a] \times [0, b], \quad x \in I_x = [0, a], \quad y \in I_y = [0, b], \quad u(x, y, t) = U_\lambda(x, y) \cdot (A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t))$$

$u_\lambda(x, y)$ erfüllt das Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \Delta U_\lambda(x, y) + \lambda U_\lambda(x, y) &= 0, & (x, y) \in G \\ U_\lambda(x, y) &= 0, & (x, y) \in \partial G \\ U_\lambda(0, y) = U_\lambda(a, y) &= 0, & x \in I_x \\ U_\lambda(x, 0) = U_\lambda(x, b) &= 0, & y \in I_y \end{aligned}$$

Separationsansatz:

$$U(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \Rightarrow \Delta U_\lambda + \lambda \cdot U_\lambda = \Delta (X(x) \cdot Y(y)) + \lambda \cdot (X(x) \cdot Y(y)) = X_{xx} \cdot Y + X \cdot Y_{yy} + \lambda \cdot X \cdot Y = 0$$

Wenn wir die letzte Gleichung mit $X \cdot Y$ kürzen, erhalten wir eine Separation:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \frac{Y_{yy}}{Y} + \lambda = 0 \Rightarrow \frac{X_{xx}}{X} + \lambda = -\frac{Y_{yy}}{Y} := \pm \mu^2$$

Man beachte, dass in $\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = -\frac{Y_{yy}}{Y}$ die linke Seite nur von x und die rechte Seite nur von y abhängig ist. Beide Seiten müssen für sich also konstant sein ($= \pm \mu^2 \rightsquigarrow$ Separation). Daher müssen hier also zwei Gleichungen bestehen:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = \pm \mu^2, \quad -\frac{Y_{yy}}{Y} = \pm \mu^2$$

- Der Fall „-“: Da wir die Basislösungen kennen, können wir den Fall $Y(y) = e^{\pm \mu y}$ resp. $Y(y) = A \sinh(\pm \mu y) + B \cosh(\pm \mu y)$ ausschließen, denn sonst würde folgen:
 $-\frac{Y_{yy}}{Y} = -\mu^2 \Rightarrow \frac{Y_{yy}}{Y} = \mu^2$ ist gültig, wie die Nachkontrolle zeigt. Jedoch funktioniert dies mit unseren Randbedingungen nicht:
 $U(x, 0) = 0 = X(x) \cdot Y(0) = X(x) \cdot (A \sinh(\pm \mu \cdot 0) + B \cosh(\pm \mu \cdot 0)) = X(x) \cdot (A \cdot 0 + B \cdot 1)$
 $\Rightarrow 0 = X(x) \cdot B \Rightarrow B = 0$, da ja $X(x) \not\equiv 0$ sein muss (sonst wäre $u(x, y) \equiv 0$).
 $\Rightarrow U(x, b) = X(x) \cdot A \cdot \sinh(\pm \mu \cdot b) = 0 \Rightarrow A \cdot \sinh(\pm \mu b) = 0 \Rightarrow A = 0$ oder $\mu = 0$.
Das aber würde wiederum zu $U(x, y) = 0$ führen: Widerspruch!

Daher können wir den Fall „-“ wegstreichen.

- Es bleibt noch der Fall „+“: $-\frac{Y_{yy}}{Y} = +\mu^2 \Rightarrow Y_{yy} + \mu^2 Y = 0$. Hier kennen wir wiederum die Basislösungen $\sin(\mu y)$ und $\cos(\mu y) \rightsquigarrow Y(y) = A \sin(\mu y) + B \cos(\mu y)$.

Ein etwaiges Vorzeichen von μ spielt beim Cosinus wegen der Symmetrie keine Rolle. Beim Sinus könnte man ein solches in den Koeffizienten A „verpacken“. Einsetzen der Randbedingungen ergibt nun:

$$\begin{aligned} Y(0) = 0 &= A \sin(0) + B \cos(0) = A \cdot 0 + B \cdot 1 = B \Rightarrow B = 0, \\ Y(b) = 0 &= A \cdot \sin(\mu b) + 0 \cdot \cos(\mu b) = A \sin(\mu b) \Rightarrow \mu b = n\pi \Rightarrow \mu = \frac{n\pi}{b}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Eine Forderung $n \in \mathbb{Z}$ ist nicht notwendig, denn das Vorzeichen von n lässt sich in A „verpacken“. Zudem fällt $n = 0$ weg, da dies nur zur Nulllösung führen würde.

$$\leadsto \mu_n^2 = \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \text{ ist } \mathbf{Eigenwert} \text{ und } s_n(y) = \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right) \text{ ist } \mathbf{Eigenfunktion} \text{ von } Y_{yy} + \mu^2 Y = 0.$$

Zudem gilt im Falle „+“:

$$\frac{X_{xx}}{X} + \lambda = +\mu^2 = +\frac{n^2 \pi^2}{b^2} \Rightarrow X_{xx} + \left(\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) X = 0$$

Hier muss wiederum $\left(\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) > 0$ gelten, ansonst wir Exponentialfunktionen resp. hyperbolische Funktionen als Lösungen erhalten würden, mit denen die Randbedingungen bei $x = 0$ und bei $x = a$ nicht erfüllbar wären, wie man sofort nachkontrolliert. Daher bleiben als Basislösungen für $X(x)$ nur noch sin und cos:

$$X(x) = A \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} x\right) + B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} x\right)$$

Die Randbedingungen bewirken:

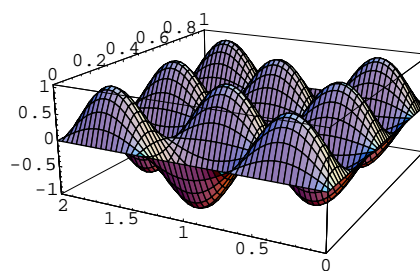
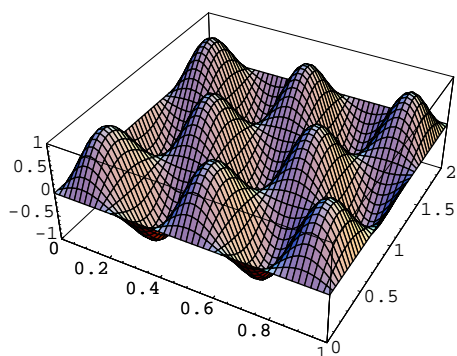
$$\begin{aligned} x = 0 &\Rightarrow X(0) = 0 = A \cos(0) + B \sin(0) = A \Rightarrow A = 0, \\ x = a &\Rightarrow X(a) = 0 = 0 \cdot \cos\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right) + B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right) = B \sin\left(\sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} a\right), \\ &\Rightarrow \sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} \cdot a = m \cdot \pi \text{ mit } a > 0, \quad \sqrt{\lambda - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}} > 0 \Rightarrow m \in \mathbb{N} \Rightarrow \lambda = \frac{m^2 \cdot \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \cdot \pi^2}{b^2} \end{aligned}$$

Damit kennen wir die Eigenwerte und die Eigenfunktionen von $X_{xx} + \left(\lambda_n - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) X = 0$:

$$\lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right) \quad \left(\lambda_{m,n} - \frac{n^2 \pi^2}{b^2}\right) = \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad X_m = \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right)$$

$$U_{m,n}(x, y) = X_m(x) \cdot Y_n(y) = \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \underbrace{\sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right)}_{=s_n}$$

Für den Fall $a = 1$, $b = 2$, $n = 3$, $m = 4$ zeigt das Bild von $U_{m,n}(x, y)$ eine Eierschachtel wie in den nachstehenden Figuren wiedergegeben. Anschliessend ist der *Mathematica-Code* zu finden.



Code:

```
a=1; b=2; n=3; m=5;
f[x_,y_]:=Sin[m Pi/a x] Sin[n Pi/b y];
Plot3D[f[x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotPoints->50];
Plot3D[f[x,y],{x,0,a},{y,0,b},PlotPoints->50,ViewPoint->{-2.648,-1.364,0.972}];
```

$U(x, y, t)$ erhalten wir jetzt wie gewohnt durch Superposition, indem wir die Anfangsbedingungen erfüllen. Denn wir sind ja von einer homogenen Gleichung, der Helmholtz-Gleichung $\Delta u_\lambda(x, y) + \lambda \cdot u_\lambda(x, y) = 0$, ausgegangen. Mit den „Zutaten“ erhalten wir:

$$\Rightarrow u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right)}_{=U_{m,n}(x,y)} \cdot \underbrace{(A_{m,n} \sin(\omega_{m,n} t) + B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} t))}_{=T_{m,n}(t), \text{ siehe Seite 269}}$$

$$\omega = c \cdot \sqrt{\lambda} \Rightarrow \omega_{m,n} = c \cdot \sqrt{\lambda_{m,n}}, \quad \lambda_{m,n} = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right), \quad c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

Nun befassen wir uns noch mit den Anfangsbedingungen: $u(x, y, 0) = f(x, y)$, $u_t(x, y, 0) = g(x, y)$.

Beispiel:

Wir nehmen als Beispiel einmal an, dass sich $u(x, y, t)$ beim Start zeitlich noch nicht so sehr ändert, d.h. dass gilt: $g(x, y) \equiv 0$. Dann erhalten wir:

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (A_{m,n} \sin(\omega_{m,n} \cdot t) + B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot 0)) \\ \Rightarrow u_t(x, y, 0) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (A_{m,n} \cdot \omega_{m,n} \cdot \underbrace{\cos(\omega_{m,n} \cdot 0)}_{=1} - B_{m,n} \cdot \omega_{m,n} \cdot \underbrace{\sin(\omega_{m,n} \cdot 0)}_{=0}) \\ \Rightarrow u_t(x, y, 0) &= \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot A_{m,n} \cdot \omega_{m,n} = g(x, y) \equiv 0 \Rightarrow A_{m,n} = 0 \end{aligned}$$

Denn eine Sinusreihe ist nur dann identisch 0, wenn alle Koeffizienten 0 sind.

Da zudem $\omega_{m,n} = c \cdot \sqrt{\lambda_{m,n}} = c \cdot \sqrt{\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)} = c \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \neq 0$ gilt, muss $A_{m,n} = 0$ sein.

$$\Rightarrow u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot (B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot t))$$

$$\Rightarrow u(x, y, 0) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \underbrace{(B_{m,n} \cos(\omega_{m,n} \cdot 0))}_{=1} = f(x, y)$$

Somit ist wegen (*) $f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot B_{m,n}$ eine Fourierreihe (Sinusreihe) in x und in y . Wir können daher versuchen, die Fourierkoeffizienten zu berechnen. Dazu machen wir den Ansatz:

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n}(y) \cdot \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right)$$

Daraus können wir folgern: $B_m(y) = \frac{2}{a} \int_0^a f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) dx$.

$B_m(y)$ ist wegen (*) wieder eine Sinusreihe in y : $B_m(y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_{m,n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right)$.

