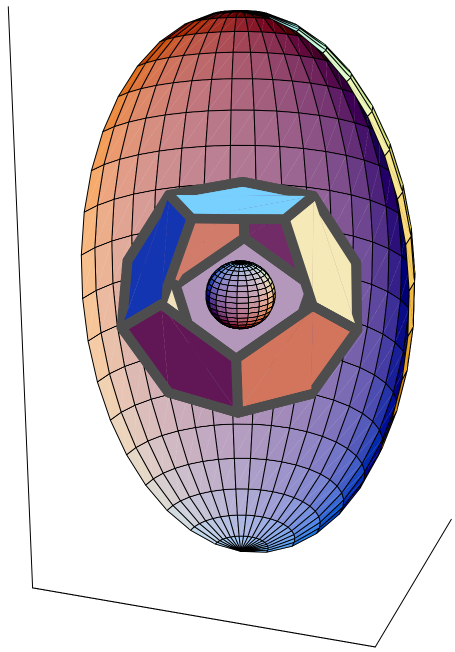
Mathematikkurs für Ingenieure ◇ Teil 6 ◇ Kombinatorik



von

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel

Nach den NeXT–Crash von 1999 restaurierte Ausgabe

V.1.2.1 d/f 25. Mai 2005 **!Draft! Deutsche Version!** V.1.2.1 d/f

WIR/NeXT/93/01/05/LaTex/Teil6.tex

Teil 6 eines Repetitoriums und Textbuchs zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer/ PCTeX WIN98.
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.

1999 hat der Autor einen Computer–Crash erlebt. Infolge des dadurch provozierten Systemwechsels haben einige Graphiken sehr gelitten. Sie werden neu erstellt, sobald die Zeit dafür vorhanden ist.

Glück hilft manchmal, Arbeit immer ...

Brahmanenweisheit

Adresse des Autors:

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Hochschule für Technik und Architektur, Berner Fachhochschule
Quellgasse – Rue de la source 21
Postfach – case postale 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 266 111, neu 3216 111

Kombinatorik: Probleme mit ganzen Zahlen — Analyse combinatoire: Problèmes concernant les nombres entiers

Abbildung 1: . . . Wie ordne ich das Chaos? . . . • *Comment mettre de l'ordre dans le chaos? . . .*

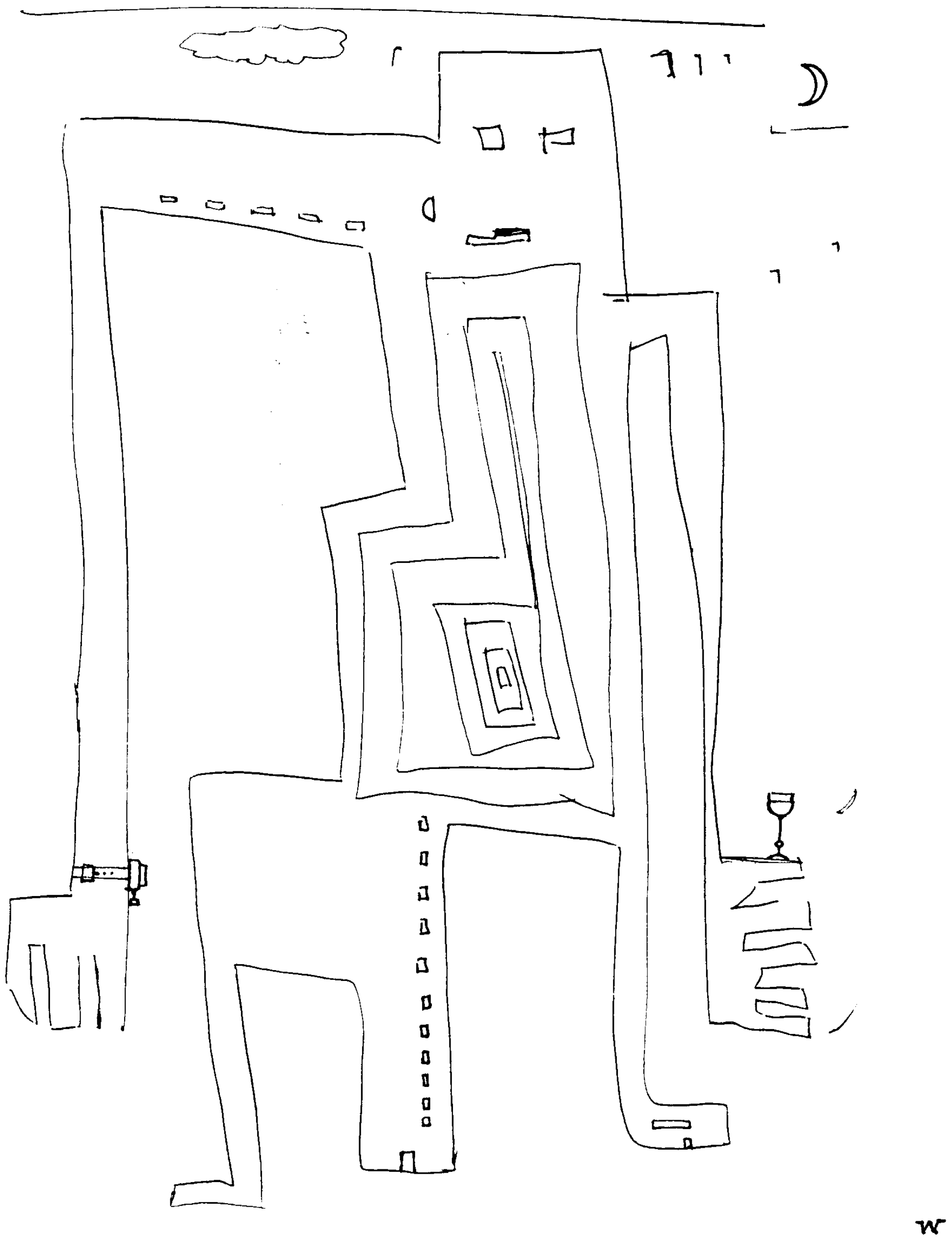
Kurzes technisches Lachen:
"Ha!"

Ist das mathematisch
wohl ein Gebiet?

Inhaltsverzeichnis

Abbildung 2: … weil leere Seiten so langweilig sind … • *Parce que les pages vides sont si ennuyeuses*

"Auf das nächste Mal Seite 54 lesen!"
– "Aus welchem Buch bitte?"
"Das Buch? Ah! – Den Titel hab ich vergessen. Doch Sie werden das Buch bestimmt selber finden können. Ich weiss nur noch, dass es 1962 in Wien erschienen ist."



