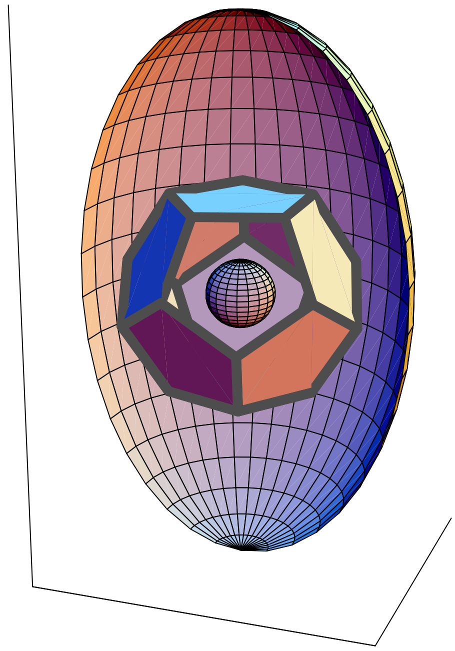
Mathematikkurs für Ingenieure ◇ Teil 6 ◇ Kombinatorik — Cours en mathématiques pour ingénieurs ◇ partie 6 ◇ analyse combinatoire



von • *de*

Rolf Wirz

Ingenieurschule Biel • *Ecole d'ingénieurs Bienne*

Nach den NeXT–Crash von 1999 restaurierte Ausgabe • *Edition restaurée après le NeXT–Crash de 1999*

V.1.2.1 d/f 24. Mai 2005 • *24 mai 2005* V.1.2.1 d/f

WIR/NeXT/93/01/05/LaTex/Teil6.tex

Teil 6 eines Repetitoriums und Textbuchs zur Begleitung und Ergänzung des Unterrichts.
• *Partie 6 d'un cours de répétition et livret, accompagnement et complément des leçons.*
Produziert mit LaTeX auf NeXT-Computer/ PCTeX WIN98. • *Produit avec LaTeX sur NeXT-Computer/ PCTeX WIN98.*
Einige Graphiken sind auch mit *Mathematica* entstanden.
1999 hat der Autor einen Computer–Crash erlebt. Infolge des dadurch provozierten Systemwechsels haben einige Graphiken sehr gelitten. Sie werden neu erstellt, sobald die Zeit dafür vorhanden ist.

• *Quelques graphismes ont été produits avec Mathematica. 1999, l'auteur a subi un crash d'ordinateur. A la suite du changement de système provoqué par cela, quelques graphismes ont été altérés passablement. Ils seront aménagés de nouveau dès qu'il y aura assez de temps à disposition pour cela.*

Glück hilft manchmal, Arbeit immer ...

Brahmanenweisheit

• *La chance aide parfois, mais le travail aide toujours ...*

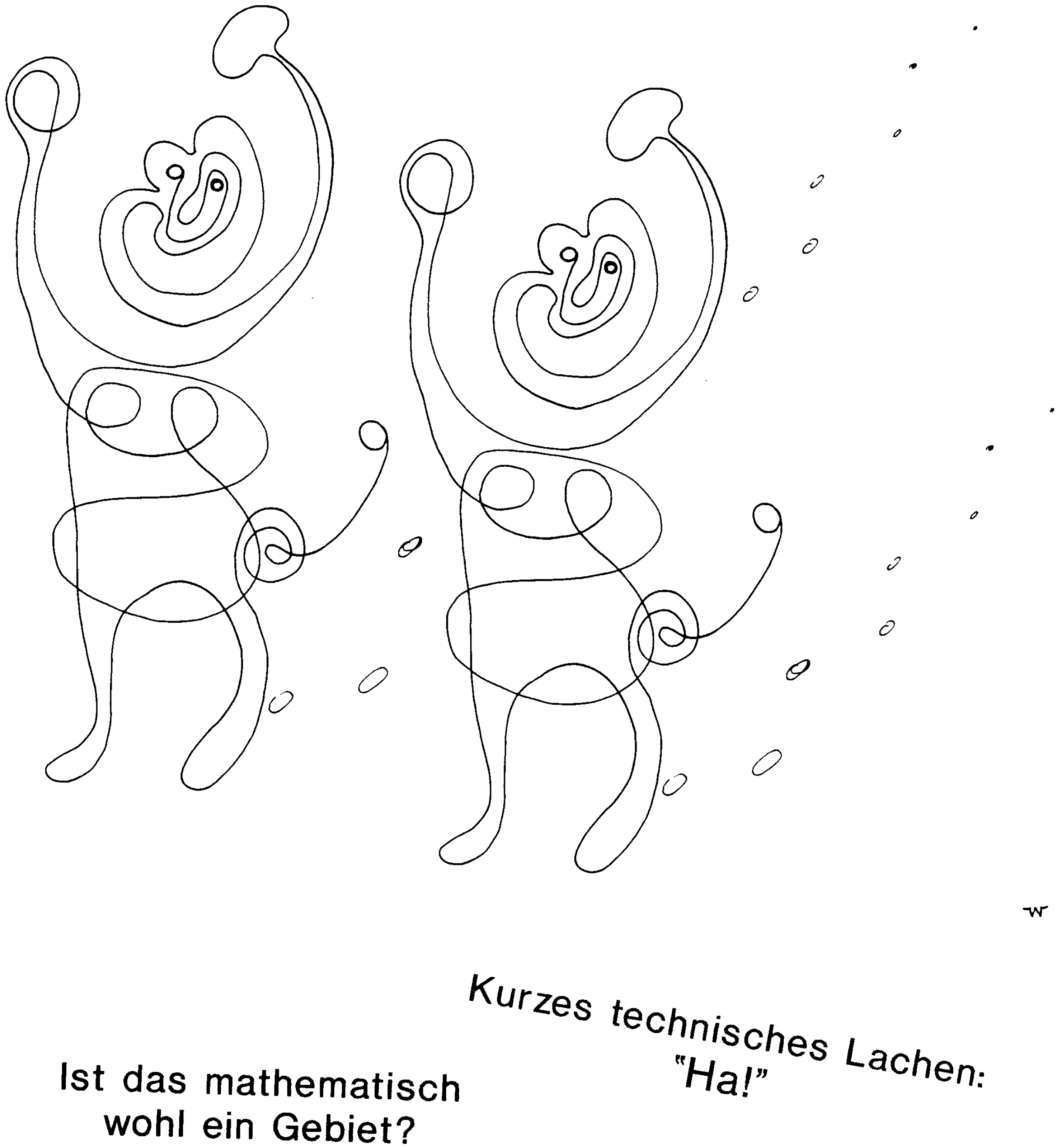
• *Sagesse de l'Inde*

Adresse des Autors: • *Adresse de l'auteur:*

Rolf W. Wirz-Depierre
Prof. für Math.
Hochschule für Technik und Architektur, Berner Fachhochschule
• *Ecole d'ingénieurs de Bienne, haute école spécialisée bernoise*
Quellgasse – Rue de la source 21
Postfach – case postale 1180
CH-2501 Biel-Bienne
Tel. (..41) (0)32 266 111, neu 3216 111

Kombinatorik: Probleme mit ganzen Zahlen — Analyse combinatoire: Problèmes concernant les nombres entiers