Daraus folgt: $B_{m,n} = \frac{2}{b} \int_0^b B_m(y) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy dx$ sowie

$$f(x, y) = \sum_{m,n=1}^{\infty} B_{m,n} \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right).$$

Damit lassen sich die Fourierkoeffizienten und damit $u(x, y, t)$ approximieren:

$$u(x, y, t) = \sum_{m,n=1}^N \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) \cdot \left(\frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b f(x, y) \sin\left(\frac{m\pi}{a} \cdot x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} \cdot y\right) dy dx \right) \cos(c \cdot \pi \cdot \sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}} \cdot t)$$

Beispiel

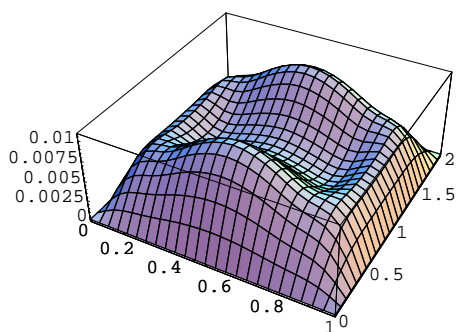
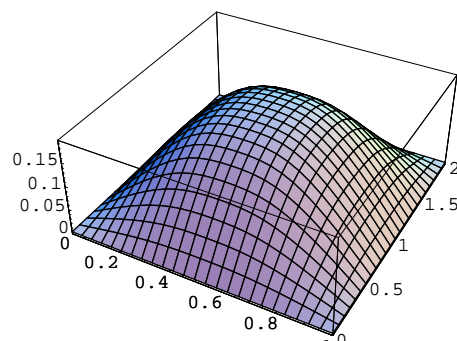
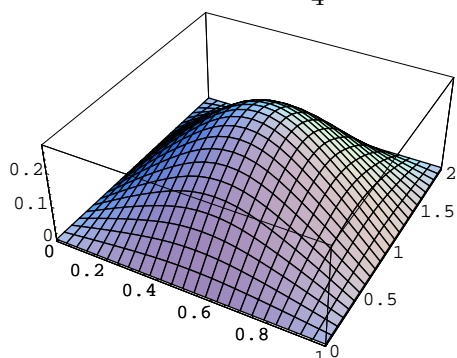
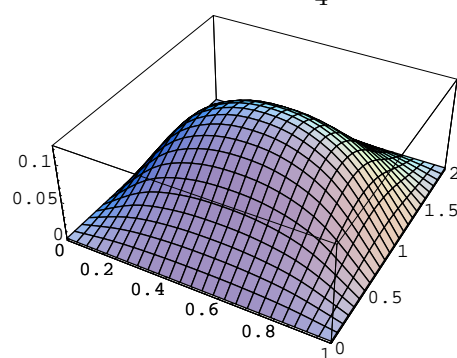
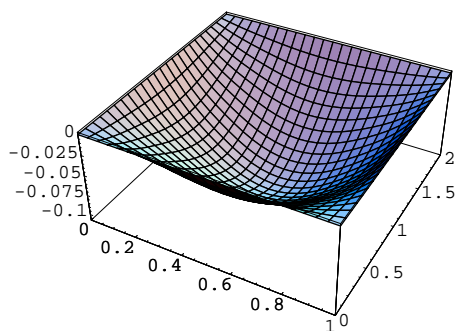
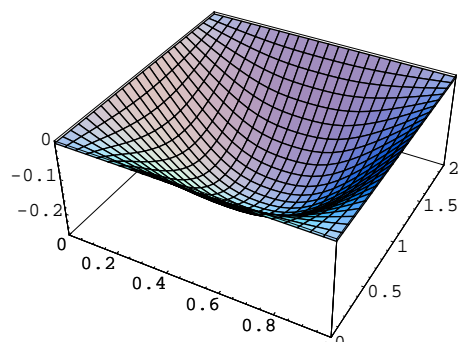
Seien $c = 1$, $a = 1$, $b = 2$, $f(x) = x(x-a)y(y-b)$, $g(x) = 0$, $mm = 9$, $nn = 9$. Die Parameter mm und nn bedeuten die maximalen Werte für die Indices m und n .

Input: (Mathematica)

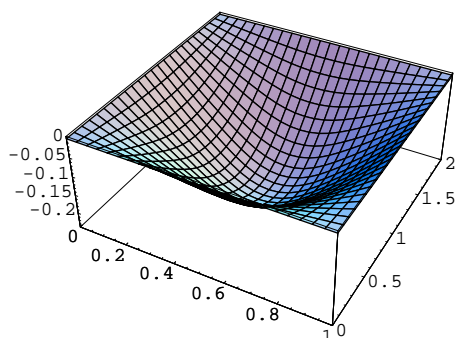
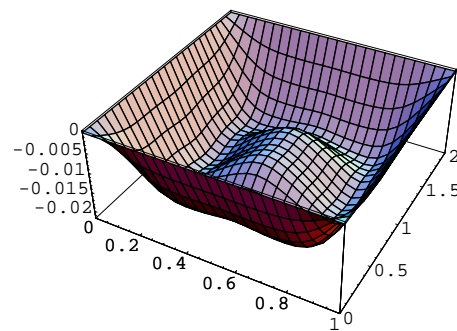
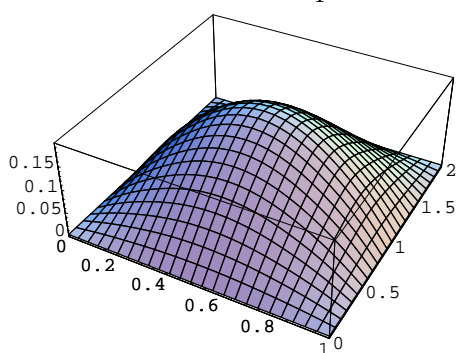
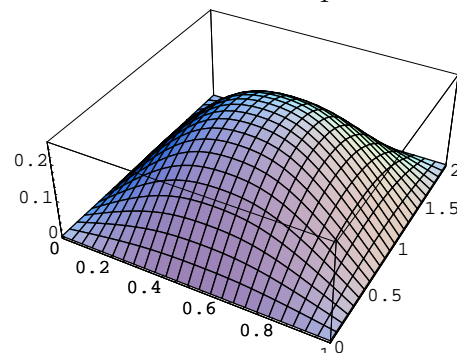
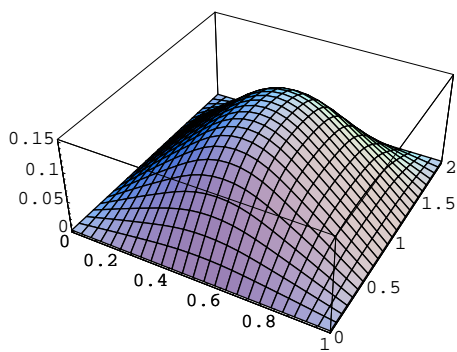
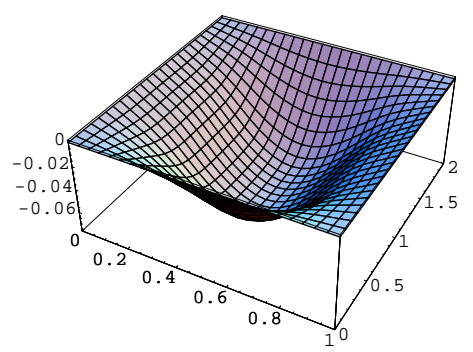
```
Remove["Global`*"];
c=1; a=1; b=2; f[x_,y_]:=x(x-a)y(y-b); g[x_]:=0; mm=9; nn=9;
A[m_,n_]:=4/(a b) Integrate[f[x,y] Sin[m Pi x/a] Sin[n Pi y/b],
  {x,0,a},{y,0,b}]/N//Chop;
tab1 = Table[A[m,n],{m,1,mm},{n,1,nn}];
AA[m_,n_]:=tab1[[m]][[n]];
tab2 = Table[AA[m,n],{m,1,mm},{n,1,nn}];
uApprox[x_,y_,t_,mm_,nn_]:=Sum[Sin[m Pi x/a] Sin[n Pi y/b] AA[m,n]
  * Cos[c Pi t Sqrt[(m^2)/(a^2)+(n^2)/(b^2)]],{m,1,mm},{n,1,nn}];
Table[p[t]=Plot3D[uApprox[x,y,t/4+Pi,mm,nn],{x,0,a},{y,0,b},{t,0,11}];
```

Output:

Nachstehend sind die Schwingungszustände für $t = \pi, \pi + \frac{1}{4}, \pi + \frac{2}{4}, \dots, \pi + \frac{11}{4}$ wiedergegeben.

Plot für $t = \pi + \frac{0}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{1}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{2}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{3}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{4}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{5}{4}$

Um mehr zu sehen, müsste man eine grössere Anzahl Bilder bei einer kleineren zeitlichen Distanz plotten und damit eine Animation herstellen. Es ist leider aus verständlichen Gründen nicht möglich, dies auf Papier wiederzugeben. Ein interessantes Phänomen wird jedoch auch schon hier sichtbar: Die zwischendurch auftretende Delle (Beule nach innen), welche aber sogleich wieder verschwindet. Weil ich diese Beule nicht erwartet habe, nenne ich sie scherzhalber die **Überraschungsbeule**.

Plot für $t = \pi + \frac{6}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{7}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{8}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{9}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{10}{4}$ Plot für $t = \pi + \frac{11}{4}$

Für weitere praktische Rechnungen sei hier auf die Übungen verwiesen.

8.3.5 Ausblick über Eigenwerte und Eigenfunktionen

Ohne Beweis sei noch auf einen allgemeinen Sachverhalt betreffend Helmholtzgleichung $\Delta u + \lambda u = 0$ und ihre Eigenwerte und Eigenfunktionen verwiesen.

Sei $\Delta u + \lambda u = 0$ in G , $u = 0$ auf $M_1 \subset \partial G$ und $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}} = 0$ auf $M_2 \subset \partial G$. Dann gilt:

Satz:

1. Für die Eigenwerte ist $0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \rightarrow \infty$.
Für $M_1 \neq \{\}$ findet man $0 < \lambda_1$. Sonst gilt $0 = \lambda_1$.
2. Zu λ_k existieren höchstens endlich viele linear unabhängige Eigenfunktionen (Basis). Jede Eigenfunktion zu λ_k ist Linearkombination der Basis.
3. Für $\lambda_k \neq \lambda_j$ ist $u_k \perp u_j$, d.h. es gilt $\int_G u_k u_j dG = 0$.
4. Jede Funktion auf G lässt sich in der Basis der u_k in eine Reihe entwickeln:

$$f(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k(\vec{x}), \quad \{\vec{x} \mid k \in \mathbb{N}\} \text{ orthonormiert}, \quad c_k = \int_G f(\vec{x}) \cdot u_k(\vec{x}) dG$$

8.4 Fouriertransformationen und partielle Diff'gleichungen

8.4.1 Entwicklung der Methode an einem Beispiel

Bsp.: Wir studieren das Beispiel einer einfachen Wellengleichung mit nur einer Ortsvariablen. Sei dabei $|u(x, t)|$ beschränkt und $t \in \mathbb{R}_0^+$:

$$\begin{aligned} c^2 u''_{xx} - u''_{tt} &= 0 & x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_0^+ \\ u(x, 0) &= f(x) & x \in \mathbb{R}, (ABD) \\ u'_t(x, 0) &= g(x) & x \in \mathbb{R}, (ABD) \end{aligned}$$

Wir machen den Separationsansatz: $u(x, t) = X(x) \cdot T(t)$. Daraus folgt:

$$X \cdot T''_{tt} = c^2 \cdot X''_{xx} \cdot T \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot X \cdot T''_{tt} = X''_{xx} \cdot T \Rightarrow \frac{1}{c^2} \cdot \frac{T''_{tt}}{T} = \frac{X''_{xx}}{X} := \pm \lambda^2, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Da die linke und die rechte Seite der letzten Gleichung von verschiedenen Variablen abhängen, erhalten wir daraus zwei separate Gleichungen. Jeweils der linke Ausdruck ist gleich $\pm \lambda^2$. \rightsquigarrow

$$T''_{tt} = \pm \lambda^2 c^2 T \quad \text{und} \quad X''_{xx} = \pm \lambda^2 \cdot X$$

Je nach „+“ oder „-“ erhalten wir damit die Lösungspaare:

$$T = C_1 \cdot e^{\pm \lambda c t}, \quad X = C_2 \cdot e^{\pm \lambda x} \quad \text{und} \quad T = A \cdot e^{\pm i \lambda c t}, \quad X = B \cdot e^{\pm i \lambda x}$$

Das ergibt die folgenden Kombinationen:

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= C_1 \cdot e^{i \lambda(x - ct)} \\ u_2(x, y) &= C_2 \cdot e^{i \lambda(x + ct)} \\ u_3(x, y) &= C_3 \cdot e^{-i \lambda(x - ct)} \\ u_4(x, y) &= C_4 \cdot e^{-i \lambda(x + ct)} \end{aligned}$$

Diese vier Funktionen lassen sich trigonometrisch als Linearkombinationen von $\cos(\pm\lambda(x+ct)) = \cos(\lambda(x+ct))$ und $\cos(\pm\lambda(x-ct)) = \cos(\lambda(x-ct))$ sowie $i \sin(\pm\lambda(x+ct)) = \pm i \sin(\lambda(x+ct))$ und $i \sin(\pm\lambda(x-ct)) = \pm i \sin(\lambda(x-ct))$ linear zusammensetzen. Dafür genügt aber schon die Basis $\{\cos(\lambda(x+ct)), \cos(\lambda(x-ct)), i \sin(\lambda(x+ct)), i \sin(\lambda(x-ct))\}$. Diese Basis lässt sich, wie man leicht sieht, aus $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ gewinnen, womit $u_1(x, y)$ und $u_2(x, y)$ als Basislösungen genügen. Damit ist bei gegebenen λ die folgende Funktion $u_\lambda(x, t)$ eine Lösung:

$$u_\lambda(x, t) = C_1(\lambda) \cdot e^{i\lambda(x-ct)} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda(x+ct)} = e^{i\lambda x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct})$$

Wir definieren nun:

$$l := \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \nu := \frac{c}{l}, \quad \omega = 2\pi\nu \Rightarrow \frac{\omega}{2\pi} = \nu = \frac{c}{l} = \frac{c\lambda}{2\pi} \Rightarrow \lambda c = \omega$$

Damit wird:

$$u_\lambda(x, t) = e^{i\lambda x} \cdot (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\omega t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\omega t})$$

Nun gilt für $c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ das „Superpositionsprinzip“: Zu zwei Lösungen $u_{\lambda_1}(x, t)$ und $u_{\lambda_2}(x, t)$ ist auch jede Linearkombination $\alpha u_{\lambda_1}(x, t) + \beta u_{\lambda_2}(x, t)$ Lösung. Speziell ist also $u_{\lambda_1}(x, t) + u_{\lambda_2}(x, t)$ eine Lösung. Da für λ einzig die Forderung $\lambda \in \mathbb{R}$ gemacht worden ist, kann λ nicht als diskreter Summationsindex angenommen werden. Statt von einer Summenlösung mit beliebig vielen Summanden müssen wir daher von einer Integrallösung als „Superposition“ ausgehen:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\omega t} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\omega t}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

Dabei erhalten wir als Anfangsbedingungen für $t = 0$ die Anfangsintegrale:

$$u(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = f(x) \quad \text{und}$$

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = g(x)$$

Diese Integrale erkennen wir aber als die **Fourier-Rücktransformierten** von $v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$ und von $w(\lambda) := i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda))$. Daher sind $v(\lambda)$ und $w(\lambda)$ die **Fourier-Transformierten** von $f(x)$ und $g(x)$.