Mitternachtstanz des Wolkenkratzermenschen

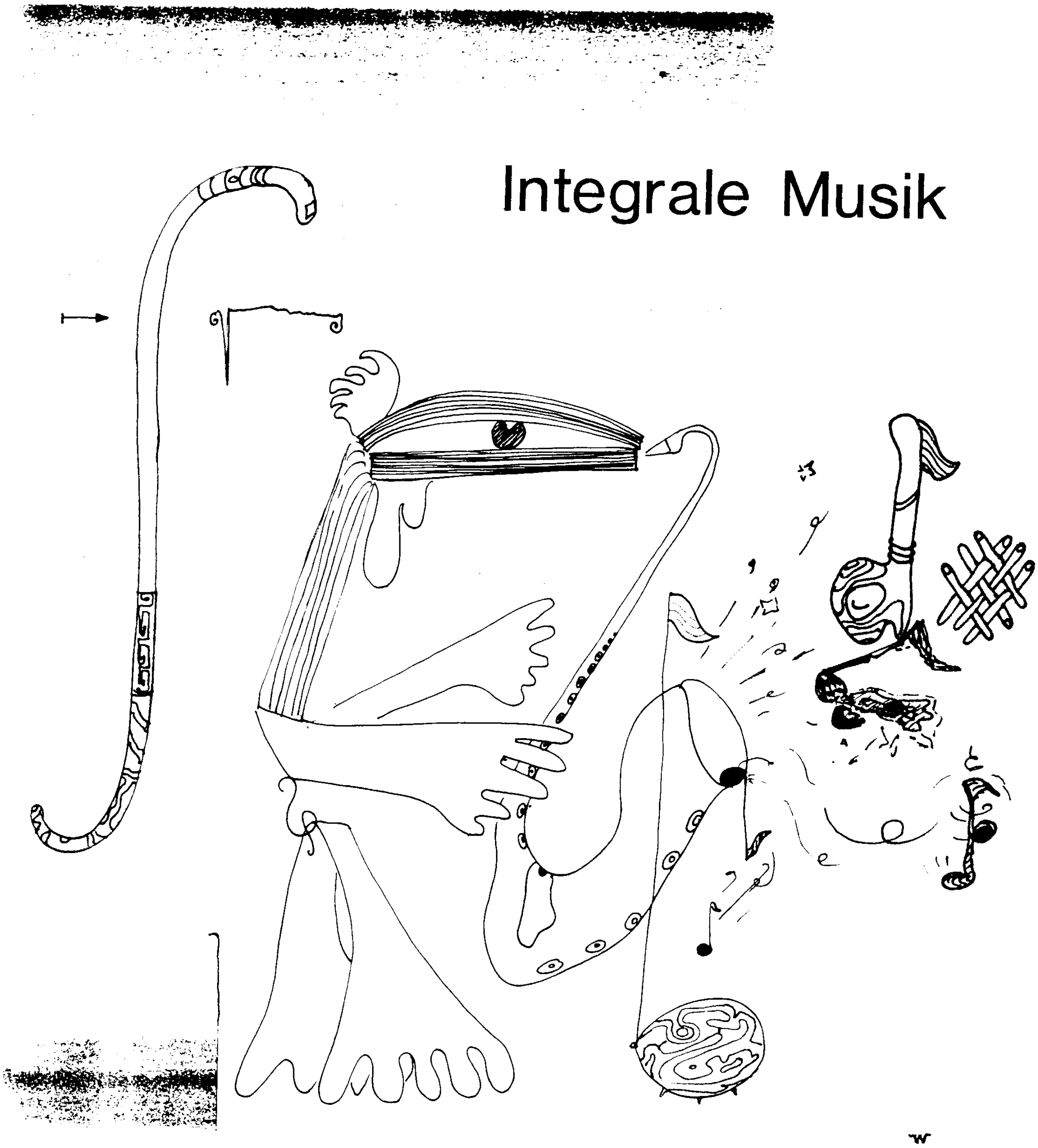
Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

Das Thema *Kombinatorik* ist ein klassischer Bestandteil des Mittelschullehrplans. Auch an Berufsmittelschulen sollte es eigentlich behandelt werden. Doch was, wenn ein Student aus irgendwelchen Gründen gerade diesem Stoff an der Schule nie begegnet ist — oder ihn vergessen hat? Dann heisst es eben nacharbeiten und repetieren. Daher ist dieser Text als *Repetitorium* und als *Ausbau* gedacht.
Die Wichtigkeit der Kombinatorik für den Weg durch die weitere Mathematik ist unbestritten. Sie ist ein Werkzeug zur Lösung von Problemen, die manchmal unverhofft an einem herantreten. Geradezu grundlegend ist das Thema aber für das Wissensgebiet „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik".
Dieser Text ist in Skriptform abgefasst. Das bedeutet, dass er in äusserst knapper Fassung nur das wesentliche Skelett des zu lernenden Stoffes wiedergibt. Für weitere, ausführliche Erklärungen, Beispiele, exakte Beweise und ergänzende Ausführungen ergeht daher an den Studenten der Rat, ein oder mehrere Lehrbücher beizuziehen. Studieren bedeutet zu einem wesentlichen Teil, sein Wissen selbständig mit Hilfe der Literatur zu erweitern, streckenweise sogar selbständig zu erarbeiten, zu festigen und anzuwenden. Ein Skript ist dabei nur ein Wegweiser und nie ein Lehrbuchersatz. Welche Lehrbücher jemand verwenden will, ist jedem freigestellt. Das Thema Kombinatorik findet man in praktisch allen Unterrichtswerken für die klassische Gymnasialstufe. Bezüglich der Fachhochschulliteratur sei auf das Beilpiel Brenner, Lesky, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1 (Bibl.: brennerlesky) verwiesen.

Im Sommer 1996 Der Autor

Abbildung 3: . . . ohne Worte . . . • *sans mots ldots*



Kapitel 1

Kombinatorik

1.1 Einleitung

1.1.1 Problemstellung

Im Stoffgebiet *Kombinatorik* behandeln wir die 6 Typen der klassischen *Anzahlprobleme*. Dabei geht es um folgende Kategorie von Fragestellungen: Wir fragen nach der *Anzahl* der Möglichkeiten, aus einer endlichen Menge M nach einer gewissen Vorschrift Elemente *auszuwählen*, diese ev. *anzuordnen* oder die Menge *in Klassen einzuteilen.* Dabei können sich Elemente *wiederholen* – oder nicht. Da das Resultat y jeweils eine natürliche Zahl ist, reden wir auch von **Anzahlfunktionen** $M \longmapsto y$.

1.1.2 Fakultäten

In der Kombinatorik spielt der Begriff *Fakultät* eine grosse Rolle. Man definiert die *Fakultäten induktiv*[1] durch die folgende *Rekursion*:

Definition 1.1 (Fakultät:)

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0! := 1 & \textit{(Verankerung)} \\ f(n) = n! := n \cdot (n-1)! & \textit{(Vererbung)} \end{array}$$

Bemerkungen:

1. Es gilt dann: $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$. (Siehe([2]).)
   Daraus ergibt sich: $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ etc..

2. Der Begriff *Rekursion* hat sich heute in der *Informatik* sehr stark verbreitet. Man versteht dort darunter *die Definition einer Funktion oder eines Verfahrens durch sich selbst* (vgl. dazu z.B. Claus, Schwill, Bibl.: clausschwill). Man darf den Begriff *Rekursion* in diesem hier verwendeten einfachen Sinne jedoch nicht verwechseln mit den in der höheren Mathematik gebräuchlichen, etwas schwierigen Begriffen *allgemeine Rekursion*, *primitive Rekursion*, *rekursive Funktion* (in der Zahlentheorie), *rekursive Relation* (in verschiedenem Sinne in Logik und Mengenlehre). Vgl. dazu Fachlexikon *a b c*] (Bibl.: abc), Iyanaga, Kawada (Bibl.: iyanagakawada) und Meschkowski (Bibl.: meschkowski).

Wir halten fest:

[1] Nach dem Schema der vollständigen Induktion, vgl. Thema *natürliche Zahlen, Induktionsaxiom* (eines der Axiome aus dem System von Peano).

[2] $\prod$ steht für *„Produkt“*.

Definition 1.2 (Rekursion (Informatik))
Unter **Rekursion** *verstehen wir hier die Definition einer Funktion oder eines Verfahrens durch sich selbst.*

Beispiel: Aus der Definition von $n!$ ergibt sich: $f(n) = n \cdot f(n-1)$. Die Funktion an der Stelle n wird also durch die Funktion (also durch sich selbst) an der Stelle $n-1$ definiert.
Die Werte $f(n) = n!$ werden sehr rasch sehr gross. z.B. ist:

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \approx 8.15915\, 10^{47}.$$

Ein einfaches Programm auf einem Rechner kann daher schnell Probleme machen. Hier ist eine Formel von *Stirling* hilfreich (ohne Beweis):

Satz 1.1 (Formel von Stirling:)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

e ist hier die Eulersche Zahl: $e \approx 2.718281828459045235360287471352$ (auf 30 Stellen)

1.2 Anordnungsprobleme

1.2.1 Permutationen ohne Wiederholung

Paradigma (Beispiel eines praktischen Problems) [3]

Problem 1.1 (Sitzmöglichkeiten:)

Situation: *In einem Klassenzimmer befindet sich nichts ausser 26 nummerierten Stühlen. Die Nummern gehen von 1 bis 26. Pulte, Bänke und Tische hat man nach draussen gebracht. Vor der Tür warten 26 Studenten. Zur besseren Unterscheidbarkeit und Benennung erhält auch jeder Student eine verschiedene Nummer von 1 bis 26, mit der er aufgerufen wird.*

Frage: *Auf wieviele Arten kann man die 26 Studenten auf die 26 Stühle setzen, d.h. wieviele Sitzordnungen gibt es?*

Lösung:

- Der Student Nr. 1 kommt herein. Er findet 26 freie Stühle vor. Somit hat er für sich 26 Sitzmöglichkeiten.
- Der Student Nr. 2 kommt herein, Student Nr. 1 sitzt auf irgend einem Stuhl. Student Nr. 2 findet nur noch 25 freie Stühle vor. Somit hat er für sich nur noch 25 Sitzmöglichkeiten. Diese 25 Sitzmöglichkeiten hat er aber bei jeder Platzierung von Student Nr. 1, welcher sich auf 26 verschiedene Arten platzieren konnte. Zur ersten von Student Nr. 1 benutzten Möglichkeit hat Student Nr. 2 nun 25 Möglichkeiten, zur zweiten Möglichkeit von Student Nr. 1 hat Nr. 2 nun 25 Möglichkeiten, etc., zur letzten Möglichkeit von Student Nr. 1 hat Nr. 2 wiederum 25 Möglichkeiten. Zusammen haben beide also $26 \cdot 25$ Möglichkeiten. Die Anzahlen der Möglichkeiten multiplizieren sich!
- Der Student Nr. 3 kommt herein. Die Studenten Nr. 1 und Nr. 2 sitzen bereits. Student Nr. 3 findet nur noch 24 freie Stühle vor. Somit hat zu jeder der $26 \cdot 25$ Sitzmöglichkeiten der beiden ersten Studenten noch 24 Möglichkeiten. Zusammen haben sie also $26 \cdot 25 \cdot 24$ Möglichkeiten, da sich ja die Anzahlen der Möglichkeiten multiplizieren.
- So geht es dann weiter. Schliesslich kommt der Student Nr. 25 herein. Er hat bei jeder der Sitzmöglichkeiten der vorher hineingegangenen Studenten noch 2 freie Plätze zur Auswahl. Total haben also die 25 ersten Studenten $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2$ Sitzmöglichkeiten.

[3] Ein Paradigma ist ein Lehrbeispiel

- Endlich kommt der letzte Student mit der Nummer 26 herein. Er hat bei jeder der Sitzmöglichkeiten der andern Studenten noch einen freien Platz zur Auswahl. Total haben somit die 26 Studenten $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 26!$ Sitzmöglichkeiten.

Bemerkung: Falls in einer Menge von Individuen jedes Element (Individuum) einen unterscheidbaren Namen trägt, so kann man die Elemente auch den „Namen nach", d.h. alphabetisch ordnen, so wie in einem Lexikon: A... kommt vor B... etc., Aa... vor Ab... etc.. In einem solchen Fall spricht man von einer *lexikographischen Anordnung.*

Zum Nachdenken:
Falls die Klasse in 10 Sekunden einen Platzwechsel schafft, so braucht sie also $10 \cdot 26!$ Sekunden für alle Platzwechsel. Das sind $\frac{10 \cdot 26!}{60 \cdot 60 \cdot 24 \cdot 365}$ Jahre $= 1.2783 10^{20}$ Jahre. Vergleich: Das Alter des Universums bei der Urknalltheorie wird gegenwärtig auf ca. 1 bis 2 mal 10^{10} Jahre geschätzt[4]. Um die Sitzordnungen alle ohne Pause zu realisieren, bräuchte es also etwa 10^{10} mal soviel Zeit, wie das Universum alt ist!

Verallgemeinerung des Problems:
Statt mit 26 Studenten kann man das Problem gleich allgemein mit n Studenten lösen. In der Argumentation ist dann 26 durch n, 25 durch $n-1$ etc. zu ersetzen. Man erhält schliesslich so total $(n!)$ Möglichkeiten, n Studenten auf n Plätze zu setzen.

Das abstrakte Problem

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{M}_n$ mit n Elementen, welche durchnummeriert sind mit den Nummern von 1 bis n. $\mathcal{M}_n$ entspricht der Menge der Studenten im vorherigen Beispiel. Dadurch hat man eine bijektive Zuordnung der nummerierten Elemente n_k zur Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. (Damit hat man eine bijektive Funktion). Da die Zuordnung eineindeutig ist, können wir die n_k jeweils gerade durch k ersetzen, ohne das Problem zu verändern: $\mathcal{M} = \mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Gesucht ist nun die Anzahl der Möglichkeiten, die Menge $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ auf sich selbst abzubilden, d.h. im obigen Problem die Menge der Nummern der Studenten $\mathbf{N}_n$ der Menge der Nummern der Stühle $\mathbf{N}_n$ zuzuordnen.

Sei $\sigma(k)$ bei einer solchen Zuordnung (im obigen Problem eine Sitzmöglichkeit) das Bild (oben die Stuhlnummer) von k (k entspricht oben der Nummer des Studenten). Dann wird also durch eine solche Zuordnung σ die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (oben die Menge der Studenten) der Menge $\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)\}$ (oben die Stühle) zugeordnet. Schreibt man die Bilder $\sigma(k)$ unter die Urbilder k, so erscheint die durch σ ausgesonderte Relationsmenge in folgender Gestalt:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Damit ist also eine Teilmenge von $\mathbf{N}_n \times \mathbf{N}_n$ gegeben, für die die Relation „Funktion σ" zutrifft.
Durch das folgende Schema wird daher eine neue Anordnung $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)$ der Elemente $1, 2, 3, \ldots, n$ definiert.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Wir sagen:

Definition 1.3 (Permutation:)
Die Anordnung $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)$ *der Elemente aus* $\mathbf{N}_n$ *heisst* **Permutation** $\mathcal{P}$ *der Anordnung* $(1, 2, 3, \ldots, n)$ *dieser Elemente.*

[4] Die Fachleute streiten sich allerdings über diesen Wert. Je nach Wissensstand wird er laufend berichtigt.

Um eine Permutation zu geben, können wir auch schreiben:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge der Spalten kann beliebig sein.

Beispiel: Durch die folgende Anordnung ist eine solche Permutation gegeben:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 wird auf 4, 2 auf 1 u.s.w.. abgebildet. Nun können wir unser Problem mit den Studenten und den Stühlen abstrakt und allgemein stellen:

Problem 1.2
Permutationen ohne Wiederholung:
Frage: *Wieviele Permutationen $\mathcal{P}$ der Nummern $1, 2, \dots, n$ gibt es?*
Oder anders gefragt: Wieviele Anordnungsmöglichkeiten der Zahlen $1, 2, \dots, n$ in einer Reihe gibt es?
Oder nochmals anders gefragt: Wieviele bijektive Funktionen $\mathbf{N}_n \longmapsto \mathbf{N}_n$ gibt es?

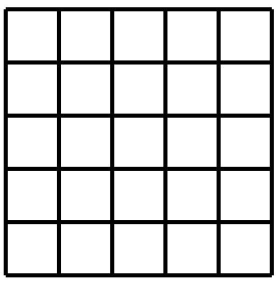
Symbole 1 *:* $P(n)$
Sei $P(n) =$ Anzahl Permutationen der Elemente von M_n der natürlichen Zahlen von 1 bis n.

Nun wissen wir:

Satz 1.2
Permutationen ohne Wiederholung:

$$P(n) = n!$$

Abbildung 1.1: Teilflächen, verschieden zu färben ...• *Surfaces partielles, à colorer de manière différente...*



Beispiel: Wieviele Möglichkeiten gibt es, die in 1.1 gezeigten Teilflächen mit verschiedenen Farben zu färben? – Bei einer Färbung werden den 25 verschiedenen Flächen 25 verschiedene Farben zugeordnet. Statt Flächen und Farben kann man auch nur die Nummern 1 bis 25 betrachten. Man hat also eine bijektive Abbildung einer Menge $\mathcal{M}_{25}$ oder von $\mathbf{N}_{25}$ auf sich. Es wird also nach $P(25) =$ Anzahl Permutationen von $1, 2, 3, \dots, 25$ gefragt. Das gibt $25! \approx 1.55112 \cdot 10^{25}$. Wie lange hätte wohl einer, um alle Möglichkeiten auszuprobieren?