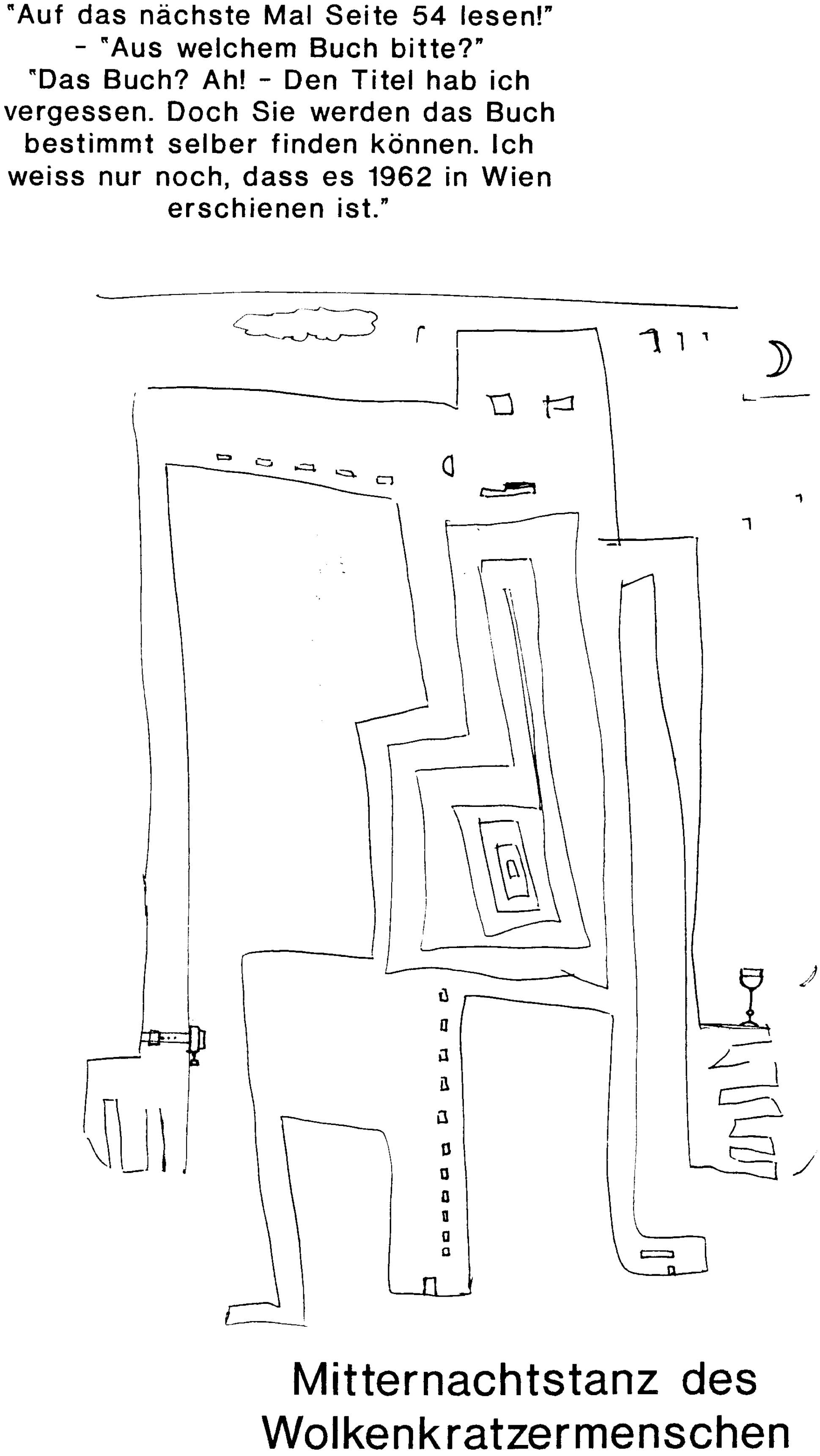
Abbildung 1: . . . Wie ordne ich das Chaos? . . . • *Comment mettre de l'ordre dans le chaos? . . .*



Inhaltsverzeichnis • Table des matières

1 Kombinatorik — analyse combinatoire . . . **3**
1.1 Einleitung — Introduction . . . 3
1.1.1 Problemstellung — Problème . . . 3
1.1.2 Fakultäten — Factorielles . . . 3
1.2 Anordnungsprobleme — Problèmes d'arrangement . . . 4
1.2.1 Permutationen ohne Wiederholung — Permutations sans répétition . . . 4
1.2.2 Permutationen mit Wiederholung — Permutations avec répétition . . . 8
1.3 Auswahlprobleme — Problèmes de choix . . . 11
1.3.1 Die Fragestellungen — Les questions . . . 11
1.3.2 Variation ohne Wiederholung — Arrangement sans répétition . . . 15
1.3.3 Kombination ohne Wiederholung — Combinaison sans répétition . . . 15
1.3.4 Variation mit Wiederholung — Arrangement avec répétition . . . 18
1.3.5 Kombination mit Wiederholung — Combinaison avec répétition . . . 20
1.4 Übungen — Exercices . . . 22

Abbildung 2: ... weil leere Seiten so langweilig sind ... • *Parce que les pages vides sont si ennuyeuses*



Vorwort

Liebe Leserin, lieber Leser,

Das Thema *Kombinatorik* ist ein klassischer Bestandteil des Mittelschullehrplans. Auch an Berufsmittelschulen sollte es eigentlich behandelt werden. Doch was, wenn ein Student aus irgendwelchen Gründen gerade diesem Stoff an der Schule nie begegnet ist — oder ihn vergessen hat? Dann heisst es eben nacharbeiten und repetieren. Daher ist dieser Text als *Repetitorium* und als *Ausbau* gedacht.
Die Wichtigkeit der Kombinatorik für den Weg durch die weitere Mathematik ist unbestritten. Sie ist ein Werkzeug zur Lösung von Problemen, die manchmal unverhofft an einem herantreten. Geradezu grundlegend ist das Thema aber für das Wissensgebiet „Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik".
Dieser Text ist in Skriptform abgefasst. Das bedeutet, dass er in äusserst knapper Fassung nur das wesentliche Skelett des zu lernenden Stoffes wiedergibt. Für weitere, ausführliche Erklärungen, Beispiele, exakte Beweise und ergänzende Ausführungen ergeht daher an den Studenten der Rat, ein oder mehrere Lehrbücher beizuziehen. Studieren bedeutet zu einem wesentlichen Teil, sein Wissen selbständig mit Hilfe der Literatur zu erweitern, streckenweise sogar selbständig zu erarbeiten, zu festigen und anzuwenden. Ein Skript ist dabei nur ein Wegweiser und nie ein Lehrbuchersatz. Welche Lehrbücher jemand verwenden will, ist jedem freigestellt. Das Thema Kombinatorik findet man in praktisch allen Unterrichtswerken für die klassische Gymnasialstufe. Bezüglich der Fachhochschulliteratur sei auf das Beilpiel Brenner, Lesky, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1 (Bibl.: brennerlesky) verwiesen.