Dazu kennen wir die Formeln:

$$v(\lambda) := (C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

$$w(\lambda) := i\lambda c (-C_1(\lambda) + C_2(\lambda)) = \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

$$\Rightarrow C_1(\lambda) = \frac{1}{2} \left(v(\lambda) - \frac{w(\lambda)}{i\lambda c} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right), \quad C_2(\lambda) = \frac{1}{2} \left(v(\lambda) + \frac{w(\lambda)}{i\lambda c} \right) = \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right)$$

$$\Rightarrow u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} (C_1(\lambda) \cdot e^{-i\lambda ct} + C_2(\lambda) \cdot e^{i\lambda ct}) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) - \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right) \right) \cdot e^{-i\lambda ct} + \frac{1}{2} \left(\hat{f}(\lambda) + \frac{\hat{g}(\lambda)}{i\lambda c} \right) \cdot e^{i\lambda ct} \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\hat{f}}{2} (e^{-i\lambda ct} + e^{i\lambda ct}) - \frac{1}{\lambda c} \frac{\hat{g}}{2i} (e^{-i\lambda ct} - e^{i\lambda ct}) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f} \cos(\lambda ct) - \frac{1}{\lambda c} \hat{g} \sin(\lambda ct) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda$$

Folgerung: Damit erhalten wir die folgende **Lösung** von $c^2 u''_{xx} - u''_{tt} = 0$ und obigen Anf'bed.:

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\hat{f}(\lambda) \cos(\lambda ct) - \frac{1}{\lambda c} \hat{g}(\lambda) \sin(\lambda ct) \right) \cdot e^{i\lambda x} d\lambda \quad \text{mit}$$

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx, \quad \hat{g}(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot e^{-i\lambda x} dx$$

8.4.2 Beispiel einer konkreten Anwendung

Bsp.: Sei $c = 1$ und $f(x) = 1, x \in [-1, 1], f(x) = 0$ sonst. Sei $g(x) = 0$. Damit ergibt sich:

$$\hat{f}(\lambda) = \frac{\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(\lambda)}{\lambda}, \quad \hat{g}(\lambda) = 0.$$

Z.B. für die Werte $x = 1$ und $t = 1$ erhält man mit der Formel für $u(x, t)$ den Wert $u(1, 1) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. $u(x, t)$ kann also jetzt berechnet werden.

8.5 Zur Idee der Greenschen Funktion

8.5.1 Einführung und Begriff

Sei B jetzt ein Gebiet im \mathbb{R}^n , ∂B vernünftig. Sei $P_0 \in B, P, P_k \in \bar{B}, \bar{b} = B \cup \partial B$.

Der Einfachheit halber verwenden wir hier als Bezeichnungen für die Punkte P_k die bisher für die gewöhnlichen eindimensionalen Variablen verwendeten Buchstaben: $x = P, x_k = P_k, z = P_0$. Damit können wir schreiben:

Definition: Eine Funktion $G_z : B \setminus \{z\} \mapsto \mathbb{R}$ heisst **Greensche Funktion** des Laplace-Operators $\Delta \Leftrightarrow$

1. $\forall z \in B, x \in \partial B \lim_{x_n \rightarrow x} G_z(x_n) = 0$
2. $\forall z \in B \Delta G_z(x) = \delta(z)$ ($\delta = \text{Dirac-Distribution}$)

Sei nun die „Testfunktion“ $\varphi(x)$ eine vernünftige (genügend oft diff'bare u.s.w.) Funktion mit $\varphi(x) = 0$ auf ∂B . Dann gilt für das Skalarprodukt nach der Greenschen Formel:

$$\langle \Delta G_z(x), \varphi(x) \rangle = \int_B G_z(x) \cdot \Delta \varphi(x) dB = \underbrace{\int_B \underbrace{\Delta G_z(x)}_{\delta(z)} \cdot \varphi(x) dB}_{\varphi(z)} + \int_{\partial B} \underbrace{G_z(x)}_{=0} \frac{\partial \varphi(x)}{\partial \vec{n}} d\sigma - \int_{\partial B} \frac{\partial G_z(x)}{\partial \vec{n}} \underbrace{\varphi(x)}_{=0} d\sigma$$

$$\Rightarrow \int_B G_z(x) \cdot \Delta \varphi(x) dB = \varphi(z), \quad \Delta \varphi(x) = f(x) \Rightarrow \int_B G_z(x) \cdot f(x) dB = \varphi(z)$$

Damit erhalten wir den folgenden Satz:

Satz: Das Dirichlet–Problem $\Delta u(x) = f(x)$ in B , $u(x) = 0$ auf ∂B wird durch die Greensche Funktion gelöst wie folgt:

$$u(z) = \int_B G_z(x) \cdot f(x) dx \quad \text{oder} \quad u(x) = \int_B G_z(x) \cdot f(z) dz$$

Aus der zweiten Formel kann man folgern:

$$\Delta u(x) = \Delta \int_B f(z) G_z(x) dB = \int_B f(z) \Delta G_z(x) dB = \int_B f(z) \delta(x-z) dB = f(x) \\ \Rightarrow u(x) \text{ löst unser Dirichlet–Problem.}$$

8.5.2 Ein Schulbeispiel

Wir wollen hier noch das bekannte Beispiel der Potentialfunktion $\gamma_z(x)$ einer Punktladung in z studieren. Diese Funktion entpuppt sich nämlich als eine Greensche Funktion. Aus der Physik weiss man, dass für das besagte Potential gilt:

$$\gamma_z(x) = -\frac{1}{4\pi|x-z|}, \quad x, z \in \mathbb{R}^3, \quad \lim_{|x| \rightarrow \infty} \gamma_z(x) = 0$$

Dabei dürfen wir wegen der Möglichkeit der Translation o.B.d.A. $z = 0$ annehmen.

$$\leadsto \gamma_0(x) := \gamma(x) = -\frac{1}{4\pi|x|} = -\frac{1}{4\pi r} := \gamma(r).$$

$\gamma(r)$ ist eine vernünftige, diff'bare Funktion ausser für $r = 0$.

Für das Folgende schreiben wir den Laplace–Operator Δ in Polarkoordinaten, denn $\gamma(r)$ ist zentralsymmetrisch (siehe Seite 228):

$$\Delta \varphi(r) = \frac{d^2 \gamma}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{d\gamma}{dr} \Rightarrow \Delta \gamma(r) = -\frac{1}{4\pi} (-2r^{-3} - 2r^{-1}(-1)r^{-2}) \Big|_{r \neq 0} \rightarrow 0 \quad \text{mit } r \rightarrow 0$$

Wir benutzen nochmals die Greensche Formel wie vorhin: $\int_B (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV = \int_{\partial B} (\varphi \frac{\Psi}{n} - \Psi \frac{\varphi}{n}) d\sigma$

Sei nun $\Psi = \gamma$, $\varphi =$ Testfunktion mit $\varphi(x) = 0$ auf dem Rand und vernünftigen Ableitungen. Da $\gamma(x)$ im Ursprung nicht als reelle Funktion definiert ist, berechne wir:

$$\int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} (\varphi \Delta \Psi - \Psi \Delta \varphi) dV = \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} (\varphi \underbrace{\Delta \gamma}_{=0} - \gamma \Delta \varphi) dV = \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} -\gamma \Delta \varphi dV \\ = \int_{\partial B} (\varphi \frac{\Psi}{n} - \Psi \frac{\varphi}{n}) d\sigma = \int_{\partial(\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0))} \underbrace{\left(\underbrace{\varphi \frac{\gamma}{n}}_{!} - \underbrace{\gamma \frac{\varphi}{n}}_{!} \right)}_{=0, \quad r \rightarrow \infty} d\sigma = \int_{\partial K_r(0)} (\varphi \frac{\gamma}{n} - \gamma \frac{\varphi}{n}) d\sigma$$

1. Wegen der Zentralsymmetrie von $\gamma(r)$ gilt in bezüglich der Kugeloberfläche:

$$\left| \int_{\partial K_r(0)} \gamma \frac{\varphi}{n} d\sigma \right| = |\gamma| \cdot \left| \int_{\partial K_r(0)} \frac{\varphi}{n} d\sigma \right| \leq \left(\frac{1}{4\pi r} \right) \cdot (4\pi r^2 \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi))) = r \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi)) \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0$$

2. Wegen der Zentralsymmetrie von $\gamma(r)$ ist $\frac{\gamma}{\vec{n}} \parallel \vec{r} \Rightarrow \frac{\gamma}{\vec{n}} = -\gamma'(r)$. Das Minuszeichen entsteht, weil der Gradient in Richtung des stärksten Wachstums von $\gamma(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ zeigt, also weg vom Ursprung. \vec{n} dagegen zeigt zum Ursprung hin. $\gamma(r)$ ist konstant auf der Kugeloberfläche.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{\partial K_r(0)} \varphi \frac{\gamma}{\vec{n}} d\sigma &= -\gamma'(r) \int_{\partial K_r(0)} \varphi d\sigma = (-(-(4\pi r)^{-1})') \cdot (4\pi r^2 \varphi(\xi)) \Big|_{\xi \in K_r(0)} \\ &= (-1) \cdot (4\pi)^{-1} \cdot r^{-2} \cdot (4\pi r^2) \cdot \varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} = -\varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} \rightarrow -\varphi(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} -\gamma \Delta \varphi dV &= \int_{\partial K_r(0)} \left(\varphi \frac{\gamma}{\vec{n}} - \gamma \frac{\varphi}{\vec{n}} \right) d\sigma = -\varphi(\xi) \Big|_{\xi \in K_r(0)} - r \cdot \text{Max}(\text{grad}(\varphi)) \rightarrow -\varphi(0) - 0 \text{ für } r \rightarrow 0 \\ &\Rightarrow \int_{B=\mathbb{R}^3 \setminus K_r(0)} \gamma \Delta \varphi dV \rightarrow \varphi(0) \quad \text{für } r \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$\gamma(r) = -\frac{1}{4\pi r}$ ist also Greensche Funktion zu $\Delta u(x) = f(x)$ in \mathbb{R}^3 und $\text{Lim}_{|x|=r \rightarrow \infty} u(x) = 0$. Daher können wir zu diesem jetzt hier dargestellten Problem gleich $u(x)$ mit Hilfe dieser Greensche Funktion berechnen. Die dabei entstehende Formel ist bekannt unter dem Namen „Poissonsche Formel“.

Korollar:

(Poissonsche Formel)

Vor.:

$$\Delta u(x) = f(x) \text{ in } \mathbb{R}^3, \quad \text{Lim}_{|x|=r \rightarrow \infty} u(x) = 0$$

Beh.:

$$u(x) = -\frac{1}{r\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{f(z)}{|x-z|} dz$$

Bemerkung:

Bei der Anwendung der Methode mit der Greenschen Funktion besteht das grosse **Problem** darin, die gesuchte **Greensche Funktion zu konstruieren**. Im uns gesetzten engen Rahmen ist es nicht möglich darauf weiter einzugehen. Der Leser möge dazu die sehr umfangreich vorhandene Fachliteratur über partielle Differentialgleichungen konsultieren.