1.2.2 Permutationen mit Wiederholung

Paradigma

Problem 1.3
Vertauschungsmöglichkeiten von Briefen:

Situation: *Ein Personalchef hat 20 verschiedene Briefe geschrieben. Davon sind 7 identische Kopien eines Informationsschreibens an eine Gruppe von Mitarbeitern, die andern 13 Briefe sind vertrauliche und persönliche Antworten in Lohnfragenen anderer Mitarbeiter. Die zugehörigen 20 Couverts liegen ebenfalls bereit.*

Frage: *Wieviele Möglichkeiten hat die Sekretärin, die Briefe zu verschicken, sodass für sie Probleme entstehen könnten?*

Lösung: Wenn alle Briefe verschieden wären, so hätte sie 20! Möglichkeiten, die Briefe in Couverts zu stecken. Da nur eine Möglichkeit akzeptiert werden kann, führen dann $(20! - 1)$ Möglichkeiten zu Problemen.
Wenn nun 7 Briefe gleich sind, können diese 7 Briefe unter sich vertauscht werden, ohne dass ein Problem entsteht. Man kann das auf 7! Arten tun. Wenn nun X die Anzahl der Platzierungsmöglichkeiten der 13 verschiedenen Briefe in den 20 Couverts ist, so können zu jeder der X Möglichkeiten der verschiedenen Briefe die restlichen, gleichen Briefe auf $Y = 7!$ Arten unter sich vertauscht werden, ohne dass etwas passiert. Da das bei jeder der X Möglichkeiten der Fall ist, *multiplizieren sich die Anzahlen der Möglichkeiten zur Gesamtzahl der Möglichkeiten.* Andere Vertauschungsmöglichkeiten als die hier vorkommenden hat man nicht. Somit gilt: $20! = X \cdot Y = X \cdot 7!$ und damit $X = \frac{20!}{7!}$.
Die Anzahl unerwünschter Möglichkeiten ist somit $X - 1 = \frac{20!}{7!} - 1 = 482718652416000 - 1 \approx 4.82719\,10^{14}$.

Verallgemeinerung des Problems:
Wir gehen wieder von 20 Briefen aus, 7 davon gleich, die wir zur *Klasse* 1 zusammenfassen. Weiter sei jetzt nochmals ein spezieller Brief da, zu welchem sich noch zwei gleiche finden. Diese 3 seinen in einer *Klasse* 2 zusammengefasst. Dann finden wir nochmals 4 gleiche, die in einer *Klasse* 3 zusammengefasst werden. Sei nun Y_i die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten der Briefe in der *Klasse* i unter sich und X wie vorhin die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten der restlichen ungleichen Briefe. Dann gilt aus demselben Grunde wie oben:

$$20! = X \cdot Y_1! \cdot Y_2! \cdot Y_3! = X \cdot 7! \cdot 3! \cdot 4!, \quad \text{also}$$

$$X = \frac{20!}{7! \cdot 3! \cdot 4!}$$

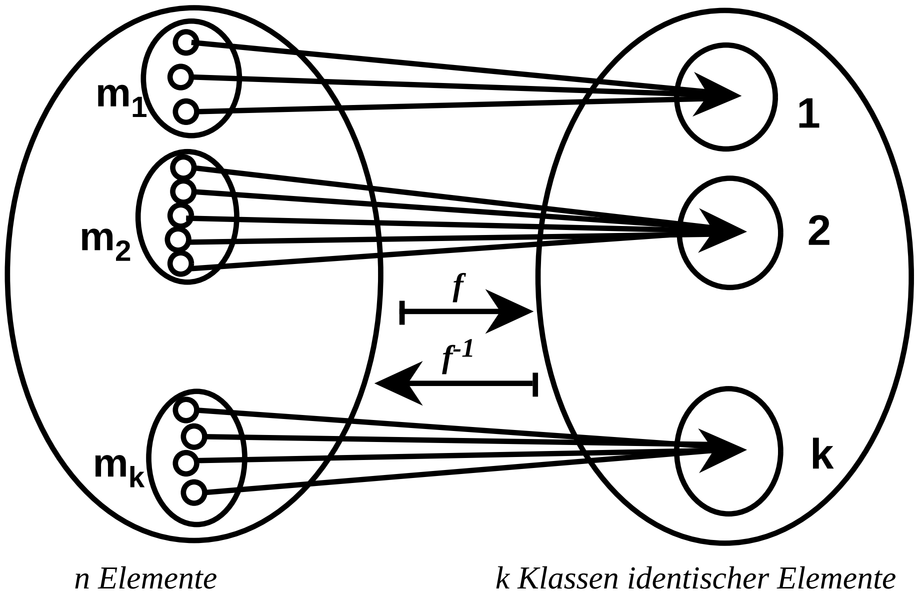
Das führt uns auf folgendes allgemeinere Problem:

Gegeben:
Total n Briefe, n Couverts, davon k Klassen je unter sich gleicher Briefe wie folgt:
$Klasse_1$: m_1 gleiche Briefe vom Typ 1 ,
$Klasse_2$: m_2 gleiche Briefe vom Typ 2 ,
$\vdots$ $\vdots$
$Klasse_k$: m_k gleiche Briefe vom Typ k

Gesucht: Anzahl Möglichkeiten $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, die Briefe in die Couverts zu platzieren.

Symbole 2 *:* $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$
$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$ = *Anzahl Möglichkeiten, die eben beschriebenen n Objekte (hier Briefe, wobei k Klassen mit je n_j gleichen Objekten darunter sind) auf n Plätze (hier Couverts) zu platzieren.*

Abbildung 1.2: Anzahl möglicher Umkehrabbildungen f^{-1}? • *Possibilités d'applications inverses f^{-1}?*



Definition 1.4 (Permutat. m. Wiederholung:) *Gegeben sei eine Menge $\mathcal{M}_n$ mit n Elementen. Darin seinen k $Klassen$ mit je n_i gleichen Elementen (pro $Klasse\, i$) enthalten. Bei der Nummerierung der Elemente erhalten alle Elemente einer Klasse dieselbe Nummer. Eine Permutation der Elemente von $\mathcal{M}_n$ nennen wir* **Permutation mit Wiederholung**.

Wir wissen jetzt:

Satz 1.3 (Permutationen mit Wiederholung) *:*
Anzahl der Permutationen mit Wiederholung:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_k!}$$

Das abstrakte Problem

Gegeben: Eine Menge mit n Elementen, z.B. $\mathbf{R}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sowie eine Menge mit k Elementen, z.B. $\mathbf{R}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $n \geq k$. Man betrachte dann die möglichen Funktionen $f : \mathbf{R}_n \longmapsto \mathbf{R}_k$ (ein Beispiel ist in Abb. 1.2 dargestellt).

Gesucht: Anzahl möglicher Umkehrabbildungen $f^{-1} : \mathbf{R}_k \longmapsto \mathbf{R}_n$. Dabei wird das erste Element (1 rechts im Bild) m_1 mal abgebildet, das zweite Element (2 rechts im Bild) m_1 mal u.s.w..

Es werden also die k Klassen gleicher Elemente (gleiche Briefe im Paradigma) auf die n verschiedenen Elemente (Couverts im Paradigma) abgebildet. Die gesuchte Anzahl ist dann $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.

Beispiel: Auf wieviele Arten lassen sich in einer Klasse mit 26 Studenten 5 Arbeitsgruppen mit 4, 5, 5, 6 und 6 Studenten bilden? Die Lösung ist:

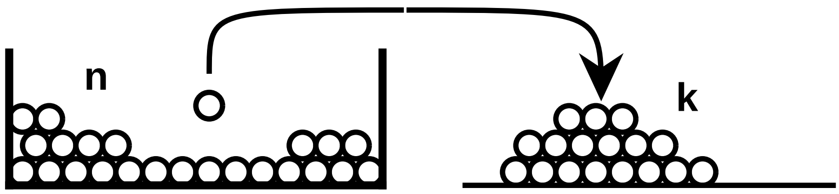
$$P_{26}(4, 5, 5, 6, 6) = \frac{26!}{4! \cdot 5!^2 \cdot 6!^2} = 2251024905729600 \approx 2.25102\, 10^{15}$$

1.3 Auswahlprobleme mit und ohne Anordnung

1.3.1 Die Fragestellungen

Kombinationen

Abbildung 1.3: Auswahlproblem, Kombinationen • *Problème de sélection, combinaisons*



Problem 1.4 (Auswahlproblem:)

Gegeben: *Eine Kiste mit n wohlunterscheidbaren Objekten, z.B. verschiedenfarbigen Kugeln. Aus der Kiste werden dann auf eine beliebige Art und Weise k Objekte herausgegriffen und nebenan aufgehäuft. (Vgl. Abb. 1.3.)*

Frage: *Auf wieviele Arten sind solche Haufenbildungen nebenan möglich?*

Wohlverstanden spielt bei der Haufenbildung die Anordnung der Objekte resp. der Kugeln keine Rolle. Dieses Problem lässt sich ohne viel Denkaufwand gleich abstrakt stellen. Die Kugeln in der Kiste bilden eine Menge $\mathcal{M}_n$, z.B. $\mathcal{M}_n = \mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Herausgegriffen wird eine Teilmenge $\mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}_n$, z.B. $\mathbf{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \leq n$. Diese Teilmenge bildet den Haufen nebenan.