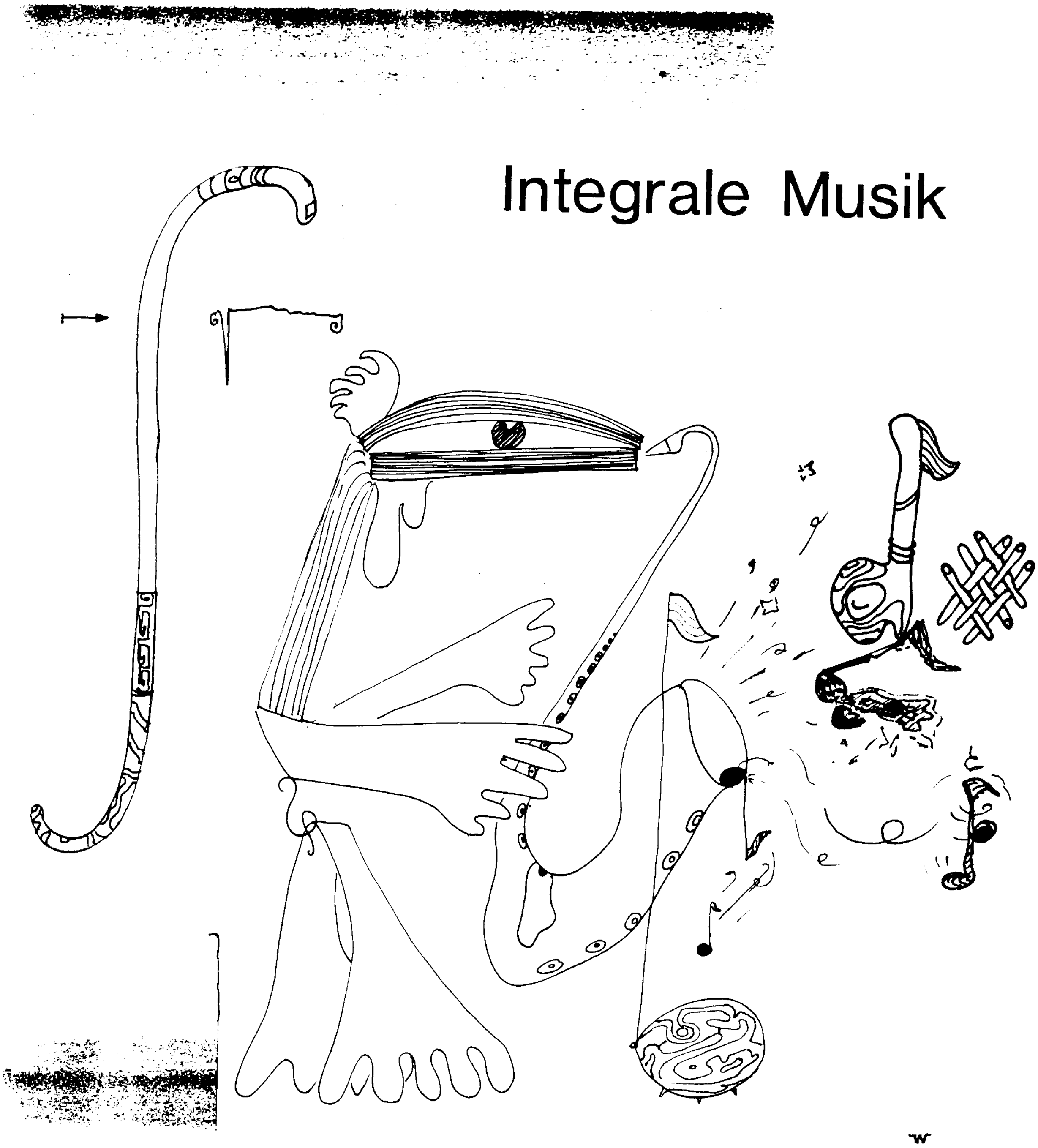
Im Sommer 1996 Der Autor

• *Chère lectrice, cher lecteur,*

L'analyse combinatoire fait partie du programme du gymnase classique. Dans les écoles qui préparent à la maturité professionelle, il devrait être traité également. Mais quoi, si un étudiant n'a jamais eu contact avec cette matière pour n'importe quelle raison — ou s'il l'a oubliée? Alors il faut l'élaborer ou répéter. Par conséquent ce texte est conçu comme cours de répétition et comme perfectionnement.
L'importance de l'analyse combinatoire est incontestée. Elle est un outil pour la solution de problèmes qui nous surprennent parfois. Elle est la base pour le "calcul des probabilités et la statistique".
Ce texte est écrit en forme de script. Ça signifie qu'il représente une forme très abrégée de la manière à apprendre. Pour des explications plus vastes et détaillées, exemples, preuves exactes et suppléments, on conseille l'étudiant de consulter plusieurs livres de cours. Etudier signifié en grande partie d'élargir soi–même son savoir à l'aide de la littérature et acquérir de la matière, de l'approfondir et de l'utiliser. Pour cela, un script est seulement un indicateur d'itinéraire et ne remplace jamais un livre de cours. Chacun est libre de choisir ses livres de cours. On trouve le sujet de l'analyse combinatoire pratiquement dans toutes les oeuvres de mathématiques pour le gymnase classique. Concernant le niveau des hautes écoles professoinelles le lecteur est renvoyé à des ouvrages tels que Brenner, Lesky, Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler, Band 1 (Bibl.: brennerlesky).

Dans l'été 1996 *L'auteur*

Abbildung 3: ...ohne Worte ... • *sans mots ldots*



Kapitel • Chapitre 1

Kombinatorik — Analyse combinatoire

1.1 Einleitung — Introduction

1.1.1 Problemstellung — Problème

Im Stoffgebiet *Kombinatorik* behandeln wir die 6 Typen der klassischen *Anzahlprobleme*. Dabei geht es um folgende Kategorie von Fragestellungen: Wir fragen nach der *Anzahl* der Möglichkeiten, aus einer endlichen Menge M nach einer gewissen Vorschrift Elemente *auszuwählen*, diese ev. *anzuordnen* oder die Menge *in Klassen einzuteilen.* Dabei können sich Elemente *wiederholen* – oder nicht. Da das Resultat y jeweils eine natürliche Zahl ist, reden wir auch von **Anzahlfunktionen** $M \longmapsto y$.
• *Dans l'analyse combinatiore, nous traitons les 6 types de problèmes des nombres cardinaux classiques. Il s'agit des catégories suivantes de questions: Nous demandons le nombre des possibilités de pouvoir choisir des éléments dans un ensemble fini M d'après une prescription donnée, et eventuellement aussi de les ordonner ou de diviser l'ensemble en classes. Dans certains cas les éléments peuvent être répétés — ou bien non répétés. Comme le résultat y est chaque fois un nombre naturel, nous parlons de* **fonctions dans les nombres cartinaux** $M \longmapsto y$.

1.1.2 Fakultäten — Factorielles

In der Kombinatorik spielt der Begriff *Fakultät* eine grosse Rolle. Man definiert die *Fakultäten induktiv*[1] durch die folgende *Rekursion*:
• *Dans l'analyse combinatiore, la notion des factorielles joue un grand rôle. On définit les factorielles*[2] *par la relation de récurrence suivante:*

Definition • Définition 1.1 (Fakultät: • *Factorielle:*)

$$\begin{array}{ll} f(0) = 0! := 1 & \textsf{(Verankerung)} \;\bullet\; \textit{(Ancrage)} \\ f(n) = n! := n \cdot (n-1)! & \textsf{(Vererbung)} \;\bullet\; \textit{(Hérédité)} \end{array}$$

Bemerkungen: • *Remarques:*

[1] Nach dem Schema der vollständigen Induktion, vgl. Thema *natürliche Zahlen, Induktionsaxiom* (eines der Axiome aus dem System von Peano).
[2] D'après le schéma de l'induction complète, voir le sujet des nombres naturels, axiome d'induction, un des axiomes du système de Peano.

1. Es gilt dann: • *Il vaut donc:* $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \prod_{k=1}^{n} k$. (Siehe • *Voir*([3]).)
   Daraus ergibt sich: • *Il vaut donc:* $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$ etc..

2. Der Begriff *Rekursion* hat sich heute in der *Informatik* sehr stark verbreitet. Man versteht dort darunter *die Definition einer Funktion oder eines Verfahrens durch sich selbst* (vgl. dazu z.B. Claus, Schwill, Bibl.: clausschwill). Man darf den Begriff *Rekursion* in diesem hier verwendeten einfachen Sinne jedoch nicht verwechseln mit den in der höheren Mathematik gebräuchlichen, etwas schwierigen Begriffen *allgemeine Rekursion*, *primitive Rekursion*, *rekursive Funktion* (in der Zahlentheorie), *rekursive Relation* (in verschiedenem Sinne in Logik und Mengenlehre). Vgl. dazu Fachlexikon *a b c*] (Bibl.: abc), Iyanaga, Kawada (Bibl.: iyanagakawada) und Meschkowski (Bibl.: meschkowski).
   • *La notion de récurrence est très répandue aujourd'hui dans l'informatique. On entend par cette notion la définition d'une fonction ou une méthode par elle-même, voir aussi par exemple (Bibl.: Claus, Schwill (Bibl.: clausschwill)). Mais il ne faut pas confondre la notion de la récurrence qui cependant est utilisée ici dans un sens simple avec les notions récurrence commune,récurrence primitive, fonciton de récurrence (dans la théorie des nombres) et relation de récurrence (dans des sens différents dans la logique et la théorie des ensembles) qui sont un peu difficiles et usuelle dans les mathématiques. Voir aussi Fachlexikon a b c (Bibl.: abc), Iyanaga, Kawada (Bibl.: iyanagakawada) et Meschkowski (Bibl.: meschkowski)*

Wir halten fest: • *Nous retenons:*

Definition • Définition 1.2 (Rekursion (Informatik) • Récurrence (informatique))
Unter **Rekursion** *verstehen wir hier die Definition einer Funktion oder eines Verfahrens durch sich selbst.*
• *Sous* **récurrence** *nous entendons la définition d'une fonction ou d'une méthode par elle-même.*

Beispiel: • Exemple: Aus der Definition von $n!$ ergibt sich: $f(n) = n \cdot f(n-1)$. Die Funktion an der Stelle n wird also durch die Funktion (also durch sich selbst) an der Stelle $n-1$ definiert. • *De la définition de $n!$ on conclut: $f(n) = n \cdot f(n-1)$. La fonction à la place n est donc définie par la fonction à la place $n-1$ (ainsi par elle-même).*
Die Werte $f(n) = n!$ werden sehr rasch sehr gross. z.B. ist: • *Les valeurs $f(n) = n!$ augmentent très vite. Par exemple il vaut:*

$$40! = 815915283247897734345611269596115894272000000000 \approx 8.15915\,10^{47}.$$