Zu gewissen oft vorkommenden Differentialoperatoren und Randbedingungen findet man heute die zugehörigen Greenschen Funktionen auch in „Formeln- und Tafelbüchern“ tabelliert.

8.6 Bemerkung zur Delta-Funktion

Auf Seite 79 ist bemerkt worden, dass die früher gegebene Einführung der Delta-Funktion nicht ganz der sonst üblichen Art in der Mathematik entspricht. Daher soll hier die Sache nochmals auf eine andere Weise dargestellt werden.

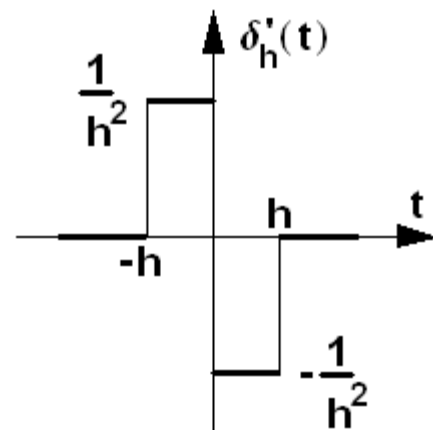
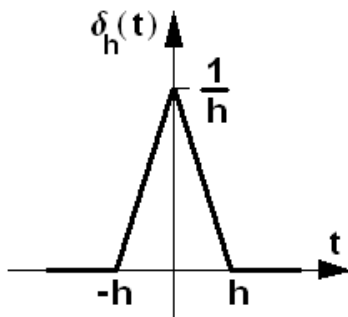
Die **Delta-Funktion** $\delta(t)$ ist eine **verallgemeinerte Funktion**. Wir definieren sie hier wie folgt:

Definition:
$$\delta(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h(t),$$

wobei $\delta_h(t)$ die im linken Bild unten dargestellte Funktion ist.

Die Delta-Funktion hat also an der Stelle $t = 0$ einen „Pic“. Im rechten Bild ist die Ableitung $\delta_h'(t)$ von $\delta_h(t)$ gezeichnet.

Definition:
$$\delta'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \delta_h'(t)$$

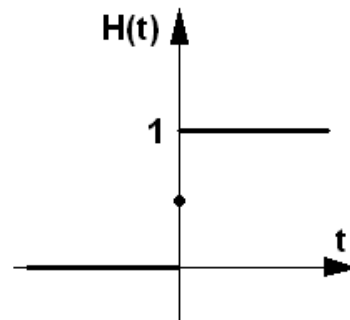


Die Ableitung der so definierten Delta-Funktion kann man hier mit Hilfe der linksseitigen und der rechtsseitigen Ableitung von $\delta_h(t)$ gewinnen.

Weiter definieren wir hier die **Heaviside-Sprungfunktion** wie folgt:

Definition:

$$H(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 1 & t > 0 \end{cases}$$



$H(t - a)$ ist verschobene Sprungfunktion mit Sprung an der Stelle $t = a$. Ebenso ist $\delta(t - a)$ ist verschobene Delta-Funktion mit Pic an der Stelle $t = a$.

Wie man unter Verwendung von $\delta_h(t)$, $\delta_h'(t)$ u.s.w. und des Grenzübergangs nachvollziehen kann, haben $\delta(t)$, $\delta'(t)$ und $H(t)$ u.s.w. die folgenden Eigenschaften:

1. $t \neq 0 \Rightarrow \delta(t) = 0 \quad \delta(0) = +\infty$
2. $\delta(t)$ ist gerade: $\delta(t) = \delta(-t)$
3. $\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t)$, $a \neq 0$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$, $\delta(0) = +\infty$, $\int_{-a}^a \delta'(t) dt = 0$ für $a > 0$
5. $\int_{-\infty}^{\infty} |\delta^{(n)}(t)| dt = +\infty$ für $n \geq 1$
6. $\int_{-\infty}^t \delta(q) dq = H(t)$
7. $H(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sgn}(t) + 1)$
8. $H'(t) = \delta(t) = \frac{1}{2} \operatorname{sgn}'(t) \Rightarrow \operatorname{sgn}'(t) = 2H'(t)$
9. $f(t) \delta(t - a) = f(a) \delta(t - a)$ für f stetig in $t = a$ (denn $\delta(t - a) = 0$, $t \neq a$)
10. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$ für f stetig in $t = a$, $\int_{-\infty}^t \delta(q - a) dq = H(t - a)$
11. $(f(t) - f(a)) \delta'(t - a) = f'(a) \delta(t - a)$ für f' stetig in $t = a$
 $\leadsto f(t) \delta'(t - a) = f(a) \delta'(t - a) + f'(a) \delta(t - a)$
12. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t - a) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) \delta(t - a) dt = -f'(a)$ für f' stetig in $t = a$
13. $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t - a) dt = - \int_{-\infty}^{\infty} f^{(n)}(t) \delta(t - a) dt = (-1)^n f^{(n)}(a)$ für $f^{(n)}$ stetig in $t = a$
14. $f(t) \delta^{(n)}(t - a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \delta^{(n-k)}(t - a)$
15. $f * \delta^{(n)}(t) = f^{(n)}(t)$, $n \in \mathbb{N}_0$
16. U.s.w.

8.7 Ausblick

Der bis jetzt zum Thema „partielle Differentialgleichungen“ besprochene Stoff behandelt nur Grundschritte in dieses Gebiet. Weiterer grundlegender Stoff ist hier weggelassen worden. Speziell sei daraus auf folgende Gebiete hingewiesen:

1. Die Weiterführung der Methode der Greenschen Funktion und die Umformung von Differentialgleichungen in Integralgleichungen sowie deren Lösung. Zur Greenschen Funktion gehört die Theorie der Distributionen.
2. Weitere Methoden aus dem Gebiet der Variationsrechnung.
3. Behandlung der Wellengleichung, Methode von d'Alembert, Methode der Charakteristiken.
4. Diverse diskrete oder numerische Verfahren wie Taylor-Methoden oder die Methoden der finiten Elemente, die zum Teil an anderer Stelle dargestellt sind.
5. Diverse praktische Beispiele, auch aus dem Gebiet der Hydrodynamik, oder Diffusionsprobleme im Zusammenhang mit dem Bauwesen.

Der geneigte Leser ist gebeten, im Falle des Bedarfs solcher Kenntnisse wiederum auf die einschlägige Literatur zurückzugreifen, die in sehr reichlicher Masse vorhanden ist.

Kapitel • Chapitre 9

Mathematische Modellierung (Anhang 3) — Annexe 3 (sans traduction)

- *Ici, il y a pour le moment seulement le texte allemand à disposition. Momentanément, la traduction française manque encore.*

In diesem Kapitel sind einige Beispiele von praktischen Anwendungen aus dem Interessebereich von Ingenieuren dargestellt. Ein spezieller Augenmerk wird dabei auf die Darstellungen der Überlegungen bei den Modellbildungen gelegt, welche hier in der Regel zu Differentialgleichungen als Modelle der beschriebenen Realität führen.

9.1 Einige Kurven

9.1.1 Die Klothoide

Modellierung

Die **Klothoide** ist bekannt als diejenige Kurvenart, nach welcher u.a. Biegungen von Strassen geformt werden müssen, damit diese möglichst gefahrlos befahren werden zu können.

Zur Modellierung einer idealen Kurvenform verwenden wir folgende Überlegung: Will man z.B. mit einem Auto von einer geraden Strecke in eine Kurve einbiegen, so kann das nur unter der Bedingung geschehen, dass man ab Kurvenbeginn langsam und „gleichmässig“ am Steuerrad zu drehen beginnt. Aus Erfahrung weiss man, dass abrupte Drehungen am Steuerrad den Wagen zum Schleudern bringen können.

Die langsame und gleichmässige Drehung des Steuerrades wird dann über einen Zahnrad- oder Gelenkmechanismus übersetzt in eine langsame und gleichmässige Änderung des Winkels der Räder zur Mittelachse des Wangens. Statt der Mittelachse kann man auch eine andere Achse für die Betrachtung benutzen. So ist es statthaft zu sagen, dass die Winkeländerung der Ebene durch die Vorderräder beziehungsweise die Winkeländerung des Normalenvektors oder einer etwaigen vorderen Radachse pro Zeiteinheit konstant sein muss. Wenn wir annehmen, dass es sich um ein altmodisches Fahrzeug handelt, welches eine vordere, bewegliche und eine hintere, fixe Radachse besitzt, so muss bei einer gleichmässigen Drehung am Steuerrad der Winkel zwischen der hinteren und vorderer Radachse ebenso gleichmässig zunehmen.

Hört man auf mit der Drehung am Steuerrad, so bleibt der Winkel zwischen den Radachsen konstant und der Wagen fährt einen Kreis mit konstanter Krümmung, d.h. einer konstanten Änderung des Tangentenwinkels pro Zeiteinheit. Dreht man wieder gleichmässig am Steuerrad, so nimmt die Änderung des Tangentenwinkels gleichmässig zu, d.h. die Krümmung wird gleichmässig grösser. (Die Krümmung ist im Skript „Analysis“ definiert worden als die Änderung des Tangentenwinkels pro Bogenlänge, was bei konstanten Reisegeschwindigkeit gleichbedeutend ist mit der Änderung des Tangentenwinkels pro Zeit.)

Daher erheben wir zur Modellierung einer idealen gefahrlosen Kurve die Forderung, dass wegen der gleichmässigen Drehung am Steuerrad die Kurvenkrümmung beim Durchfahren mit konstanter niedriger Geschwindigkeit gleichmässig zunehmen muss.

Das ergibt mit $\kappa =$ Krümmung und $L =$ Bogenlänge folgende **Modellierungsbedingung**:

$$\frac{d\kappa}{dL} = c = \text{const.}$$

Aus dieser Differentialgleichung für $\kappa(L)$ folgt: $\kappa = c \cdot L + C_1$.

Da beim Kurvenbeginn, d.h. für $L = 0$, die Krümmung κ gleich null sein muss, folgt:

$$\kappa(L) = c \cdot L$$

Sei τ der Winkel zwischen der Tangente an die Kurve und der vorangegangenen geraden Strecke.

Dann gilt wegen der Definition der Krümmung: $\kappa = \frac{d\tau}{dL} = c \cdot L \Rightarrow \tau = c \cdot L^2 + C_2$

Da τ als Winkel der Tangente zur vorangegangenen geraden Strecke bei Kurvenbeginn null sein muss, folgt für $L = 0$ dass gilt: $0 = c \cdot 0^2 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0$. Damit wird:

$$\tau = c \cdot L^2$$

Wir betrachten die Kurve in einem Koordinatensystem mit der x -Achse parallel zur vorangegangenen geraden Strecke. Dann gilt an der Kurve die Beziehung: $(\Delta L)^2 \approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ mit $\Delta x \approx \cos(\tau) \cdot \Delta L$

und $\Delta y \approx \sin(\tau) \cdot \Delta L$. Dabei ist $\tau = c \cdot L^2$. (Der Leser ist gebeten, sich selbst dazu eine Skizze zu machen.) Das führt zu

$$\begin{aligned} dx &= \cos(c \cdot L^2) dL \\ dy &= \sin(c \cdot L^2) dL \end{aligned}$$

Damit haben wir zwei separierte Differentialgleichungen vor uns. Die Integration ergibt:

$$\begin{aligned} x_0 &= \int_0^{L_0} \cos(c \cdot L^2) \cdot dL \\ y_0 &= \int_0^{L_0} \sin(c \cdot L^2) \cdot dL \end{aligned}$$

Als Vektor geschrieben erhalten wir die **Vektorfunktion der Klothoide** oder **Spinnlinie** oder auch **Cornu-Spirale** :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(c \cdot t^2) \\ \sin(c \cdot t^2) \end{pmatrix} dt$$

Allgemeiner werden zentrisch gestreckte solche Kurven ebenfalls **Klothoiden** genannt:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = a \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(c \cdot t^2) \\ \sin(c \cdot t^2) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} a \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \operatorname{FresnelC} \left(\sqrt{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} L \right) \\ a \sqrt{\frac{\pi}{2c}} \operatorname{FresnelS} \left(\sqrt{c} \sqrt{\frac{2}{\pi}} L \right) \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

FresnelC und *FresnelS* sind die **Fresnel Cosinus**- und **Fresnel Sinus**-Integrale. In heute üblichen Computeralgebraprogrammen sind diese Funktionen implementiert und können daher verwendet werden.