Definition 1.5
Kombination ohne Wiederholung
Eine solche Auswahl von k Elementen aus $\mathcal{M}_n$ heisst **Kombination k–ter Ordnung ohne Wiederholung** *bei n Elementen, kurz: Kombination k–ter Ordnung.*

Symbole 3 (Anzahl Kombinationen:)
$C(k, n) =$ *Anzahl Kombinationen k–ter Ordnung bei n Elementen.*

Abstraktes Problem (Kombinationen ohne Wiederholung):

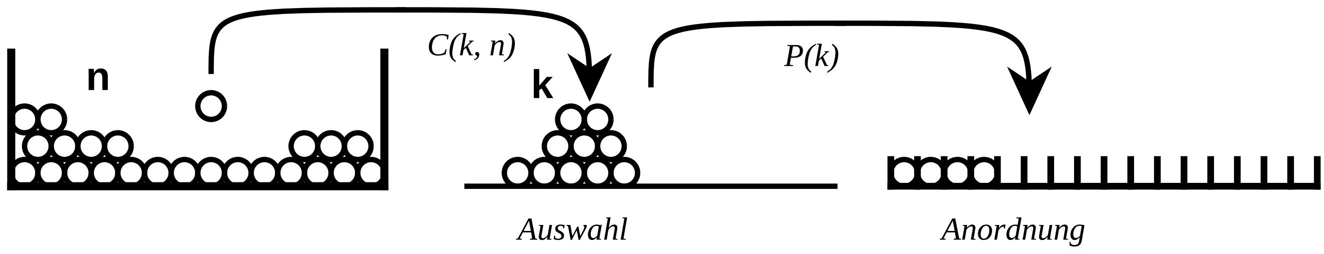
Gegeben: Eine Menge $\mathcal{M}_n$ mit n Elementen.
Frage: $C(k, n) = \,?$ D.h. wieviele Teilmengen mit genau k Elementen kann man bilden?

Variationen

In Abb. 1.4 wird die Auswahl (Kombination) anschliessend noch angeordnet. Zwei solche Kombinationen mit denselben Elementen, aber verschiedener Anordnungen sind jetzt unterscheidbar. Man definiert daher:

Definition 1.6
Variation ohne Wiederholung:
Werden die aus $\mathcal{M}_n$ ausgewählten Elemente (die Kombination also) noch angeordnet, so spricht man von einer **Variation k–ter Ordnung ohne Wiederholung** *bei n Elementen. Kurz: Variation k–ter Ordnung.*

Abbildung 1.4: Relationsmenge, Abbildung • *Ensemble de relations et d'applications (choix, disposition)*



Symbole 4 (Anzahl Variationen:)
$V(k, n) =$ *Anzahl Variationen k–ter Ordnung bei n Elementen.*

Beispiel:

Gegeben seien die Elemente a, b und c. Gesucht sind alle Kombinationen und Variationen 2–ter Ordnung.

Lösung:

Kombinationen :	$a\ b$	$a\ c$	$b\ c$:	3 Stück.
Variationen:	$a\ b$	$a\ c$	$b\ c$	
	$b\ a$	$c\ a$	$c\ b$:	6 Stück.

Wiederholungen

Ersetzt man in der Vorratsmenge $\mathcal{M}_n$ jedes der Elemente e_i durch eine Menge E_i mit gleichen Elementen, die sich nur durch einen *internen Index* unterscheiden (z.B. $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \ldots\}$), so wird es möglich, ein Element e_i mehrmals auszuwählen, wobei der interne Index nach der Auswahl wieder weggelassen werden kann[5]. Denselben Effekt erzielen wir, wenn wir nach der Auswahl eines Elementes eine identische Kopie dieses Elementes wieder zurücklegen. Wir stellen uns also vor, dass sich ein Element e_i bei seiner Auswahl dupliziert, sodass trotz Auswahl und Entfernung des Elements die Menge $\mathcal{M}_n$ unverändert bleibt. Ein Element wird also bei der Auswahl und Entfernung aus $\mathcal{M}_n$ sofort wieder in $\mathcal{M}_n$ nachgeliefert, etwa so wie bei einem bestimmten Artikel im Regal eines gut geführten Selbstbedienungsladens, wo die Regale immer sofort wieder aufgefüllt werden. Falls dieses Auffüllen, Duplizieren, Kopieren oder Zurücklegen beliebig oft möglich ist, so sagen wir, die Elemente in $\mathcal{M}_n$ seien *wiederholt auswählbar*. Wir definieren nun:

Definition 1.7
Kombination und Variation mit Wiederholung:
Sind bei der Bildung einer Kombination oder einer Variation die Elemente aus $\mathcal{M}_n$ wiederholt auswählbar, so spricht man von einer Kombination oder einer Variation **mit Wiederholung**.

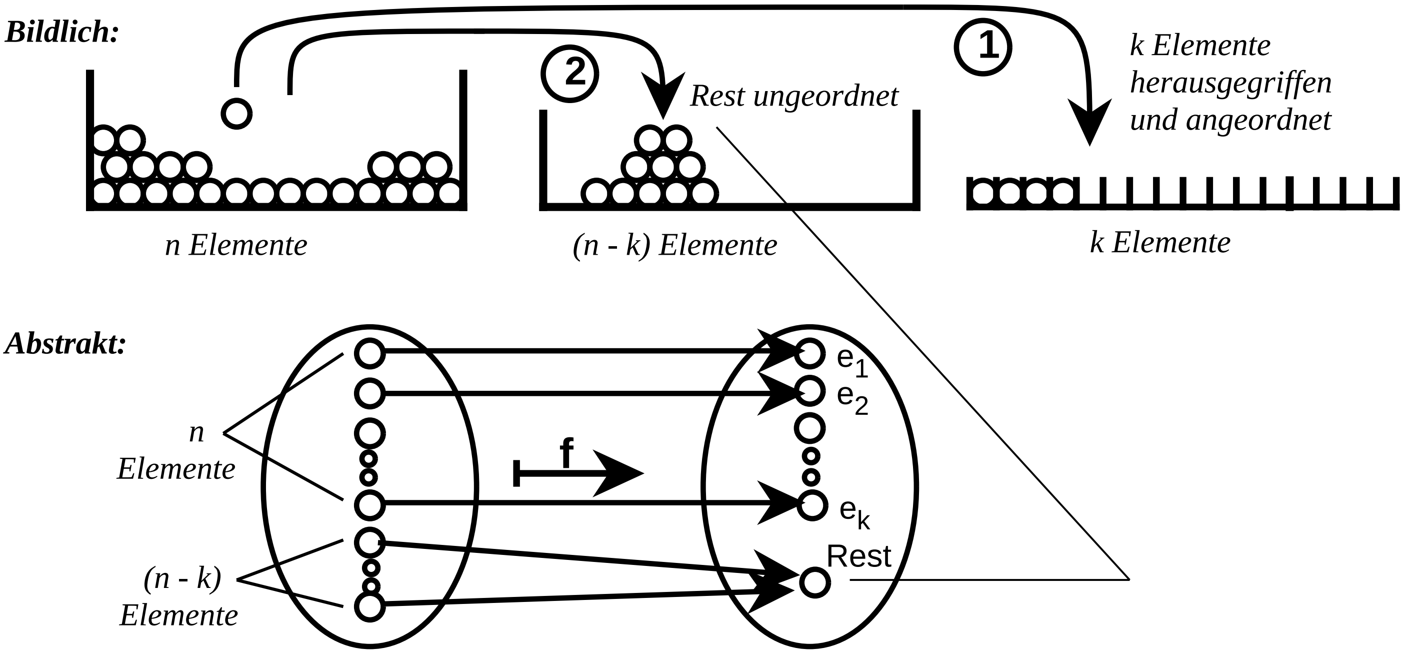
Wir beginnen nun mit der Variation ohne Wiederholung:

1.3.2 Variation ohne Wiederholung

Aus n Elementen werden k Elemente herausgegriffen und angeordnet, ohne Wiederholung, so wie in Abb. 1.5 dargestellt. Dort wird z.B. das Element e_1 auf den Platz 1, e_2 auf den Platz 2 u.s.w.. gelegt. Alle

[5] Der interne Index wird nur zur Bildung der „Mengen gleicher Elemente E_i“ gebraucht, die notwendig sind, um eine wiederholte Auswahl desselben Elements möglich zu machen.