Ein einfaches Programm auf einem Rechner kann daher schnell Probleme machen. Hier ist eine Formel von *Stirling* hilfreich (ohne Beweis): • *Un programme simple sur un ordinateur peut donc très vite causer des problèmes. Voici une formule de Stirling très utile (sans la preuve):*

Satz • Théorème 1.1 (Formel von Stirling: • Formule de Stirling:)

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n$$

e ist hier die Eulersche Zahl: • *Ici e est le nombre de Euler:* $e \approx 2.718281828459045235360287471 35$ (auf 30 Stellen • *à 30 places*)

1.2 Anordnungsprobleme — Problèmes d'arrangement

1.2.1 Permutationen ohne Wiederholung — Permutations sans répétition

Paradigma — Paradigme (Beispiel eines praktischen Problems) • (Exemple d'un problème pratique)[4]

Problem • Problème 1.1 (Sitzmöglichkeiten: • Possibilités de s'asseoir:)

[3] $\prod$ steht für „*Produkt*". • $\prod$ *signifie "produit".*
[4] Ein Paradigma ist ein Lehrbeispiel • *Un paradigme est un exemple démonstratif*

Situation: • **Situation:** *In einem Klassenzimmer befindet sich nichts ausser* 26 *nummerierten Stühlen. Die Nummern gehen von* 1 *bis* 26*. Pulte, Bänke und Tische hat man nach draussen gebracht. Vor der Tür warten 26 Studenten. Zur besseren Unterscheidbarkeit und Benennung erhält auch jeder Student eine verschiedene Nummer von* 1 *bis* 26*, mit der er aufgerufen wird.*
• *Dans une salle de classe il ne se trouve rien à l'exception de 26 chaises numérotées. Les numéros vont de 1 à 26. On vient d'enlever pupitres, bancs et tables. 26 étudiants attendent devant la porte. Pour pouvoir mieux distinguer les étudiants et pour mieux pouvoir les appeler, chaque étudiant reçoit un numéro différent de 1 à 26 avec lequel il est donc appelé.*

Frage: • **Question:** *Auf wieviele Arten kann man die* 26 *Studenten auf die* 26 *Stühle setzen, d.h. wieviele Sitzordnungen gibt es?*
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut mettre les 26 étudiants sur les 26 chaises, c.-à.-d. combien est–ce que de répartitions des places existent?*

Lösung: • **Solution:**

- Der Student Nr. 1 kommt herein. Er findet 26 freie Stühle vor. Somit hat er für sich 26 Sitzmöglichkeiten.
  • *L'étudiant no. 1 entre. Il trouve 26 chaises libres. Par conséquent il a 26 possibilités de s'asseoir.*

- Der Student Nr. 2 kommt herein, Student Nr. 1 sitzt auf irgend einem Stuhl. Student Nr. 2 findet nur noch 25 freie Stühle vor. Somit hat er für sich nur noch 25 Sitzmöglichkeiten. Diese 25 Sitzmöglichkeiten hat er aber bei jeder Platzierung von Student Nr. 1, welcher sich auf 26 verschiedene Arten platzieren konnte. Zur ersten von Student Nr. 1 benutzten Möglichkeit hat Student Nr. 2 nun 25 Möglichkeiten, zur zweiten Möglichkeit von Student Nr. 1 hat Nr. 2 nun 25 Möglichkeiten, etc., zur letzten Möglichkeit von Student Nr. 1 hat Nr. 2 wiederum 25 Möglichkeiten. Zusammen haben beide also $26 \cdot 25$ Möglichkeiten. Die Anzahlen der Möglichkeiten multiplizieren sich!
  • *L'étudiant no. 2 entre. L'étudiant no. 1 est assis sur une chaise quelconque. L'étudiant Nr. 2 trouve encore 25 chaises libres. Par conséquent il a seulement 25 possibilités de s'asseoir. Mais il a ces 25 possibilités de s'asseoir pour chaque position de l'étudiant no. 1, qui pouvait se placer sur 26 sièges différents. A la première possibilité utilisée par l'étudiant no. 1, l'étudiant no. 2 a maintenant 25 possibilités, pour la deuxième possibilité de l'étudiant no. 1, l'étudiant no. 2 a aussi 25 possibilités, etc, pour la dernière possibilité de l'étudiant no. 1, l'étudiant no. 2 a de nouveau 25 possibilités. En tout les deux ont ainsi* $26 \cdot 25$ *possibilités. Les nombres des possibilités se multiplient!*

- Der Student Nr. 3 kommt herein. Die Studenten Nr. 1 und Nr. 2 sitzen bereits. Student Nr. 3 findet nur noch 24 freie Stühle vor. Somit hat zu jeder der $26 \cdot 25$ Sitzmöglichkeiten der beiden ersten Studenten noch 24 Möglichkeiten. Zusammen haben sie also $26 \cdot 25 \cdot 24$ Möglichkeiten, da sich ja die Anzahlen der Möglichkeiten multiplizieren.
  • *L'étudiant no. 3 entre. Les étudiants no. 1 et no. 2 sont déjà assis. L'étudiant Nr. 3 ne trouve que 24 chaises libres. Il a par conséquent pour chacune des* $26 \cdot 25$ *possibilités des premiers deux étudiants encore 24 possibilités. En tout les trois ont ainsi* $26 \cdot 25 \cdot 24$ *possibilités, parce que les nombres des possibilités se multiplient.*

- So geht es dann weiter. Schliesslich kommt der Student Nr. 25 herein. Er hat bei jeder der Sitzmöglichkeiten der vorher hineingegangenen Studenten noch 2 freie Plätze zur Auswahl. Total haben also die 25 ersten Studenten $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2$ Sitzmöglichkeiten.
  • *Ainsi on avance. Finalement l'étudiant no. 25 entre. Pour chaque façon de se placer des étudiants qui sont déjà là il a encore 2 sièges de libres et par conséquent 2 possibilités de se placer. Totalement les 25 premiers étudiants ont ainsi* $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2$ *possibilités de se placer.*

- Endlich kommt der letzte Student mit der Nummer 26 herein. Er hat bei jeder der Sitzmöglichkeiten der andern Studenten noch einen freien Platz zur Auswahl. Total haben somit die 26 Studenten $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 26!$ Sitzmöglichkeiten.
  • *Enfin le dernier étudiant, numéro 26, entre. Pour chaque façon de se placer des autres étudiants il ne lui reste qu'une chaise de libre, il n'a donc qu'une seule possibilité de se placer. Totalement les 26 étudiants ont par conséquent* $26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 26!$ *possibilités de se placer.*

Bemerkung: • **Remarque:** Falls in einer Menge von Individuen jedes Element (Individuum) einen unterscheidbaren Namen trägt, so kann man die Elemente auch den „Namen nach", d.h. alphabetisch ordnen, so wie in einem Lexikon: A... kommt vor B... etc., Aa... vor Ab... etc.. In einem solchen Fall spricht man von einer *lexikographischen Anordnung*.
• *Si dans un ensemble chaque élément (individu) porte un nom distinctif, on peut ranger les éléments "d'après les noms", c.-à.-d. de façon alphabétique, comme dans un lexique: A... vient aevant B... etc, Aa... aevant Ab... etc.. Dans un tel cas on parle d'une disposition lexicographique.*

Zum Nachdenken: • **A réfléchir:**
Falls die Klasse in 10 Sekunden einen Platzwechsel schafft, so braucht sie also $10 \cdot 26!$ Sekunden für alle Platzwechsel. Das sind $\frac{10 \cdot 26!}{60 \cdot 60 \cdot\, 24 \cdot 365}$ Jahre $= 1.278310^{20}$ Jahre. Vergleich: Das Alter des Universums bei der Urknalltheorie wird gegenwärtig auf ca. 1 bis 2 mal 10^{10} Jahre geschätzt[5]. Um die Sitzordnungen alle ohne Pause zu realisieren, bräuchte es also etwa 10^{10} mal soviel Zeit, wie das Universum alt ist!
• *Si la classe est capable d'exécuter un changement de place en 10 secondes, elle nécessite* $10 \cdot 26!$ *secondes pour tous les changements de place. Ça nous fait* $\frac{10 \cdot 26!}{60 \cdot 60 \cdot\, 24 \cdot 365}$ *ans* $= 1.278310^{20}$ *ans. Comparaison: L'âge de l'univers d'après la théorie du big bang est actuellement estimée à env. 1 à 2 fois* 10^{10} *ans*[6]. *Pour réaliser toutes les répartitions des places sans pauses, il faudrait donc* 10^{10} *fois l'âge de l'univers!*