Wir wollen hier nicht auf die technischen Feinheiten eingehen, mit welchen in der Verkehrstechnik die Klothoiden-Parameter behandelt und die Kurven damit eingeteilt werden. Erwähnt werden soll hier nur der Fall $a = 1$ und $c = \frac{1}{2}$:

Definition:

Die Klothoide $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \int_0^L \begin{pmatrix} \cos(\frac{1}{2} \cdot t^2) \\ \sin(\frac{1}{2} \cdot t^2) \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \operatorname{FresnelC} \left(\frac{L}{\sqrt{\pi}} \right) \\ \sqrt{\pi} \operatorname{FresnelS} \left(\frac{L}{\sqrt{\pi}} \right) \end{pmatrix}$ heisst **Einheitsklothoide**.

Plot und Approximation

Sir wollen nun einerseits die Einheitsklothoiden ploten. Andererseits ist es sehr einfach, die Fresnel-Integrale durch Potenzreihen darzustellen und diese im Vergleich zur exakten Kurve graphisch zu zeigen. Wir verwenden der Einfachheit halber dazu *Mathematica*:

Input 1

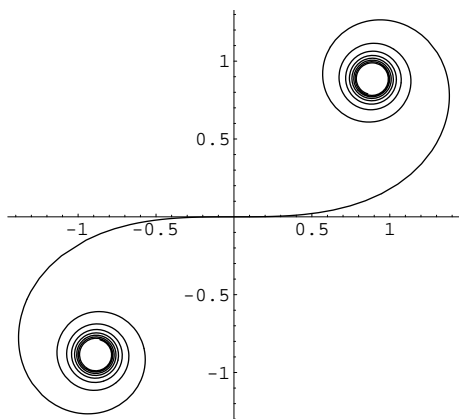
```
v[xL_]:= {Integrate[Cos[t^2 /2], {t,0,xL}], Integrate[Sin[t^2 /2], {t,0,xL}]};
ParametricPlot[Evaluate[v[xL]], {xL,-10,10}, AspectRatio->Automatic]
```

Input 2

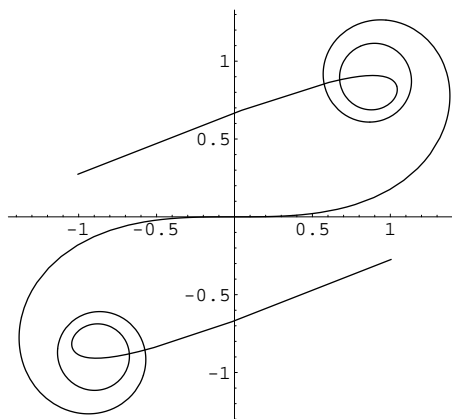
```
n=70; b=5.6;
vPot[xL_]:= {Integrate[Normal[Series[Cos[t^2 /2], {t,0,n}]], {t,0,xL}],
Integrate[Normal[Series[Sin[t^2 /2], {t,0,n}]], {t,0,xL}]};
p2=ParametricPlot[Evaluate[vPot[xL]], {xL,-b,b}, AspectRatio->Automatic]
```

Input 3 (Überlagerung der beiden Graphiken)

```
Show[p1,p2]
```

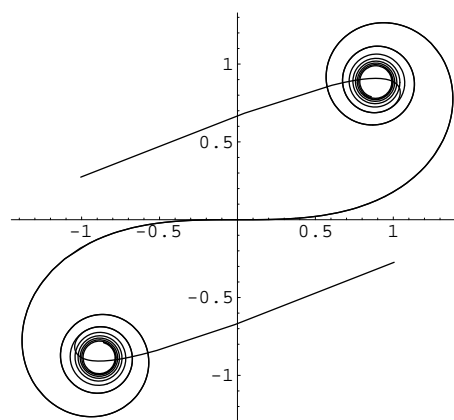
Output

Kurve exakt



Kurve mit Potenzreihe bis zur Ordnung 70

Rechts sieht man die Überlagerung der exakt gerechneten Kurve und derjenigen Kurve, welche mit Potenzreihen bis zur Ordnung 70 erzeugt worden ist. Die letztere reißt plötzlich aus nach „Irgendwohin“, abhängig von der Abbruchordnung der Potenzreihe.

**9.1.2 Kettenline contra Seilkurve**

Auf Seite 258 haben wir herausgefunden, dass eine Kettenlinie in der Form einer Cosinus hyperbolicus-Funktion dargestellt beschrieben werden muss. Unter Berücksichtigung von Verschiebungen im Koordinatensystem ergibt sich: $y(x) = a \cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + y_0$. a ist dabei der Krümmungsradius im tiefsten Punkt der Kettenlinie.

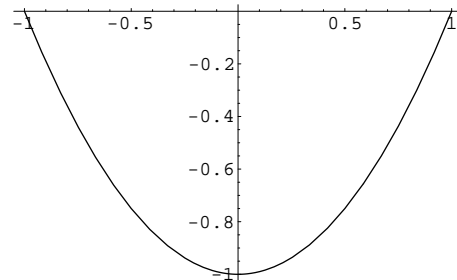
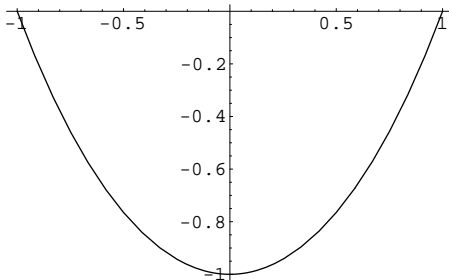
Zur Vereinfachung nehmen wir hier folgende Werte an:

$$a = \frac{1}{\cosh(1) - \cosh(0)}, \quad x_0 = 0, \quad y_0 = -\frac{\cosh(0)}{\cosh(1) - \cosh(0)} - 1$$

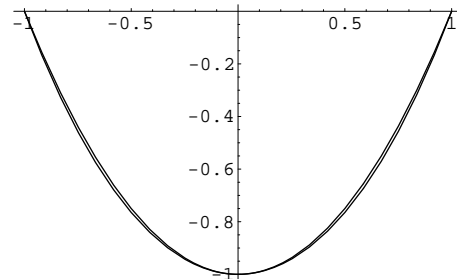
$$\leadsto y(x) = a \cosh\left(\frac{x-x_0}{a}\right) + y_0 = \frac{1}{\cosh(1) - \cosh(0)} \cosh(x) - \frac{\cosh(0)}{\cosh(1) - \cosh(0)} - 1 = \frac{\cosh(x) - \cosh(1)}{\cosh(1) - 1}$$

Zwischen $x = -1$ und $x = 1$ erhält man damit die nachstehend links gezeigte Graphik:

Das Bild links gleicht sichtlich der um -1 verschobenen Normalparabel $p(x) = x^2 - 1$, vgl. nachstehendes rechtes Bild.



Rechts sieht man nun die Überlagerung der beiden obigen Bilder. Dieses Bild spricht für sich.



Berechnen wir die **Längen** der beiden Kurven, so erhalten wir hier für die Kettenlinie $L_K \approx 2.47008$ und für die Parabel $L_P \approx 2.45982$. Die Abweichung bezogen auf L_K beträgt etwa 0.415 Prozent.

Die **Kettenlinie** haben wir mit Hilfe einer Energiebetrachtung hergeleitet. Sie ist durch einen **Cosinus hyperbolicus** gegeben. Nun wollen wir zeigen, dass wir mit einer anderen Modellierung über die Kräfte und Momente eine sogenannte **Seilkurve** erhalten, welche dann durch eine **Parabel** gegeben ist.

Zur **Modellierung** stellen wir uns auf einer Seilkurve zwei nahe beieinander gelegene Punkte $P_i = P_i(x, y)$ und $P_{i+1} = P_{i+1}(x + \Delta x, y + \Delta y)$ vor. (Der Leser mache sich dazu eine Skizze.) Die Distanz der Punkte, welche etwa der dazwischen liegenden Seillänge entspricht, beträgt $\Delta L = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Wir nehmen weiter an, dass das Seil überall gleich dick sei mit dem Gesamtgewicht Q . Die Gewichtskraft pro Länge beträgt dann im Grenzwert $q(l) = Q'(l) = \frac{dQ}{dl}$, wobei l hier die Variable für die Länge ist.

Links im Punkt P_i hat man dann die in die Horizontal- und die Vertikalkomponente aufgegliederte Kraft $\vec{F}_i = \begin{pmatrix} -F_H \\ -F_V \end{pmatrix}$. Und rechts ist die Kraft $\vec{F}_{i+1} = \begin{pmatrix} F_H + \Delta F_H \\ F_V + \Delta F_V \end{pmatrix}$. Weiter greift am Seilstück zwischen P_i und P_{i+1} die Gewichtskraft $\Delta Q = -q(x)\Delta x$ an. Da wegen der Gleichgewichtsbedingung für die Kräfte die Summe der Kräfte null sein muss, gilt:

$$\Delta F_H = 0, \quad \Delta F_V = q(x)\Delta x \Rightarrow q(x) = \frac{dF_V}{dx}$$

Weiter muss wegen der Gleichgewichtsbedingung für die Momente auf das kleine Seilstück zwischen P_i und P_{i+1} in P_i gelten (Momentensumme null): $(F_V + \Delta F_V) \cdot \Delta x - (F_H + \Delta F_H) \cdot \Delta y = (q(x)\Delta x) \cdot \frac{\Delta x}{2}$.

$$\leadsto F_V \cdot \Delta x + \Delta F_V \cdot \Delta x = F_H \cdot \Delta y + \Delta F_H \cdot \Delta y + \frac{q(x) \cdot (\Delta x)^2}{2} \rightarrow F_V dx = F_H dy$$

Hier sind quadratisch vorkommende Differentiale im Vergleich zu den nur linear vorkommenden ohne weitere Untersuchung gleich null gesetzt worden. Damit haben wir die separierte Differentialgleichung $F_V dx = F_H dy$ und damit $F_V = F_H \cdot \frac{dy}{dx}$ erhalten. Daraus ergibt sich durch ableiten:

$\frac{dF_V}{dx} = \frac{dF_H}{dx} \cdot \frac{dy}{dx} + F_H \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = F_H \cdot y''(x)$, denn ΔF_H wurde ja als gleich null erkannt, womit $\frac{dF_H}{dx} = 0$ gelten muss. Damit hat man wegen $\frac{dF_V}{dx} = q(x)$ für die Seillinie die Differentialgleichung:

$$q(x) = F_H \cdot y''(x) \Rightarrow y''(x) = \frac{q(x)}{F_H}$$

Dabei war nach Voraussetzung $q(l) = const.$ Ebenso ist $F_H = const.$. Gehen wir hier unter der **Annahme** einer **schwachen Biegung** von der Approximation $q(x) \approx q(l) = const.$ aus, so haben wir zwar einen Fehler in Kauf genommen. Damit vereinfacht sich aber die Differentialgleichung sehr und wir erhalten:

$$y''(x) = const. = \frac{q}{F_H} \Rightarrow y(x) = x^2 \cdot \frac{q}{F_H} + C_1 \cdot x + C_2 = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

Somit haben wir tatsächlich unter der fehlerbehafteten Annahme $q(x) \approx q(l)$ eine **Parabel** erhalten:

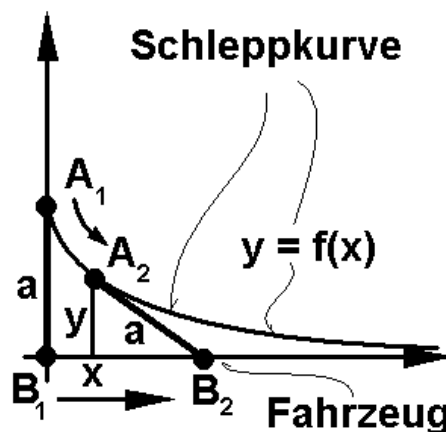
$$y(x) = C_1 \cdot x^2 + C_2 \cdot x + C_3$$

Dabei hängen C_1 , C_2 und C_3 von den zu wählenden Randbedingungen sowie den Seilbedingungen ab.

9.1.3 Eine Schleppeurve

Das nebenstehende Bild zeigt die Situation, welche wir behandeln wollen.