Abbildung 1.5: Variationen ohne Wiederholung • *Arrangement sans répétition (image — abstrait, éléments, reste)*



$(n-k)$ nicht ausgewählten Elemente, der Rest also, kann man sich anschliessend in eine Kiste nebenan gelegt denken, auf einen Haufen also. Diese anschliessende Operation verändert die Anzahl Auswahl– und Anordnungsmöglichkeiten der ersten k Elemente nicht, denn diese Haufenbildung ist eine einzige, unabhängige Handlung, die nichts weiteres beiträgt. In dieser Restkiste nebenan spielt also die Anordnung der Elemente keine Rolle. Man unterscheidet diese Elemente demnach nicht, es ist egal, wie sie liegen. Daher bilden sie eine Klasse nicht unterschiedener, also gleicher Elemente, die auf nur eine einzige Art angeordnet werden können (da sie als nicht unterscheidbar gelten). Daher hat man folgendes Problem: Man hat n Elemente, k verschiedene und $n-k$ gleiche. Diese Elemente sind anzuordnen. Oder abstrakt: Man sucht die Anzahl der möglichen Umkehrfunktionen f^{-1} (vgl. Abb. 1.5). Das Problem haben wir aber bereits bei den Permutationen mit Wiederholung gelöst: Die Anzahl ist $P_n(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

Satz 1.4 (Variationen ohne Wiederholung:)

$$V(k,n) = P_n(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel:

Auf wieviele Arten kann man 20 verschiedene vorhandene Ferienjobs an 26 verschiedene Studenten verteilen, die alle einen solchen Job haben wollen, wenn diese Jobs nicht in Teiljobs aufteilbar sind?
Es handelt sich um die Auswahl 20 aus 26 mit anschliessender Zuordnung zu unterscheidbaren Studenten, d.h. Anordnung. Die Lösung ist somit:

$$V(20,26) = \frac{26!}{(26-20)!} = \frac{26!}{(6)!} = 67215243521100939264000000 \approx 6.72152\,10^{25}$$

Ein Spezialfall: $V(n,n) = P_n(n-n) = P_n(0) = P(n)$
$\leadsto$ Permutation ohne Wiederholung!

1.3.3 Kombination ohne Wiederholung

Die Formel

Auf Seite 7 haben wir gesehen, dass sich bei Aussonderung einer Teilmenge gleicher Elemente die Anzahl der Möglichkeiten multiplikativ verhalten. Da war $20! = X \cdot Y = X \cdot 7!$. Die gleiche Situation finden wir beim Übergang von den Kombinationen zu den Variationen: Eine Variation (k Elemente aus n Elementen) entsteht aus einer Kombination durch Anordnung der k ausgewählten Elemente. Dazu hat man $P(k) = k!$ Möglichkeiten. Es gilt also:

Lemma 1.1 (Variationen und Kombination:)

$$V(k,n) = C(k,n) \cdot P(k), \textit{ also } \frac{n!}{(n-k)!} = C(k,n) \cdot k!$$

Daraus folgt:

Satz 1.5 (Kombination ohne Wiederholung)

$$C(k,n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

Das Beispiel Zahlenlotto „6 aus 45“:

Auf wieviele Arten kann man 6 verschiedene Zahlen aus den 45 ersten natürlichen Zahlen auswählen? Hier handelt es sich um eine typische Frage nach der Anzahl Kombinationen $C(6,45)$. Diese ist gleich:

$$\frac{45!}{6! \cdot (45-6)!} = \frac{45!}{6! \cdot (39)!} = 8145060 \approx 8.14506\, 10^6$$

Binomialkoeffizienten

Multipliziert man das Binom $(a+b)^n = \overbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ Faktoren}}$ nach den Regeln des Distributivgesetzes aus, so entstehen lauter Summanden der Form $m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ mit $0 \leq k \leq n$ und $m, k, n \in \mathbf{N}_0$. Beim Ausmultiplizieren nimmt man der Reihe nach aus jedem Faktor $(a+b)$ einen der Summanden a oder b und multipliziert diese Faktoren zu einem Produkt $a^k \cdot b^{n-k}$. Falls man in jedem Summanden a und nie b nimmt, entsteht $a^n \cdot b^0$. Falls man in j Summanden a und folglich in $n-j$ Summanden b nimmt, entsteht $a^j \cdot b^{(n-j)}$. Dabei gibt es hier verschiedene Möglichkeiten, das a oder das b auszuwählen: Man kann z.B. im ersten Faktor a, im zweiten b, im dritten wieder a wählen etc., man kann aber auch zuerst b, dann a und dann wieder a wählen etc.. m_k ist die Anzahl der Möglichkeiten, a in genau k Faktoren $(a+b)$ und b in genau $n-k$ Faktoren zu wählen. Es ist dann:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Wie gross ist nun m_k? — Hier handelt es sich um ein Auswahlproblem: Auf wieviele Arten kann man aus den n Faktoren $(a+b)$ k Faktoren auswählen und dort jeweils den Anteil a (und folglich in den restlichen $n-k$ Faktoren jeweils den Anteil b) nehmen? Diese Frage ist äquivalent mit der einfacheren Frage: Auf wieviele verschiedene Arten kann man aus n Elementen (Faktoren $(a+b)$) jetzt k Elemente auswählen? Die Antwort ist nun einfach: $m_k = C(k,n)$. m_k hat einen Namen:

Definition 1.8 (Binomialkoeffizient:) *:*

m_k *heisst* **Binomialkoeffizient**.

Symbole 5 (Binomialkoeffizient:) $\quad m_k := \binom{n}{k}$

Wir wissen jetzt:

Satz 1.6 (Binomischer Lehrsatz)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Binomialkoeffizienten kann man bekanntlich im *Pascalschen Dreieck* ablesen:

Pascalsches Dreieck:

$n = 0 \ldots$					1				
$n = 1 \ldots$				1		1			
$n = 2 \ldots$			1		2		1		
$n = 3 \ldots$		1		3		3		1	
$n = 4 \ldots$	1		4		6		4		1
etc. ...					...				

Die vertikale Position ist n, die horizontale k. Die Numerierung beginnt jeweils mit 0. So liest man z.B. ab: $\binom{4}{1} = 4$ und $\binom{4}{2} = 6$.

Für die Binomialkoeffizienten kann man mit Hilfe von $\binom{n}{k} = C(k,n) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ sowie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion[6] leicht die folgenden Gesetze beweisen:

Satz 1.7
Einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten:

1)	$\binom{n}{k}$	$=$	$\binom{n}{n-k}$	*2)*	$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$	$=$	$\binom{n}{k}$
3)	2^n	$=$	$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$	*4)*	$\sum_{k=0}^{r} \binom{p}{k} \cdot \binom{q}{r-k}$	$=$	$\binom{p+q}{r}$
5)	$\sum_{s=0}^{n-1} \binom{k+s}{k}$	$=$	$\binom{n+k}{k+1}$	*6)*	$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k}^2$	$=$	$\binom{2p}{p}$

Z.B. die Formel $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ ergibt sich aus $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.