Verallgemeinerung des Problems: • **Généralisation du problème:**
Statt mit 26 Studenten kann man das Problem gleich allgemein mit n Studenten lösen. In der Argumentation ist dann 26 durch n, 25 durch $n-1$ etc. zu ersetzen. Man erhält schliesslich so total $(n!)$ Möglichkeiten, n Studenten auf n Plätze zu setzen.
• *Au lieu de résoudre le problème avec 26 étudiants on peut le résoudre généralement avec n étudiants. Dans l'argumentation il faut alors remplacer 26 par n, 25 par* $n-1$ *etc.. Finalement on obtient totalement* $(n!)$ *possibilités de mettre n étudiants sur n places.*

Das abstrakte Problem — Le problème abstrait

Gegeben sei eine Menge $\mathcal{M}_n$ mit n Elementen, welche durchnummeriert sind mit den Nummern von 1 bis n. $\mathcal{M}_n$ entspricht der Menge der Studenten im vorherigen Beispiel. Dadurch hat man eine bijektive Zuordnung der nummerierten Elemente n_k zur Teilmenge der natürlichen Zahlen $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. (Damit hat man eine bijektive Funktion). Da die Zuordnung eineindeutig ist, können wir die n_k jeweils gerade durch k ersetzen, ohne das Problem zu verändern: $\mathcal{M} = \mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Gesucht ist nun die Anzahl der Möglichkeiten, die Menge $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ auf sich selbst abzubilden, d.h. im obigen Problem die Menge der Nummern der Studenten $\mathbf{N}_n$ der Menge der Nummern der Stühle $\mathbf{N}_n$ zuzuordnen.
• *Soit donné un ensemble* $\mathcal{M}_n$ *avec n éléments, qui sont énumérotés par les numéros de 1 jusqu'à n.* $\mathcal{M}_n$ *correspond à un ensemble d'étudiants dans l'exemple antérieur. On a ainsi un rapport bijectif des éléments numérotés* n_k *à un sous–ensemble* $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *des nombres naturels. (On a ainsi une fonction bijektive.) Comme le rapport est biunivoque, nous pouvons remplacer les* n_k *chaque fois par k, sans transformer le problème:* $\mathcal{M} = \mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. *Maintenant on cherche le nombre des possibilités d'appliquer l'ensemble* $\mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ *sur lui-même, c.-à.-d. dans le problème susdit appliquer l'ensemble des numéros des étudiants* $\mathbf{N}_n$ *à l'ensemble des numéros des chaises* $\mathbf{N}_n$.

[5] Die Fachleute streiten sich allerdings über diesen Wert. Je nach Wissensstand wird er laufend berichtigt.
[6] Les experts se disputent en effet au sujet de cette valeur. Elle est corrigée couramment d'après l'état des connaissances.

Sei $\sigma(k)$ bei einer solchen Zuordnung (im obigen Problem eine Sitzmöglichkeit) das Bild (oben die Stuhlnummer) von k (k entspricht oben der Nummer des Studenten). Dann wird also durch eine solche Zuordnung σ die Menge $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (oben die Menge der Studenten) der Menge $\{\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)\}$ (oben die Stühle) zugeordnet. Schreibt man die Bilder $\sigma(k)$ unter die Urbilder k, so erscheint die durch σ ausgesonderte Relationsmenge in folgender Gestalt:
• *Soit $\sigma(k)$ l'image (en haut le numéro des chaises) à une telle application (dans le problème susdit à une possibilité de s'asseoir) de k (en haut k correspond au numéro de l'étudiant. Alors par une telle application, on applique σ (en haut l'ensemble des étudiants) à l'ensemble $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ (en haut les chaises). Si on écrit les images $\sigma(k)$ sous les originaux k, ainsi l'ensemble de relation défini par σ apparaît dans la forme suivante:*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Damit ist also eine Teilmenge von $\mathbf{N}_n \times \mathbf{N}_n$ gegeben, für die die Relation „Funktion σ" zutrifft.
• *Ainsi un sous-ensemble de $\mathbf{N}_n \times \mathbf{N}_n$ est donné pour lequel le rapport de "fonction σ" est valable.*
Durch das folgende Schema wird daher eine neue Anordnung $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)$ der Elemente $1, 2, 3, \ldots, n$ definiert.
• *Par conséquent, par le schéma suivant, une nouvelle disposition $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)$ des éléments $1, 2, 3, \ldots, n$ est définie.*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Wir sagen: • *Nous disons:*

Definition • Définition 1.3 (Permutation: • Permutation:)
Die Anordnung $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)$ der Elemente aus $\mathbf{N}_n$ heisst **Permutation** $\mathcal{P}$ *der Anordnung $(1, 2, 3, \ldots, n)$ dieser Elemente.*
• *La disposition $\sigma(1), \sigma(2), \sigma(3), \ldots, \sigma(n)$ des éléments de $\mathbf{N}_n$ s'appelle* **permutation** $\mathcal{P}$ *de la disposition $(1, 2, 3, \ldots, n)$ de ces éléments.*

Um eine Permutation zu geben, können wir auch schreiben:
• *Pour donner une permutation, nous pouvons aussi écrire:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \ldots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Die Reihenfolge der Spalten kann beliebig sein.
• *Les collonnes se présentent dans un ordre quelconque.*

Beispiel: • Exemple Durch die folgende Anordnung ist eine solche Permutation gegeben: • *Par la disposition suivante, une telle permutation est donnée:*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 wird auf 4, 2 auf 1 u.s.w.. abgebildet. Nun können wir unser Problem mit den Studenten und den Stühlen abstrakt und allgemein stellen:
• *1 est appliqué sur 4, 2 sur 1 etc.. Maintenant nous pouvons poser notre problème avec les étudiants et les chaises de façon abstraite et générale:*

Problem • Problème 1.2
Permutationen ohne Wiederholung: • Permutations sans répétitions:

Frage: *Wieviele Permutationen $\mathcal{P}$ der Nummern $1, 2, \ldots, n$ gibt es?*
• Question: *• Combien de permutations $\mathcal{P}$ des numéros $1, 2, \ldots, n$ existent–ils?*
Oder anders gefragt: Wieviele Anordnungsmöglichkeiten der Zahlen $1, 2, \ldots, n$ in einer Reihe gibt es?
• Autrement: Combien de possibilités de dispositions des nombres $1, 2, \ldots, n$ dans un rang existent–elles?
Oder nochmals anders gefragt: Wieviele bijektive Funktionen $\mathbf{N}_n \longmapsto \mathbf{N}_n$ gibt es?
• Autrement encore: Combien de fonctions bijektives $\mathbf{N}_n \longmapsto \mathbf{N}_n$ existent–elles?

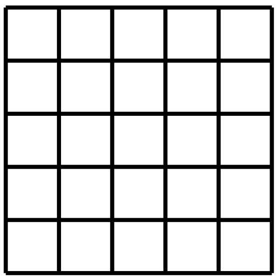
Symbole • Symboles 1 : $P(n)$
Sei $P(n) =$ Anzahl Permutationen der Elemente von M_n der natürlichen Zahlen von 1 bis n.
• Soit $P(n) =$ nombre des permutations des éléments de M_n des nombres naturels de 1 jusqu'à n.