Ein Fahrzeug bewegt sich von B_1 nach B_2 . Hinten am Fahrzeug ist ein Baumstamm angehängt, welcher am Anhängepunkt angehoben ist und nur mit dem hintersten Ende mit dem Kontaktpunkt K bei A_1 den Boden berührt. Wenn das Fahrzeug bei B_2 ankommt, ist der Berührungspunkt K nach A_2 gewandert. K beschreibt eine Schleppeurve. Man suche dafür die Kurvengleichung.



Modellierung:

Wir lesen aus der Skizze ab: $(x_{B_2} - x)^2 + y^2 = a^2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y'(x) = -\frac{y}{x_{B_2} - x} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$

$\leadsto \frac{dy}{dx} = -\frac{y}{\sqrt{a^2 - y^2}}$ ist eine separable Differentialgleichung: $-dx = \frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{y} dy = \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy,$

$-\int dx = \int \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy \Rightarrow -x = \int \sqrt{\left(\frac{a}{y}\right)^2 - 1} dy + C.$ Da $\frac{a}{y} \geq 1$ ist, können wir substituieren:

$\frac{a}{y} = \cosh(t) \Rightarrow y = \frac{a}{\cosh(t)} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} \Rightarrow dy = -\frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt$

$$\Rightarrow -x = \int \sqrt{(\cosh(t))^2 - 1} \cdot (-1) \cdot \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt + C = - \int \sinh(t) \frac{a \sinh(t)}{\cosh^2(t)} dt + C = - \int \frac{a \sinh^2(t)}{\cosh^2(t)} dt + C$$

$$\Rightarrow x = a \int \tanh^2(t) dt + C = a(t - \tanh(t)) + C$$

Weiter folgt für $t = 0$ aus $\frac{a}{y} = \cosh(t) = \cosh(0) = 1 \Rightarrow y = a$ ($\Leftrightarrow x = 0$, siehe Skizze oben).

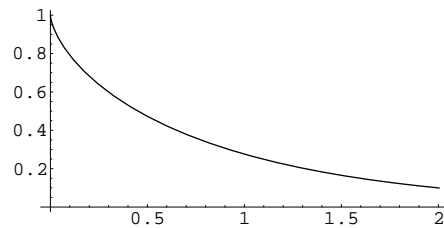
Das ergibt wiederum für $t = 0$ resp. $x = 0$:

$$x = a(t - \tanh(t)) + C \Rightarrow 0 = a(0 - \tanh(0)) + C = a \cdot 0 + C = C \Rightarrow C = 0 \Rightarrow x = x(t) = a(t - \tanh(t)).$$

Andererseits gilt: $\frac{a}{y} = \cosh(t) \Rightarrow y = y(t) = \frac{a}{\cosh(t)}$. Das ergibt:

Schleppkurve: $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(t - \tanh(t)) \\ \frac{a}{\cosh(t)} \end{pmatrix}.$

Wir ermitteln noch die genaue Kurvenform für den Wert $a = 1$:



Dazu der Input:

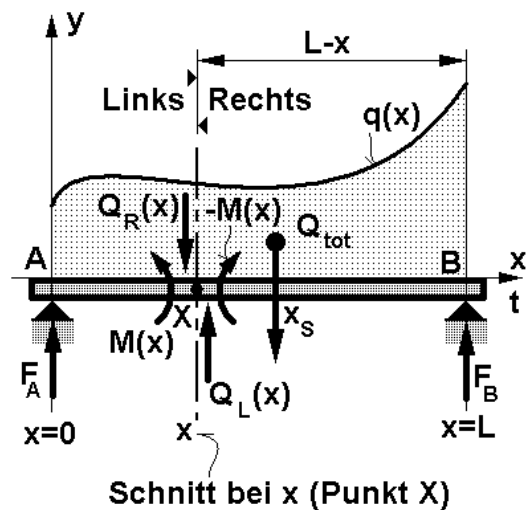
```
ParametricPlot[{t-Tanh[t], 1/Cosh[t]}, {t, 0, 3}, AspectRatio->Automatic]
```

9.2 Balken und Biegelinie

9.2.1 Schnittkräfte und Momente am Balken

Wir betrachten einen gelenkig gelagerten Balken, wie er im nebenstehenden Bild dargestellt ist. Der Balken ist mit einer ortsabhängigen Streckenlast belastet, welche durch die Funktion $q(x)$ gegeben ist. Für gewisse Betrachtungen kann man diese Streckenlast durch die aufsummierte Gesamtlast $Q = \int_0^L q(x) dx$ ersetzen und davon ausgehen, dass Q im Schwerpunkt mit der x -Koordinate x_S angreift. Die Berechnung von x_S ist im Analysis-Skript behandelt worden. Wir aber wollen hier folgende Größen berechnen:

Einmal die **Auflagereaktionen** F_A und F_B . Dann aber auch die **Schnittkräfte** $Q(x)$ und **Momente** oder **Biegemomente** $M(x)$. Diese definiert man wie folgt:



Wir denken uns den Balken irgendwo an einer Stelle x vertikal (wie in der Skizze gezeigt) entzweigeschnitten. Danach bringen wir an den neuen Balkenenden, also an den Schnittstellen, Kräfte $Q(x)$ und $M(x)$ so an, dass wieder Gleichgewicht herrscht. Diese Schnittkräfte und Momente existieren dann je paarweise. Auf der linken Seite (siehe Bild oben) nennen wir sie $Q_L(x)$ und $M_L(x)$, auf der rechten Seite sind es $Q_R(x)$ und $M_R(x)$. Dabei ist $x \in [0, L]$.

Berechnungen

1. Gleichgewichtsbedingung in B: Die Summe der Momente muss null sein.

$$\leadsto F_A \cdot L - \int_0^L (L-x) \cdot q(x) dx = 0 \Rightarrow F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-x) \cdot q(x) dx.$$

Weil wir später bei der Betrachtung des Schnittes an der fixen Stelle x (Punkt X auf der Achse) die Variable x für die Bezeichnung eben dieser Stelle benötigen, müssen wir die Laufvariable bei der Integration zur Unterscheidung von x anders benennen. Daher wählen wir als Integrationsvariable neu t , was am Resultat ja nichts ändert.

$$\Rightarrow F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt$$

2. Gleichgewichtsbedingung in A: Ebenso muss auch hier die Summe der Momente null sein.

$$\leadsto -F_B \cdot L + \int_0^L t \cdot q(t) dt = 0 \Rightarrow F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt.$$

$$\Rightarrow F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt$$

3. Gleichgewichtsbedingung auf der linken Balkenseite zwischen A und X: Die Summe der Kräfte muss null sein.

$$\leadsto Q_L(x) - F_A + \int_0^x q(t) dt = 0 \Rightarrow Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt.$$

$$\Rightarrow Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt$$

Fügt man den Balken wieder zusammen, dann muss gelten: $Q_R(x) = F_B - \int_x^L q(t) dt$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Q_L(x) + Q_R(x) &= F_A + F_B - \int_0^x q(t) dt - \int_x^L q(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt - \\ &\int_0^x q(t) dt - \int_x^L q(t) dt = \frac{1}{L} \int_0^L L \cdot q(t) dt - \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt + \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt - \int_0^L q(t) dt = 0 \leadsto \text{☺} \end{aligned}$$

Damit ist also $Q_L(x) = -Q_R(x)$ richtig.

4. Gleichgewichtsbedingung auf der linken Balkenseite zwischen A und X: Die Summe der Momente muss null sein.

$$\begin{aligned} \leadsto M(x) - F_A \cdot x + \int_0^x (x-t) q(t) dt &= 0 \\ \Rightarrow M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x (x-t) q(t) dt &= x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt. \\ \Rightarrow M(x) = x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt \end{aligned}$$

Wie bei den Kräften $Q_L(x) = -Q_R(x)$ gilt, gilt auch bei den Momenten $M(x) = M_L(x) = -M_R(x)$. Der Nachweis sei dem Leser überlassen.

5. Die Lage des Momentenextremums und der Nullstelle von $Q(x)$:

Aus $M(x) = F_A \cdot x - \int_0^x (x-t) q(t) dt$ folgt für ein etwaiges Extremum von $M(x)$ die Beziehung

$$\begin{aligned} M'(x) = 0 &= F_A - \underbrace{(x-x)}_{=0} q(x) + \underbrace{(0-0)}_{=0} q(0) - \int_0^x \frac{d}{dx} ((x-t) q(t)) dt = F_A - \int_0^x q(t) dt = Q_L(x) \\ \Rightarrow (Q_L(x) = 0 &\Leftrightarrow M'(x) = 0) \end{aligned}$$

Konsequenz:

$$1. \quad F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt$$

$$2. \quad F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt$$

$$3. \quad Q_L(x) = F_A - \int_0^x q(t) dt, \quad Q_L(x) = -Q_R(x)$$

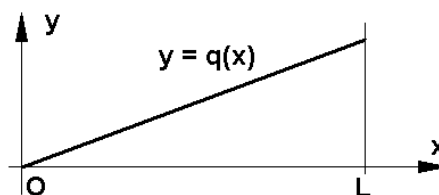
$$4. \quad M(x) = x \cdot \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt - \int_0^x (x-t) q(t) dt, \quad M(x) = M_L(x) = -M_R(x)$$

$$5. \quad Q_L(x) = 0 \Leftrightarrow M'(x) = 0 \quad (\text{Extremum von } M(x)!)$$

Ein Beispiel

Sei $q(x) = \frac{a}{L} \cdot x$, $a =$ Steigung mal L (mit $a = 1$ und $L = 10$ für die Plots).

Dann können wir die Werte in den obigen Formeln berechnen:



$$1. \quad F_A = \frac{1}{L} \int_0^L (L-t) \cdot q(t) dt = \frac{a}{L^2} \int_0^L (L \cdot t - t^2) dt = \frac{a}{L^2} \left(\frac{L}{2} \cdot t^2 - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^L = \frac{a \cdot L}{6}$$

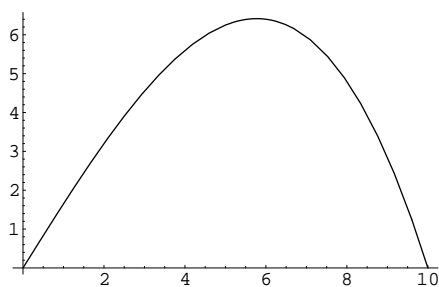
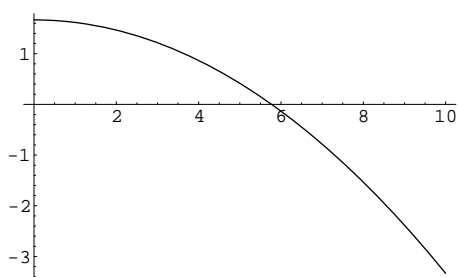
$$2. \quad F_B = \frac{1}{L} \int_0^L t \cdot q(t) dt = \frac{a}{L^2} \int_0^L t^2 dt = \frac{a}{L^2} \left(\frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^L = \frac{a \cdot L}{3}$$

$$3. \quad Q_L(x) = F_A - \frac{a}{L} \int_0^x t dt = \frac{a \cdot L}{6} - \frac{a}{L} \left(\frac{t^2}{2} \right) \Big|_0^x = \frac{a}{2} \left(\frac{L}{3} - \frac{x^2}{L} \right)$$

$$4. \quad M(x) = F_A \cdot x - \frac{a}{L} \int_0^x (x-t) t dt = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \left(\frac{x t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right) \Big|_0^x = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \left(\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{3} \right)$$

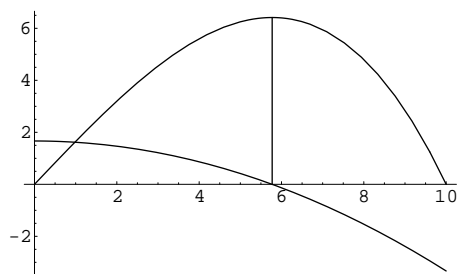
$$M(x) = \frac{a \cdot L \cdot x}{6} - \frac{a}{L} \frac{x^3}{6} = \frac{a}{6} \left(x L - \frac{x^3}{L} \right)$$

$$5. \quad Q_L(x) = 0 \Leftrightarrow M'(x) = 0 \rightsquigarrow 0 = M'(x) = \frac{a}{6} \left(L - \frac{x^2}{3L} \right) \Rightarrow x = \sqrt{\frac{L^2}{3}} = \frac{L}{\sqrt{3}}$$



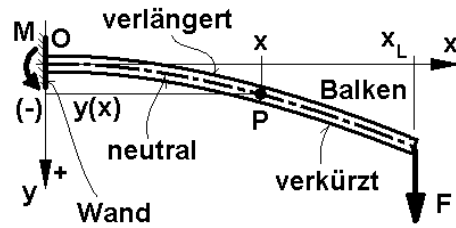
Das erste Bild oben zeigt den Verlauf von $Q(x)$, das zweite Bild zeigt denjenigen von $M(x)$.