1.3.4 Variation mit Wiederholung

Die Formel

Die *Variation mit Wiederholung* ist auf Seite 10 erklärt worden. Die Formel für die Anzahl Variationen mit Wiederholung hingegen müssen wir noch erarbeiten. Dazu verwenden wir folgendes Symbol:

Symbole 6 : $\bar{V}(k,n)$
$\bar{V}(k,n)$ = *Anzahl Variationen mit Wiederholung bei einer Auswahl von k Elementen aus einem Vorrat mit n verschiedenen Elementen, die alle wiederholbar sind.*

Herleitung der Formel:
Wir betrachten die k numerierten Plätze, auf denen die auszuwählenden Elemente anzuordnen sind (vgl. Abb. 1.5 oben links im Bild). Da wir jedes der n Elemente im Vorrat auswählen können, hat man n Möglichkeiten, den 1. Platz zu besetzen. Bei der Auswahl für den 2. Platz hat man aber wieder n Elemente im Vorrat zur Auswahl, da wegen der Wiederholbarkeit wieder jedes Element vorhanden ist und gewählt werden kann: Zu jeder der n Möglichkeiten für den 1. Platz hat man n Möglichkeiten für den 2. Platz, total also jetzt $n \cdot n = n^2$ Möglichkeiten. Genauso geht es für den 3. Platz: Zu jeder der n^2 Möglichkeiten für die Plätze 1 und 2 hat man n Möglichkeiten für den 3. Platz, total also jetzt $n^2 \cdot n = n^3$ Möglichkeiten. So fährt man fort: Für die Besetzung der ersten 4 Plätze hat man n^4 Möglichkeiten, für die Besetzung der ersten 5 Plätze n^5 Möglichkeiten und schliesslich für die Besetzung der ersten k Plätze hat man n^k Möglichkeiten. Wir haben somit den Satz:

[6] Vgl. Zahlenlehre

Satz 1.8 (Variationen mit Wiederholung:)

$$\bar{V}(k, n) = n^k$$

Beispiel:

Auf wieviele Arten können 26 (unterscheidbare) Studenten sich in 12 verschiedene Kurse einschreiben, wenn jeder Kurs 26 Plätze offen hat, also keine Platzbeschränkung besteht?

Lösung:

Der erste Student hat 12 Möglichkeiten, sich in einen Kurs einzuschreiben. Zu jeder dieser Möglichkeiten des ersten Studenten hat der zweite auch 12 Möglichkeiten, sich in einen Kurs einzuschreiben. Beide zusammen haben also 12^2 Möglichkeiten. Für den dritten, vierten etc. Studenten geht das auch so: Jeder hat die 12 Möglichkeiten, und die Möglichkeiten multiplizieren sich. Es handelt sich um eine Variation mit Wiederholung. Total gibt es $\bar{V}(k, n) = \bar{V}(26, 12) = 12^{26} = 114475459972882815552155811 84 \approx 1.14475\, 10^{28}$ Möglichkeiten.

Merke: Aus diesem Beispiel ersieht man, dass $k > n$ sein kann.

Anwendung: Die Mächtigkeit der Potenzmenge

Die Potenzmenge ist bekanntlich die Menge aller Teilmengen.

Problem 1.5
Mächtigkeit der Potenzmenge:

Gegeben: *Eine Menge $\mathcal{M}$ mit n Elementen.*

Frage: *Wieviele Teilmengen hat $\mathcal{M}$?*

Lösung:

$\binom{n}{k} = C(k, n)$ ist bekanntlich die Anzahl Teilmengen mit k Elementen, denn hier handelt es sich ja um das typische Auswahlproblem. Nun kann man eine oder mehrere Teilmengen mit 0 (leere Menge), 1, 2, ..., n Elemente wählen. Total hat man also:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Satz 1.9 *:*
Mächtigkeit der Potenzmenge:
Die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen hat 2^n Elemente.

Eine Menge mit n Elementen hat also genau 2^n Teilmengen.

1.3.5 Kombination mit Wiederholung

Hier sollen aus einer Menge mit n Elementen k Elemente ausgewählt werden, wobei jedes ausgewählte Element bei der Auswahl in der Menge dupliziert wird resp. nachgeliefert wird, so dass die Menge trotz Auswahl immer aus denselben Elementen besteht. Wie gross ist die Anzahl Auswahlmöglichkeiten?

Für die Berechnung dieser Anzahl ist es unwesentlich, ob die Menge $\mathcal{M}_n$ aus Kugeln, Losen oder Zahlen etc. besteht, d.h. welcher Natur die Elemente sind. Wir dürfen daher annehmen, es handle sich um die natürlichen Zahlen von 1 bis n: $\mathcal{M}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Wenn wir jetzt k Elemente (d.h. Zahlen) auswählen, so wollen wir diese immer ihrer Grösse nach aufreihen, statt sie bloss „auf einen Haufen zu legen". Wir reden hier von der *Standardanordnung*. Eine solche Auswahl $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ wird also immer in der Anordnung $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_k$ präsentiert. Dadurch wird die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten ja nicht verändert.

Wie ist nun dem Problem der Wiederholungen beizukommen? Die Idee, aus $k \cdot n$ Elementen auszuwählen, führt zu keinem Resultat, da die Elemente einer Auswahlmenge dann auf verschiedene Weise gewonnen werden können, was fälschlicherweise die Anzahl Auswahlmöglichkeiten erhöht. So geht es also nicht. Um der Sache beizukommen, muss man etwas weiter ausholen:

Wir führen dazu $k-1$ neue Elemente $J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$ ein und fügen diese der Menge $\mathcal{M}_n$ an. So erhalten wir eine neue Menge $\mathcal{M}_n^{k-1} = \{1, 2, 3, \ldots, n, J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}\}$ mit $n+k-1$ Elementen. Die neu gültige Standardanordnung entspreche der hier gegebenen Aufzählung der Elemente: Die J_i werden hinten den Nummern nach angefügt. Dabei gelte für die Elemente J_i die folgende Interpretation: J_i ist eine Vorschrift oder Funktion, die auf jenen ausgewählten Standardanordnungen operiert, in denen sie selbst allenfalls vorkommt. Die durch J_i gegebene Vorschrift lautet: Ersetze das Symbol J_i in einer ausgewählten Standardanordnung durch das Element e_i derselben Auswahl, nachdem alle J_p mit $p < i$ schon ersetzt sind. Führt man alle diese Ersetzungen durch, so erhält man aus einer *primären Auswahl* die *Endstandardanordnung*. Da k Elemente auszuwählen sind, es aber nur $k-1$ Elemente J_i gibt, kommt in einer Standardauswahl immer mindestens ein Element $e_j \in \mathcal{M}_n$ vor, in unserem Falle eine der gegebenen natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$. J_i bewirkt somit immer eine Ersetzung durch ein weiter vorne vorkommendes Element in der Standardanordnung, also eine Duplikation. Da so jedes Element einmal ausgewählt und dann noch durch die J_i maximal $k-1$ mal dupliziert werden kann, besteht die Möglichkeit, dass jedes Element von $\mathcal{M}_n$ dann k mal in der Endstandardanordnung vorkommen kann. Auf diese Art können alle Kombinationen mit Wiederholung gewonnen werden.

Beispiel:

Gegeben sei $\mathcal{M}_7 = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$. Daraus sollen 5 Elemente mit Wiederholung ausgewählt werden. Es ist dann $\mathcal{M}_7^{5-1} = \mathcal{M}_7^4 = \{1, 2, 3, \ldots, 7, J_1, J_2, J_3, J_4\}$.

Wählt man z.B. $(1, 5, 7, J_1, J_4)$ (in Standardanordnung), so wird wie folgt ersetzt: Zuerst $J_1 \mapsto 1$ (der Index 1 ist kleiner als der Index 4). Das ergibt $(1, 5, 7, 1, J_4)$ in Nicht–Standardanordnung und $(1, 1, 5, 7, J_4)$ in neuer Standardanordnung. Dann wird ersetzt $J_4 \mapsto 7$, was zur Standardanordnung $(1, 1, 5, 7, 7)$ führt.

Ähnlich führt die Auswahl $(4, J_1, J_2, J_3, J_4)$ nach allen Ersetzungen zur Standardanordnung $(4, 4, 4, 4, 4)$.

Bei der Auswahl von 6 Elementen aus $\mathcal{M}_8$ führt die primäre Auswahl $(2, 3, 7, 8, J_2, J_4)$ auf die Endstandardanordnung $(2, 3, 3, 7, 7, 8)$.

Diese Beispiele machen klar, dass eine primäre Auswahl eindeutig einer Endstandardanordnung entspricht. Die Anzahl der auswählbaren primären Anordnungen ist gleich der Anzahl der Endstandardanordnungen, in welchen alle Elemente bis zu k mal wiederholt vorkommen können. Um $\bar{C}(k, n)$ zu finden, muss man also die Anzahl der primär auswählbaren Standardanordnungen bestimmen. Dort werden k Elemente aus den $n+k-1$ Elementen $1, 2, 3, \ldots, n, J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$ ausgewählt. Daher ist $\bar{C}(k, n) = C(k, n+k-1)$. Somit hat man:

Satz 1.10
Kombinationen mit Wiederholung:

$$\bar{C}(k, n) = C(k, n+k-1) = \binom{n+k-1}{k}$$

Beispiel:

Ein Abteilungsleiter hat 19 Ingenieure unter sich, von denen jeder als Projektleiter in Frage kommt.