Nun wissen wir: • *Nous savons:*

Satz • Théorème 1.2
Permutationen ohne Wiederholung: • Les permutations sans répétition:

$$P(n) = n!$$

Abbildung 1.1: Teilflächen, verschieden zu färben . . . • *Surfaces partielles, à colorer de manière différente. . .*



Beispiel: • *Exemple:* Wieviele Möglichkeiten gibt es, die in 1.1 gezeigten Teilflächen mit verschiedenen Farben zu färben? – Bei einer Färbung werden den 25 verschiedenen Flächen 25 verschiedene Farben zugeordnet. Statt Flächen und Farben kann man auch nur die Nummern 1 bis 25 betrachten. Man hat also eine bijektive Abbildung einer Menge $\mathcal{M}_{25}$ oder von $\mathbf{N}_{25}$ auf sich. Es wird also nach $P(25) =$ Anzahl Permutationen von $1, 2, 3, \ldots, 25$ gefragt. Das gibt $25! \approx 1.55112 \cdot 10^{25}$. Wie lange hätte wohl einer, um alle Möglichkeiten auszuprobieren?
• *Combien de possibilités est-ce qu'il y a de colorer les différentes surfaces montrées dans 1.1 avec des couleurs différentes? – À une coloration, 25 couleurs différentes sont adjointes aux 25 surfaces différentes. Au lieu de surfaces et couleurs, on peut aussi considérer seulement les numéros de 1 jusqu'à 25. On a ainsi une application bijektive d'un ensemble $\mathcal{M}_{25}$ ou de $\mathcal{M}_{25}$ sur soi–même. On cherche donc $P(25) =$ nombre de permutations de $1, 2, 3, \ldots, 25$. Ça donne $25! \approx 1.55112 \cdot 10^{25}$. Combien de temps est–ce qu'il faudrait probablement pour exécuter toutes les possibilités?*

1.2.2 Permutationen mit Wiederholung — Permutations avec répétition

Paradigma — Paradigme

Problem • Problème 1.3
Vertauschungsmöglichkeiten von Briefen: • Possibilités d'échange de lettres:

Situation:
• Situation:

Ein Personalchef hat 20 verschiedene Briefe geschrieben. Davon sind 7 identische Kopien eines Informationsschreibens an eine Gruppe von Mitarbeitern, die andern 13 Briefe sind vertrauliche und persönliche Antworten in Lohnfragenen anderer Mitarbeiter. Die zugehörigen 20 Couverts liegen ebenfalls bereit.

• *Un chef de personnel a écrit 20 lettres différentes. Il y a 7 copies identiques d'une lettre d'information pour un groupe de collaborateurs et 13 lettres concernant des réponses adressées d'autres collaborateurs concernant des questions de salaire. Les 20 enveloppes sont aussi prêtes.*

Frage: • Question: *Wieviele Möglichkeiten hat die Sekretärin, die Briefe zu verschicken, sodass für sie Probleme entstehen könnten?*

• *Combien de possibilités d'envoyer les lettres est-ce que la secrétaire a, de façon que pour elle des problèmes pourraient se poser?*

Lösung: • Solution: Wenn alle Briefe verschieden wären, so hätte sie 20! Möglichkeiten, die Briefe in Couverts zu stecken. Da nur eine Möglichkeit akzeptiert werden kann, führen dann $(20!-1)$ Möglichkeiten zu Problemen.

Wenn nun 7 Briefe gleich sind, können diese 7 Briefe unter sich vertauscht werden, ohne dass ein Problem entsteht. Man kann das auf 7! Arten tun. Wenn nun X die Anzahl der Platzierungsmöglichkeiten der 13 verschiedenen Briefe in den 20 Couverts ist, so können zu jeder der X Möglichkeiten der verschiedenen Briefe die restlichen, gleichen Briefe auf $Y = 7!$ Arten unter sich vertauscht werden, ohne dass etwas passiert. Da das bei jeder der X Möglichkeiten der Fall ist, *multiplizieren sich die Anzahlen der Möglichkeiten zur Gesamtzahl der Möglichkeiten.* Andere Vertauschungsmöglichkeiten als die hier vorkommenden hat man nicht. Somit gilt: $20! = X \cdot Y = X \cdot 7!$ und damit $X = \frac{20!}{7!}$.

Die Anzahl unerwünschter Möglichkeiten ist somit $X-1 = \frac{20!}{7!}-1 = 482718652416000-1 \approx 4.82719\,10^{14}$.

• *Si toutes les lettres étaient différentes, elle auraient* 20! *possibilités de mettre les lettres dans les enveloppes. Comme une seule possibilité peut être acceptée, les* $(20!-1)$ *autres possibilités causent des problèmes.*

Si 7 lettres sont maintenant les mêmes, ces 7 lettres peuvent être échangées entre elles sans qu'il y ait de problèmes. Cela on peut le faire de 7! *manières différentes. Si maintenant* X *est le nombre de possibilités de placer les* 13 *lettres différentes dans le* 20 *enveloppes, pour chacune des* X *possibilités des lettres différentes les lettres identiques qui restent peuvent être échangées entre elles de* $Y = 7!$ *manières différentes sans qu'il se passe quelque chose d'embêtant. Comme c'est le cas pour chacune des* X *possibilités, les nombres des possibilités se multiplient au nombre total des possibilités. On n'a pas d'autres possibilités d'échange que celle qui sont mentionnées ici. Par conséquent il vaut:* $20! = X \cdot Y = X \cdot 7!$ *et par conséquent* $X = \frac{20!}{7!}$.

Le nombre de possibilités indésirables est par conséquent $X - 1 = \frac{20!}{7!} - 1 = 482718652416000 - 1 \approx 4.82719\,10^{14}$.

Verallgemeinerung des Problems: • Généralisation du problème:

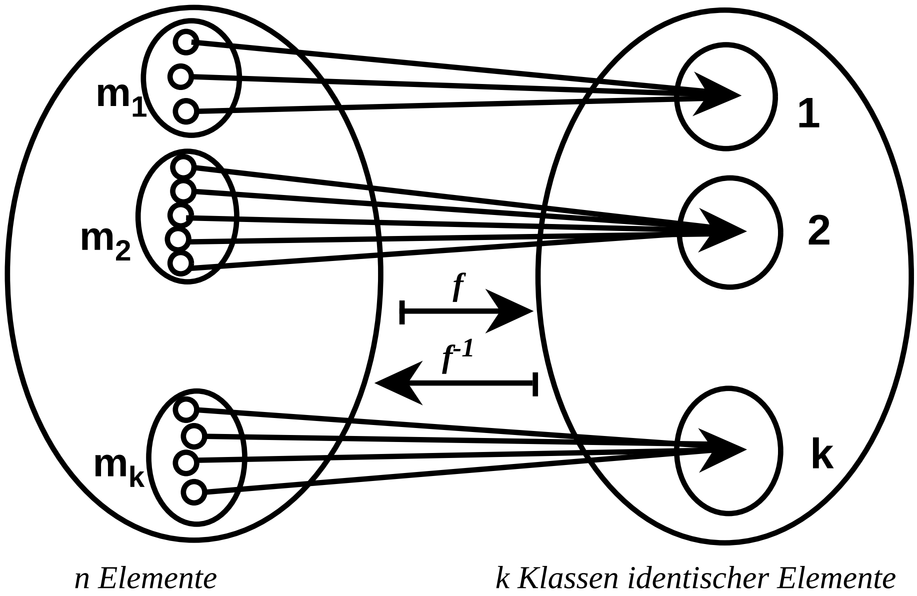
Wir gehen wieder von 20 Briefen aus, 7 davon gleich, die wir zur *Klasse* 1 zusammenfassen. Weiter sei jetzt nochmals ein spezieller Brief da, zu welchem sich noch zwei gleiche finden. Diese 3 seinen in einer *Klasse* 2 zusammengefasst. Dann finden wir nochmals 4 gleiche, die in einer *Klasse* 3 zusammengefasst werden. Sei nun Y_i die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten der Briefe in der *Klasse* i unter sich und X wie vorhin die Anzahl der Vertauschungsmöglichkeiten der restlichen ungleichen Briefe. Dann gilt aus demselben Grunde wie oben:

• *Nous partons encore de 20 lettres dont 7 sont les mêmes qui sont proupées dans une classe* 1. *En plus on a une lettre spéciale, pour laquelle on trouve deux autres identiques. Ces 3 soient réunies dans une classe* 2. *Nous trouvons encore 4 identiques qui sont réunies dans une classe* 3. *Soit maintenant* Y_i *le nombre des possibilités d'échange des lettres entre elles dans la classe* i *et* X *comme en haut le nombre des possibilités d'échange des lettres inégales et restantes. Alors il vaut par la même raison comme en haut:*

$$20! = X \cdot Y_1! \cdot Y_2! \cdot Y_3! = X \cdot 7! \cdot 3! \cdot 4!, \quad \text{also} \;\; \bullet \;\; \textit{donc}$$

$$X = \frac{20!}{7! \cdot 3! \cdot 4!}$$

Abbildung 1.2: Anzahl möglicher Umkehrabbildungen f^{-1}? • *Possibilités d'applications inverses* f^{-1}?