Im dritten Bild rechts sieht man die Überlagerung der beiden Funktionen sowie die Übereinstimmung der Lage der Nullstelle von $Q(x)$ mit und derjenigen des Maximums von $M(x)$.



9.2.2 Die Biegelinie des Balkens

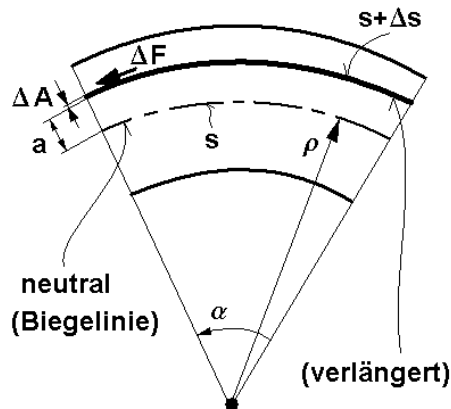
Bei der Biegung eines Balkens wird die der Biegerichtung näher gelegene Oberfläche verkürzt, jedoch die der Biegerichtung am weitesten entfernt gelegene Oberfläche wird verlängert. Zwischen beiden liegt die neutrale Fläche, auch „**neutrale Faser**“ oder „**Biegelinie**“ genannt.



In O hat man hier (Skizze) das **Einspannmoment** $M = -x_L \cdot F$. Und in P hat man das **Biegemoment** $M(x) = -(x_L) \cdot F$.

Dabei beachte man, dass hier (Skizze und Rechnungen) die Vorzeichen nach der Usanz der Baustatik gewählt worden sind, welche nicht der in der Mathematik sonst üblichen Konvention entspricht. Wenn man Konventionen beliebig in vernünftiger Weise ändert, so hat das keinen Einfluss auf die numerischen Resultate, solange man die Änderungen mit der notwendigen Strenge handhabt.

In der nebenstehenden Skizze ist ein Ausschnitt aus dem Balken stark übertrieben herausgezeichnet.



Wir **modellieren** nun die **Biegelinie**. Dazu leiten wir aus der nebenstehenden Skizze eine geometrische Relation ab, welche wir mit bekannten physikalischen Gesetzen und geometrischen Sachverhalten kombinieren. Es gilt:

$$\frac{\Delta s}{s} = \frac{(s + \Delta s) - s}{s} = \frac{\alpha \cdot (\rho + a) - \alpha \cdot \rho}{\alpha \cdot \rho}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta s}{s} = \frac{a}{\rho}$$

Weiter gilt nach dem Hookschen Gesetz mit der Spannung pro Flächeneinheit σ und der spezifischen Verlängerung ε (auch Dehnung):

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad E = \frac{\sigma}{\varepsilon}, \quad \sigma = \frac{\Delta F}{\Delta A}, \quad \varepsilon = \frac{\Delta s}{s}$$

$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ ist die „Spannung pro Dehnung“ resp. der Elastizitätsmodul.

(Üblicherweise rechnet man z.B. für Baustahl mit $E = 210'00 \text{ N/mm}^2$.)

$$\leadsto \frac{\Delta F}{\Delta A} = \sigma = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta s}{s} = E \cdot \frac{a}{\rho} \Rightarrow \Delta F = \frac{E}{\rho} \cdot a \cdot \Delta A. \text{ Damit ist der Beitrag von } \Delta F \text{ zu } M(x):$$

$$\Delta M = -a \Delta F = -\frac{E}{\rho} \cdot a^2 \cdot \Delta A \Rightarrow M \approx \sum \Delta M \rightarrow M(x) = \int_A dM = -\frac{E}{\rho} \cdot \int_A a^2 \cdot dA$$

Hier ist $\int_A a^2 \cdot dA$ das faktorbefreite axiale Trägheitsmoment $I_y \leadsto M(x) = -\frac{E}{\rho} \cdot I_y$.

Der **eigentliche Modellierungsschritt zur Biegelinie** geschieht nun wie folgt: Den Radius ρ kann man gleichsetzen dem Krümmungsradius einer Funktion $y = y(x)$, welche die Biegelinie beschreibt:

$$\rho = \frac{(1 + (y'(x))^2)^{3/2}}{|y''(x)|} \approx \frac{(1 + 0)}{|y''(x)|} = \frac{1}{|y''(x)|} = \frac{1}{y''(x)}$$

Die hier verwendete Approximation ist zulässig für $|y'(x)| \ll 1$. Dabei ist bei dem oben skizzierten Balken wegen dem bekannten Krümmungsverlauf $y''(x) > 0$. (Die Biegung ist auf der Wandseite am grössten.) Damit haben wir:

$$M(x) = -E \cdot I_y \cdot \frac{1}{\left(\frac{1}{y''(x)}\right)} = -E \cdot I_y \cdot y''(x) \text{ und auch } M(x) = -(x_L - x) \cdot F. \text{ Daraus folgt:}$$

$$y''(x) = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (x_L - x)$$

Dies ist die **vereinfachte Differentialgleichung für die Biegelinie**.

(Vereinfacht deshalb, weil unter der Annahme $|y'(x)| \ll 1$ oben $y'(x) = 0$ gesetzt worden ist.)

Bemerkung: Man beachte in unserem Umfeld die folgenden Formeln:

$$\sigma = E \cdot \frac{a}{\rho}, \quad M(x) = -E \cdot \frac{I_y}{\rho} \Rightarrow \sigma_x(x, a) = E \cdot \frac{M(x)}{I_y} \cdot a$$

Die **Lösung der Differentialgleichung der Biegelinie** ist geradezu trivial:

$$y'(x) = \int y''(x) dx = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot \left(x_L \cdot x - \frac{x^2}{2} + C_1\right)$$

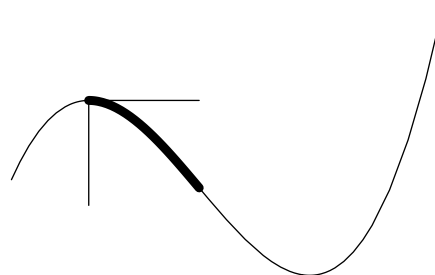
$$\Rightarrow y(x) = \int y'(x) dx = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot \left(x_L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + C_1 \cdot x + C_2\right)$$

Dabei ist in unserer Skizze oben das Anfangswertproblem $y(0) = 0$ gezeigt. Damit wird beim betrachteten Beispiel $C_2 = 0$. Da unser Balken horizontal eingespannt ist, stellen wir bei $x = 0$ eine horizontale Tangente fest. Damit können wir schliessen: $y'(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. Damit ist unsere Biegelinie gegeben durch die Funktion:

$$y(x) = \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot \left(x_L \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right)$$

Es ist zu beachten, dass wir hier mit den Konventionen der Statik arbeiten und dass somit die y -Achse nach unten und nicht nach oben zeigt.

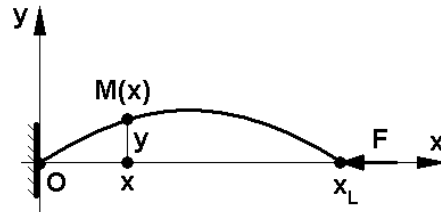
Die nebenstehende Skizze zeigt die Biegelinie (dick gezeichnet) eingebettet in den globalen Funktionsverlauf der Parabel 3. Ordnung.



9.2.3 Zur Knickung

Wir betrachten die nebenstehende Skizze eines Stabes, welcher links rechtwinklig an eine Wand anliegt, auf den aber rechts eine Kraft F wirkt.

Modellierung: Als Stabform unter der gezeigten Biegebeanspruchung erwarten wir eine Biegelinie. Unter dieser Voraussetzung muss gelten:



$$y''(x) = -\frac{M(x)}{E \cdot I} = -\frac{F}{E \cdot I} \cdot y(x) \Rightarrow y'' + \frac{F}{E \cdot I} \cdot y = 0, \quad y(0) = y(x_L) = 0$$

Damit ist eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten für dieses Knickproblem gefunden. Die charakteristische Gleichung dafür lautet:

$$\lambda^2 + \frac{F}{E \cdot I} = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm i \sqrt{\frac{F}{E \cdot I}}$$

$$\Rightarrow y(x) = C_1 \cos\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right) + C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right)$$

Aus den Randbedingungen folgt: $y(0) = 0 \Rightarrow C_1 = 0$. $y(x_L) = 0$ ist hier jetzt nur erfüllbar für $x_L = \pi \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Die Grundlösung erhalten wir für $n = 0$. Wird in dieser Gleichung F kleiner, so wird x_L grösser. Umgekehrt muss man F so gross machen, dass bei einem gegebenen x_L^* das x_L der Formel gleich klein wird, damit die Annahme der Biegelinie (Modellannahme) erfüllt werden kann. Aus der Gleichung $x_L = \pi \sqrt{\frac{E \cdot I}{F}}$ kann man daher die kritische Kraft berechnen, bei welcher die Modellannahme gerade gültig ist. Bei einer grösseren Kraft kann der Stab die Biegung dann nicht mehr im „Gleichgewicht“ halten: Er bricht. Für das kritische F finden wir

$$F_{kritisch} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{x_L^2}$$

Für y ergibt sich:

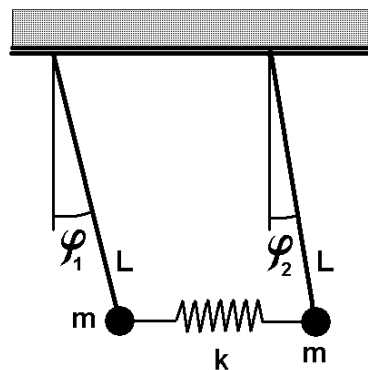
$$y(x) = C_2 \sin\left(\sqrt{\frac{F}{E \cdot I}} \cdot x\right)$$

Der Koeffizient C_2 lässt sich aus unseren Angaben nicht ermitteln.

9.3 Gekoppelte Pendel

9.3.1 Problemmodellierung

Wir betrachten das nebenan gezeigte gekoppelte Pendel. Zwei durch eine Feder mit der Federkonstanten k verbundene Massen m sind an gleich langen Stangen aufgehängt, welche wir als gewichtslos annehmen. φ_1, φ_2 sind die Auslenkungswinkel. Diese nehmen wir als klein an, sodass $L \cdot \sin(\varphi(t))$ den Ausschlag $y(t)$ approximiert und die Höhenänderung $h = L \cdot \cos(\varphi(t))$ einer Masse etwa konstant ist. Nun stellen wir durch Betrachtung der durch die Massen verursachten Drehmomente eine Gleichungen auf:



Gekoppelte Pendel

Rücktreibende Kraft infolge Auslenkung $= -m g \sin(\varphi_2) \approx -m g \varphi_2$.

Rücktreibendes Moment infolge Auslenkung $= -L m g \sin(\varphi_2) \approx -L m g \varphi_2$.

Federkraft $= k L \sin(\varphi_2) \approx k L \varphi_2$.

Entgegengesetzt wirkendes Moment der Feder $\approx -L k L \varphi_2 = -k L^2 \varphi_2$.

Kompensation dieses Moments durch das andere Pendel: $k L^2 \varphi_1$.

Gleichgewicht mit „Trägheitsmoment mal Winkelbeschleunigung“ $= (m L^2) \varphi_2''$.

Gleichung für das zweite Pendel: $(m L^2) \varphi_2'' = -L m g \varphi_2 - k L^2 \varphi_2 + k L^2 \varphi_1$.

Gleichung für das erste Pendel: $(m L^2) \varphi_1'' = -L m g \varphi_1 - k L^2 \varphi_1 + k L^2 \varphi_2$.