Es stehen 8 neue Projekte an, die wahrscheinlich nacheinander bearbeitet werden müssen. Wieviele Möglichkeiten bieten sich dem Abteilungsleiter, Projektleiter zu bestimmen, wenn auch in Betracht gezogen werden darf, dass im Extremfall derselbe Ingenieur allen 8 Projekten vorsteht?

Hier handelt es sich um eine Kombination mit Wiederholung. Aus 19 Ingenieuren werden 8 Projektleiter ausgewählt, wobei jeder mehrmals vorkommen darf. Es ist dann:

$$\bar{C}(8,19) = \binom{19+8-1}{8} = \binom{26}{8} = \frac{26!}{8! \cdot (26-8)!} = \frac{26!}{8! \cdot 18!} = 1562275 \approx 1.56228\,10^6.$$

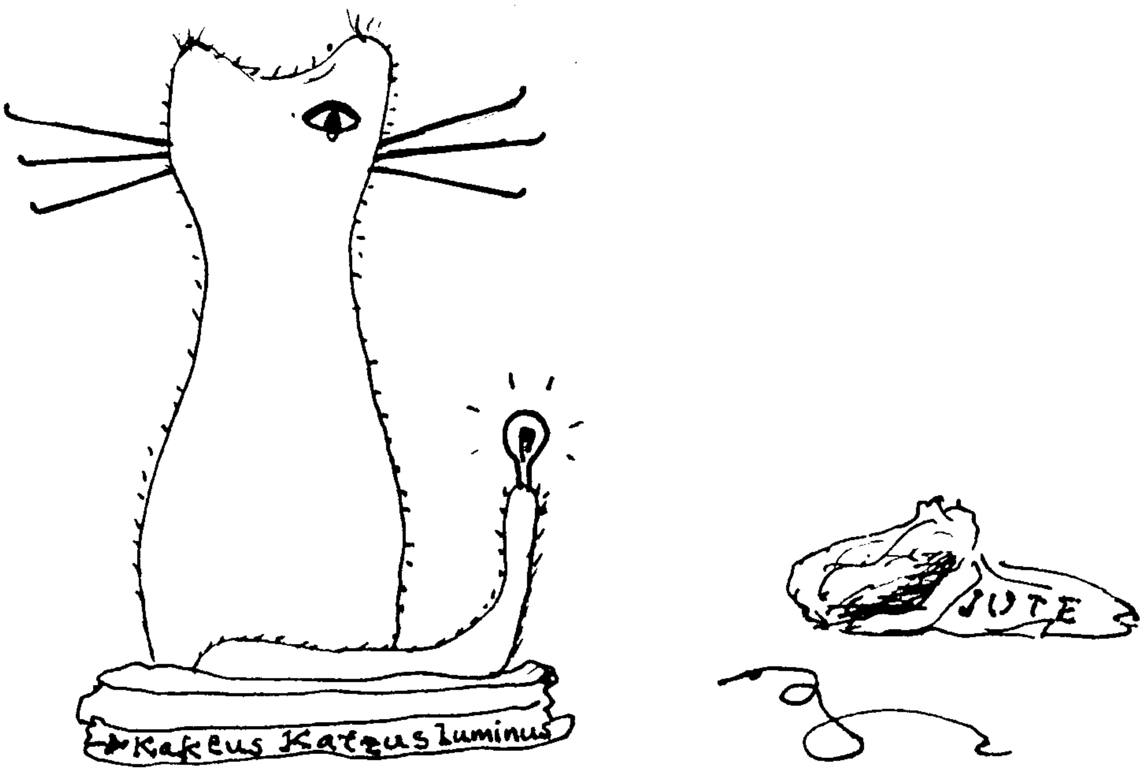
1.4 Übungen

Übungen finden sich in *DIYMU*, (Bibl.: wirz1) sowie in der klassischen Schulbuchliteratur für die Gymnasialstufe — oder speziell auch in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.

Index

(Seitenzahlen vorläufig nur für die deutsche Version zur gemischtsprachigen Ausgabe vorhanden)

Abbildung 1.6: … Kaktus Katzus • *Sans possibilité de traduction …*



Literaturverzeichnis

[1] Fachlexikon *a b c*. Verlag Harri Deutsch Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich. Dudenverlag (Bibl.: abc)

[2] Brenner, Lesky. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. AULA-Verlag Wiesbaden (Bibl.: brennerlesky)

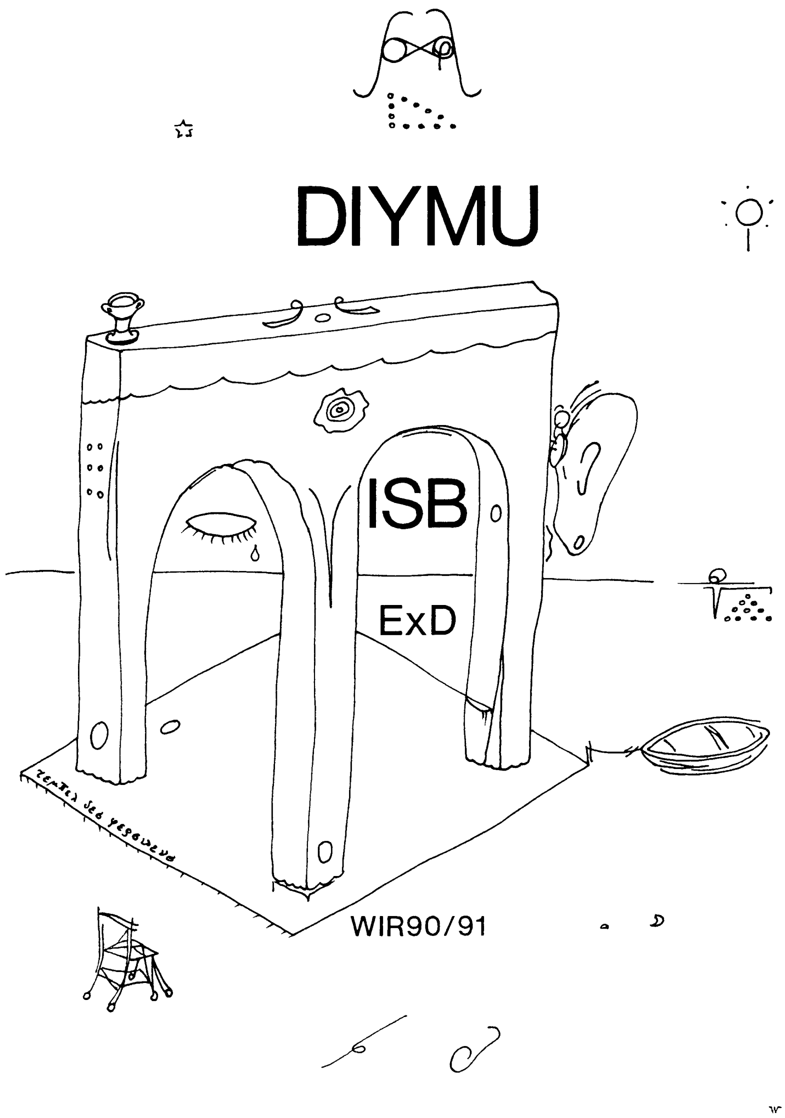
[3] Claus, Schwill. Schüler–Duden, Die Informatik. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich. Dudenverlag (Bibl.: clausschwill)

[4] Iyanaga, Kawada. Encyclopedic Dictionary of Mathematics. MIT Press, Cambridge Mass., London GB (Bibl.: iyanagakawada)

[5] Meschkowski. Mathematisches Begriffswörterbuch. BI Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut Mannheim (Bibl.: meschkowski)

[6] Vom Autor. Mathematik für Ingenieure *Teile 1 ff* (Bibl.: wirz)

[7] Vom Autor. *DIYMU* (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz1)


DIYMU
ISB
ExD
WIR90/91