• *Esquisse:* *n éléments* $\longmapsto$ *n classes d'éléments identiques*

Das führt uns auf folgendes allgemeinere Problem:
• *Ça nous mène au problème général:*

Gegeben: • Donné:
Total n Briefe, n Couverts, davon k Klassen je unter sich gleicher Briefe wie folgt:
• *Totalement n lettres, n enceloppes dont on a k classes de lettres identiques entre elles:*
$Klasse_1$: m_1 gleiche Briefe vom Typ 1 • *$Classe_1$: m_1 lettres identiques du type* 1,
$Klasse_2$: m_2 gleiche Briefe vom Typ 2 • *$Classe_2$: m_1 lettres identiques du type* 2,
$\vdots$ $\vdots$
$Klasse_k$: m_k gleiche Briefe vom Typ k • *$Classe_k$: m_k lettres identiques du type k*

Gesucht: • Trouver: Anzahl Möglichkeiten $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, die Briefe in die Couverts zu platzieren.
• *Nombre de possibilités $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$, de mettre les lettres dans les enveloppes.*

Symbole • Symboles 2 : $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$
$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) =$ *Anzahl Möglichkeiten, die eben beschriebenen n Objekte (hier Briefe, wobei k $Klassen$ mit je n_j gleichen Objekten darunter sind) auf n Plätze (hier Couverts) zu platzieren.*
• $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) =$ *nombre de possibilités, de placer les n objets qu'on vient de décrire (ici des lettres parmi lesquelles on trouve k classes avec n_j objets identiques entre eux) sur n places (ici des enveloppes).*

Definition • Définition 1.4 (Permutat. m. Wiederholung: • Permut. avec répétitions:)
Gegeben sei eine Menge $\mathcal{M}_n$ mit n Elementen. Darin seinen k $Klassen$ mit je n_i gleichen Elementen (pro $Klasse\, i$) enthalten. Bei der Nummerierung der Elemente erhalten alle Elemente einer Klasse dieselbe

Nummer. Eine Permutation der Elemente von $\mathcal{M}_n$ nennen wir **Permutation mit Wiederholung**.
• *Soit donné un ensemble $\mathcal{M}_n$ avec n éléments. Dans cet ensemble on trouve k classes avec n_i éléments identiques (par classe i). A une énumération des éléments, tous les éléments d'une classe reçoivent le même numéro. Nous appelons une permutation des éléments de $\mathcal{M}_n$* **une permutation avec répétitions**.

Wir wissen jetzt: • *Maintenant nous savons:*

Satz • Théorème 1.3 (Permutationen mit Wiederholung • Permut. avec répétition:) *:*
Anzahl der Permutationen mit Wiederholung: • Nombre de permutations avec répétitionss:

$$P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot m_k!}$$

Das abstrakte Problem — Le problème abstrait

Gegeben: • Donné: Eine Menge mit n Elementen, z.B. $\mathbf{R}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ sowie eine Menge mit k Elementen, z.B. $\mathbf{R}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $n \geq k$. Man betrachte dann die möglichen Funktionen $f : \mathbf{R}_n \longmapsto \mathbf{R}_k$ (ein Beispiel ist in Abb. 1.2 dargestellt).
• *Un ensemble avec n éléments, par exemple $\mathbf{R}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ ainsi qu'un ensemble avec k éléments, z.B. $\mathbf{R}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$. Puis on considère les fonctions possibles $f : \mathbf{R}_n \longmapsto \mathbf{R}_k$ (un exemple est représenté dans image 1.2).*

Gesucht: • Trouver: Anzahl möglicher Umkehrabbildungen $f^{-1} : \mathbf{R}_k \longmapsto \mathbf{R}_n$. Dabei wird das erste Element (1 rechts im Bild) m_1 mal abgebildet, das zweite Element (2 rechts im Bild) m_1 mal u.s.w..
• *Nombre d'applications inverses possibles $f^{-1} : \mathbf{R}_k \longmapsto \mathbf{R}_n$. Pour cela le premier élément (1 à droite dans l'image) est appliqué m_1 fois, le deuxième élément (2 à droite dans l'image) m_1 fois etc..*

Es werden also die k Klassen gleicher Elemente (gleiche Briefe im Paradigma) auf die n verschiedenen Elemente (Couverts im Paradigma) abgebildet. Die gesuchte Anzahl ist dann $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.
• *Les k classes d'éléments identiques (lettres identiques dans le paradigme) sont ainsi appliquées sur les n éléments différents (enveloppes dans le paradigme). Le nombre qu'on cherche est donc $P_n(m_1, m_2, \ldots, m_k)$.*

Beispiel: • Exemple: Auf wieviele Arten lassen sich in einer Klasse mit 26 Studenten 5 Arbeitsgruppen mit 4, 5, 5, 6 und 6 Studenten bilden? Die Lösung ist:
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut former dans une classe de 26 étudiants 5 groupes de travail avec 4, 5, 5, 6 et 6 étudiants? La solution est:*

$$P_{26}(4, 5, 5, 6, 6) = \frac{26!}{4! \cdot 5!^2 \cdot 6!^2} = 2251024905729600 \approx 2.25102\,10^{15}$$

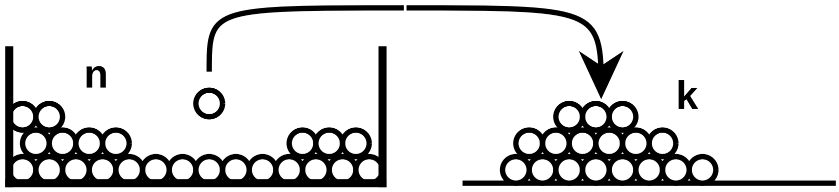
1.3 Auswahlprobleme mit und ohne Anordnung — Problèmes de sélection avec et sans rangement

1.3.1 Die Fragestellungen — Les questions

Kombinationen — Combinaisons

Problem • Problème 1.4 (Auswahlproblem: • Problème de sélection:)

Abbildung 1.3: Auswahlproblem, Kombinationen • *Problème de sélection, combinaisons*



Gegeben: • **Donné:** *Eine Kiste mit n wohlunterscheidbaren Objekten, z.B. verschiedenfarbigen Kugeln. Aus der Kiste werden dann auf eine beliebige Art und Weise k Objekte herausgegriffen und nebenan aufgehäuft. (Vgl. Abb. 1.3.)*
• *Une caisse qui contient n objets bien distincts, par exemple des boules de différents couleurs. Dans la caisse, on choisit k objets de manière quelconque et on les accumule à côté. (Voir fig. 1.3.)*

Frage: • **Question:** *Auf wieviele Arten sind solche Haufenbildungen nebenan möglich?*
• *De combien de manières différentes peut–on former le tas à côté?*

Wohlverstanden spielt bei der Haufenbildung die Anordnung der Objekte resp. der Kugeln keine Rolle. Dieses Problem lässt sich ohne viel Denkaufwand gleich abstrakt stellen. Die Kugeln in der Kiste bilden eine Menge $\mathcal{M}_n$, z.B. $\mathcal{M}_n = \mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Herausgegriffen wird eine Teilmenge $\mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}_n$, z.B. $\mathbf{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \leq n$. Diese Teilmenge bildet den Haufen nebenan.
• *La disposition des objets ne joue bien entendu aucun rôle à la disposition des objets resp. des boules. Il est possible de poser ce problème tout de suite abstraitement sans beaucoup de dépense de travail de cerveau. Les boules dans la caisse forment un ensemble $\mathcal{M}_n$, par exemple $\mathcal{M}_n = \mathbf{N}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. On choisit un sous-ensemble $\mathcal{M}_k \subseteq \mathcal{M}_n$, z.B. $\mathbf{N}_k = \{1, 2, 3, \ldots, k\}$, $k \leq n$. Ce sous-ensemble forme le tas d'à côté.*

Definition • Définition 1.5
Kombination ohne Wiederholung • Combinaison sans répétition
Eine solche Auswahl von k Elementen aus $\mathcal{M}_n$ heisst **Kombination k–ter Ordnung ohne Wiederholung** *bei n Elementen, kurz: Kombination k–ter Ordnung.*
• *Un tel choix de k éléments dans $\mathcal{M}_n$ s'appelle* **combinaison d'ordre k sans répétition** *pour n éléments, brièvement: Combinaison d'ordre k.*

Symbole • Symboles 3 (Anzahl Kombinationen: • Nombre de combinaisons:)
$C(k, n)$ = *Anzahl Kombinationen k–ter Ordnung bei n Elementen.*
• $C(k, n)$ = *nombre de combinaisons d'ordre k pour n éléments.*

Abstraktes Problem (Kombinationen ohne Wiederholung):
• Problème abstrait (combinaisons sans répétition):