Anfangsbedingungen: $\varphi_1(0) = a, \varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(0) = \varphi_2'(0) = 0$

$$\varphi_2''(t) + \frac{g}{L} \varphi_2(t) + \frac{k}{m} \varphi_2(t) - \frac{k}{m} \varphi_1(t) = 0,$$

$$\varphi_1''(t) + \frac{g}{L} \varphi_1(t) + \frac{k}{m} \varphi_1(t) - \frac{k}{m} \varphi_2(t) = 0,$$

$$\varphi_1(0) = a, \varphi_1'(0) = 0, \varphi_2(0) = 0, \varphi_2'(0) = 0$$

9.3.2 Beispiellösung mit *Mathematica*

Input:

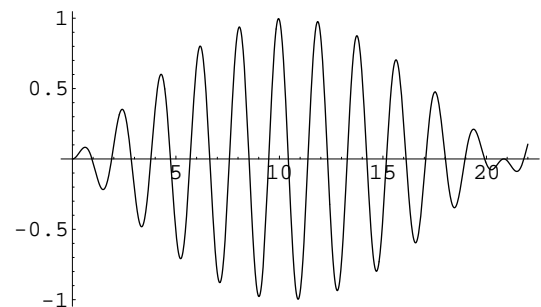
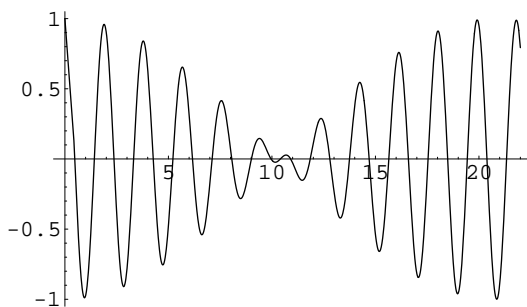
```
Remove["Global`*"];
links1 = LaplaceTransform[y2''[t] + g/L y2[t] - k/m y2[t] + k/m y1[t], t,s] /.
{LaplaceTransform[y1[t],t,s]->Y1[s],
LaplaceTransform[y2[t],t,s]->Y2[s], y1[0]->a, y1'[0]->0, y2[0]->0, y2'[0]->0};
links2 = LaplaceTransform[y1''[t] + g/L y1[t] - k/m y1[t] + k/m y2[t], t,s] /.
{LaplaceTransform[y1[t],t,s]->Y1[s],
LaplaceTransform[y2[t],t,s]->Y2[s], y1[0]->a, y1'[0]->0, y2[0]->0, y2'[0]->0};
solv=Solve[{links1 == 0, links2 == 0},{Y1[s],Y2[s]}] // Flatten;
U1[s]:=Y1[s]/. solv[[1]];
U2[s]:=Y2[s]/. solv[[2]];
u1[t_]:=InverseLaplaceTransform[U1[s],s,t]//Simplify; Print["u1(t) = ",u1[t]];
u2[t_]:=InverseLaplaceTransform[U2[s],s,t]//Simplify; Print["u2(t) = ",u2[t]];
u1P[t]:=u1[t]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1};
u2P[t]:=u2[t]/. {g -> 10, m->1, L->1, k->1, a->1};
Plot[Evaluate[u1P[t]],{t,0,25}];
Plot[Evaluate[u2P[t]],{t,0,25}];
```

Output:

$$u_1(t) = \frac{1}{4}a \left(2 \cos\left(\frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{L}}\right) + e^{-\frac{\sqrt{2kL-gm}t}{\sqrt{L}\sqrt{m}}} + e^{\frac{\sqrt{2kL-gm} t}{\sqrt{L}\sqrt{m}}} \right)$$

$$u_2(t) = \frac{1}{4}a \left(2 \cos\left(\frac{\sqrt{g} t}{\sqrt{L}}\right) - e^{-\frac{\sqrt{2kL-gm}t}{\sqrt{L}\sqrt{m}}} \left(1 + e^{\frac{2\sqrt{2kL-gm}t}{\sqrt{L}\sqrt{m}}} \right) \right)$$

$g > 10$, $m > 1$, $L > 1$, $k > 1$, $a > 1$ ergibt die Plots:



9.4 Weitere Beispiele zur Modellierung

9.4.1 Ausblick auf weitere Beispiele und Themenbereiche

Weitere Beispiele zur hier betrachteten **mathematischen Modellierung** findet man gleich haufenweise in der einschlägigen Literatur, oft auch publiziert und frei zugänglich auf dem Internet. Eine inzwischen recht nützlich gewordene Adresse dort ist Wikipedia. Oder man „googelt“ die Sache. (Auf den allgemeinen, ausufernden Modellierungsbegriff wollen wir hier nicht eintreten.)

Einige Beispiele sind für den zugelassenen Benutzer passwortgeschützt gespeichert und abrufbar unter der Adresse

<http://rowicus.ch/Wir/Scripts/restricted/Linkp1.html>.

Hier noch ohne Anspruch auf Vollständigkeit ein Hinweis auf Themenbereiche aus der Technik und den Wissenschaften, deren Studium sich lohnt:

1. Hilfsmaterial: Diverse Trägheitsmomente von Rotationskörpern
2. Der Raketenflug
3. Der Fallschirmsprung
4. Kräfte am Schwungrad
5. Weitere Biegelinien
6. Weitere Knickprobleme
7. Die Ausflusszeiten von Flüssigkeiten, Fliessprobleme
8. Diverse Federschwingungen
9. Weitere Schwingungsprobleme, z.B. Schiffe, ein Turm u.s.w.
10. Wellenphänomene
11. Diffusionsprobleme
12. Die Temperaturverteilung in einem Stab
13. Wärmeabstrahlung
14. Allgemein das Thema „Modellbildung in der Physik“
15. Chemische Reaktionen
16. Wachstumsprobleme, speziell logistisches Wachstum
17. Populationsdynamik
18. Epidemiemodelle
19. Modelle aus der Pharmakologie
20. Das Räuber–Beute–Modelle, z.B. Lotka–Volterra–Gleichungen und allgemein **autonome Systeme von Differentialgleichungen, Stabilität und Gleichgewichtslösungen**
21. Wettermodelle
22. Modelle aus der Systemtheorie
23. Modelle aus den Wirtschaftswissenschaften
24. Modelle aus den Wirtschaftswissenschaften
25. Modelltheorie in Logik (und formaler Semantik)

Damit ist der Leser angehalten, sich über den bis anhin gebotenen Stoff hinaus eingehend mit der Fachliteratur zu beschäftigen. Diese Beschäftigung ist die eigentliche Tätigkeit während einem „Studium“! Ein kostenfreien Einstieg bietet;

http://de.wikipedia.org/wiki/Mathematisches_Modell.

9.4.2 Bemerkung zu autonomen und dynamischen Systemen

Autonome Systeme sind in der Praxis sehr bedeutsam. Obwohl diese unseren gesetzten Rahmen sprengen, gehen wir der Information wegen noch kurz darauf ein.

Definition: Unter einem autonomen System wollen wir hier ein Differentialgleichungssystem verstehen, in dem eine unabhängigen Variable (hier mit t bezeichnet) nicht explizit vorkommt. Jedoch kommen von t abhängige Variablen x, y, \dots vor sowie auch Ableitungen von diesen nach t .

Beispiel eines einfachen, allgemeinen, explizit gegebenen autonomen Systems 1. Ordnung:

$$\begin{cases} x_t' = f(x, y) \\ y_t' = g(x, y) \end{cases}$$

Statt x_t' und y_t' benutzt man vor allem in der Physik auch die Bezeichnungen \dot{x} und \dot{y} . f und g sind gegebene **vernünftige** Funktionen.

Die Lösung in unserem Beispiel kann man als Vektor $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ verstehen. Damit haben wir **Kurven** oder **Bahnen** über einem Intervall I für $t \in I$. Da wir hier in der Regel Anfangswertprobleme betrachten, können wir von $I = [0, \infty]$ ausgehen. Allgemeiner und trivialerweise gilt jedoch:

Mit einer Lösung $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ ist auch $\begin{pmatrix} x(t-c) \\ y(t-c) \end{pmatrix}$ Lösung, wobei c eine Konstanten ist.

Wegen $\frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{dy}{dx}$ gilt:

$$y_x' = \frac{g(x, y)}{f(x, y)}, \quad |g(x, y)| + |f(x, y)| > 0$$

An den Punkten (x, y) , an denen y_x' definiert ist, hat man lokal eine eindeutige Lösung. An den Punkten (x_k, y_k) mit $|g(x_k, y_k)| + |f(x_k, y_k)| = 0$, d.h. für $g(x_k, y_k) = f(x_k, y_k) = 0$, wo also y_x' nicht definiert ist, können sich die Lösungskurven jedoch schneiden.

Definition: Konstante Lösungen $v(\vec{t}) = \vec{a}$ heissen **Gleichgewichtslösungen** oder **stationäre Lösungen**.

Da für Gleichgewichtslösungen $v(\vec{t})' = \vec{a}' = \vec{0}$ gilt, definieren wir:

Definition: Punkte $P(x_k, y_k)$ mit $\vec{OP} = \vec{a} = \vec{0}$ stationäre Lösung heissen **Gleichgewichtspunkte** oder **stationäre Punkte**.

In stationären Punkten muss eine Lösung nicht mehr eindeutig sein. Es können sich dort mehrere Bahnkurven treffen.

Weiter definieren wir selbstverständlich:

Definition: Gleichgewichtspunktfreie Lösungen mit geschlossenen Bahnkurven nennen wir **periodische Lösungen**.

Geschlossene Bahnkurven können wegen der Definition des Funktionsbegriffs nicht in der Form $y = f(x)$ dargestellt werden. Eine vereinfachte Parametrisierung mit $x = t$ ist daher nicht allgemein möglich.

Wir betrachten nun konkret ein einfaches, jedoch instruktives **Beispiel**:

$$\begin{cases} x_t' = -2y \\ y_t' = +3x \end{cases}$$

Daraus erhalten wir: $y_x' = -\frac{3x}{2y} \Rightarrow y dy = -\frac{3}{2} x dx \Rightarrow \int y dy = -\frac{3}{2} \int x dx + C$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} y^2 = -\frac{3}{2 \cdot 2} x^2 + C \Rightarrow y_{1,2}(x) = \pm \sqrt{C - \frac{3}{2} x^2} \text{ oder } \frac{y^2}{C \cdot 3} + \frac{x^2}{C \cdot 2} = 1 \rightsquigarrow \text{Ellipse!}$$

Im weiteren Rahmen sind autonome Systeme Spezialfälle von **dynamischen Systemen**. Solche wiederum sind mathematische Modelle von zeitabhängigen Prozessen. Beispiele dafür finden wir bei Pendelbewegungen, in Klimamodellen oder in der theoretischen Biologie z.B. bei Räuber-Beute-Modellen, bei Epidemien, allgemeiner bei Populationsdynamik oder auch bei chemischen Reaktionen.

Ein damit in Zusammenhang stehender Begriff ist noch der des Phasenraums (Zustandsraum). Dabei handelt es sich um einen mathematischen Raum, der von den zeitlich veränderlichen Variablen eines dynamischen Systems aufgespannt wird.

Bezüglich der heute sehr zahlreich vorhandenen Literatur über dynamische Systeme ist der Leser gebeten, sich selbst auf die Suche nach einem für ihn in seiner jeweiligen Situation zu seinen Voraussetzungen passenden geeigneten Werkes zu machen. Dasselbe gilt für die im Zusammenhang mit autonomen Systemen wichtige Frage der **Stabilität der Lösungen**.

Kapitel • Chapitre 10

Anhang 4 — Annexe 4

10.1 Hinweise – Indications

10.1.1 Häufig verwendete Abkürzungen – Abréviations fréquemment utilisées

Vor. • *Hyp.*
Beh. • *Thèse*
Bew. • *Pre.*
 $\vec{x} \cdot \vec{y}, \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle$
...

Voraussetzung • *Hypothèse*
Behauptung • *Thèse*
Beweis • *Preuve*
Skalarprodukt • *Produit scalaire*
...

10.1.2 Literatur — Littérature

Hier eine kleine Auswahl, die jeweils den grössten Teil des gesamten Stoffes abdeckt:

...
Leupold u.a., *Mathematik 1, 2*
Swobowsky, *Analyse*
Swobowsky, *Calculus*
Glyn James, *Modern Engineering Mathematics*,
Glyn James, *Advanced Modern Engineering Mathematics* ...

• *Voilà un choix limité qui concerne la plus grande partie de la matière:*

...
Leupold u.a., Mathematik 1, 2
Swobowsky, Analyse
Swobowsky, Calculus
Glyn James, Modern Engineering Mathematics,
Glyn James, Advanced Modern Engineering Mathematics ...

Ende • Fin