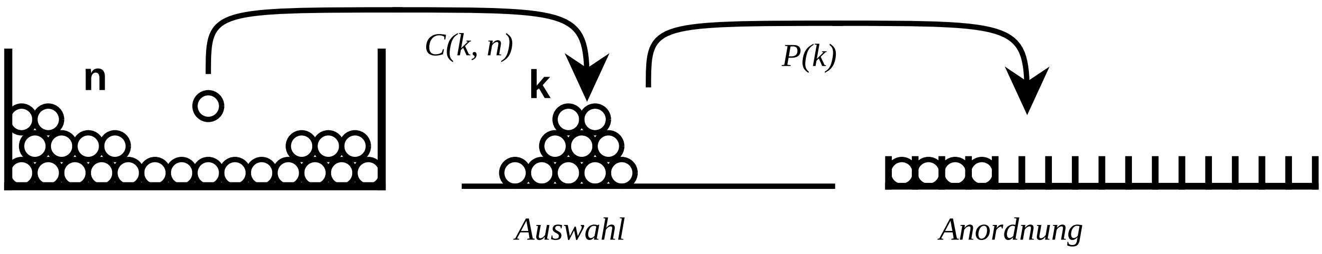
Gegeben: • **Donné:** Eine Menge $\mathcal{M}_n$ mit n Elementen.
• *Un ensemble $\mathcal{M}_n$ à n éléments.*

Frage: • **Question:** $C(k, n) = ?$ D.h. wieviele Teilmengen mit genau k Elementen kann man bilden?
• *$C(k, n) = ?$ C.-à.-d. combien de sous-ensembles peut–on former avec exactement k éléments?*

Variationen — Arrangements

In Abb. 1.4 wird die Auswahl (Kombination) anschliessend noch angeordnet. Zwei solche Kombinationen mit denselben Elementen, aber verschiedener Anordnungen sind jetzt unterscheidbar. Man definiert da-

Abbildung 1.4: Relationsmenge, Abbildung • *Ensemble de relations et d'applications (choix, disposition)*



her:
• *Dans la fig. 1.4 le choix (combinaison) est encore arrangé. On peut distinguer deux combinaisons de ce genre avec les mêmes éléments, mais de dispositions différentes. On définit par conséquent:*

Definition • Définition 1.6
Variation ohne Wiederholung: • Arrangement sans répétition:
Werden die aus $\mathcal{M}_n$ ausgewählten Elemente (die Kombination also) noch angeordnet, so spricht man von einer **Variation k–ter Ordnung ohne Wiederholung** *bei n Elementen. Kurz: Variation k–ter Ordnung.*
• *Si les éléments choisis dans $\mathcal{M}_n$ sont encore arrangés, on parle d'un* **arrangement d'ordre** k **sans répétition** *pour n éléments. Brièvement: Arrangement d'ordre k.*

Symbole • Symboles 4 (Anzahl Variationen: • Nombre d'arrangements:)
$V(k,n)$ = *Anzahl Variationen k–ter Ordnung bei n Elementen.*
• $V(k,n)$ = *nombre d'arrangements d'ordre k pour n éléments.*

Beispiel: • Exemple

Gegeben seien die Elemente a, b und c. Gesucht sind alle Kombinationen und Variationen 2–ter Ordnung.
• *Soient donnés les éléments a, b et c. Trouver toutes les combinaisons et toutes les arrangements d'ordre 2.*

Lösung: • Solution:

Kombinationen • *Combinaisons*:	$a\ b$	$a\ c$	$b\ c$:	3 Stück. • *3 pièces*
Variationen: • *Arrangements:*	$a\ b$	$a\ c$	$b\ c$	
	$b\ a$	$c\ a$	$c\ b$:	6 Stück. • *6 pièces*

Wiederholungen — Répétitions

Ersetzt man in der Vorratsmenge $\mathcal{M}_n$ jedes der Elemente e_i durch eine Menge E_i mit gleichen Elementen, die sich nur durch einen *internen Index* unterscheiden (z.B. $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \ldots\}$), so wird es möglich, ein Element e_i mehrmals auszuwählen, wobei der interne Index nach der Auswahl wieder weggelassen werden kann[7]. Denselben Effekt erzielen wir, wenn wir nach der Auswahl eines Elementes eine identische Kopie dieses Elementes wieder zurücklegen. Wir stellen uns also vor, dass sich ein Element e_i bei seiner Auswahl dupliziert, sodass trotz Auswahl und Entfernung des Elements die Menge $\mathcal{M}_n$ unverändert bleibt. Ein Element wird also bei der Auswahl und Entfernung aus $\mathcal{M}_n$ sofort wieder in $\mathcal{M}_n$ nachgeliefert, etwa so wie bei einem bestimmten Artikel im Regal eines gut geführten Selbstbedienungsladens, wo die Regale immer sofort wieder aufgefüllt werden. Falls dieses Auffüllen, Duplizieren, Kopieren oder Zurücklegen beliebig oft möglich ist, so sagen wir, die Elemente in $\mathcal{M}_n$ seien *wiederholt auswählbar*. Wir definieren

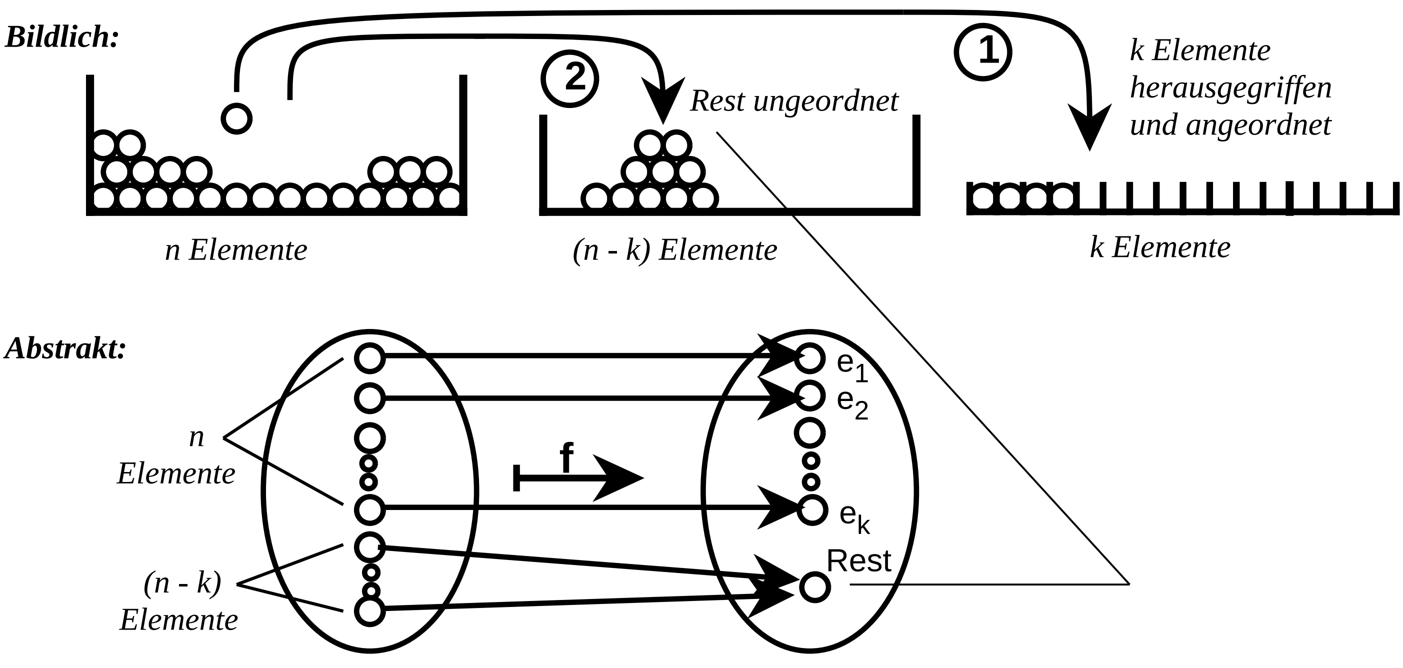
[7] Der interne Index wird nur zur Bildung der „Mengen gleicher Elemente E_i" gebraucht, die notwendig sind, um eine wiederholte Auswahl desselben Elements möglich zu machen.

nun:
• *Si on remplace dans l'ensemble de réserve $\mathcal{M}_n$ chacun des éléments e_i par un ensemble E_i avec les mêmes éléments, qui ne se distinguent que par un indice interne (par exemple $E_i = \{e_{i1}, e_{i2}, e_{i3}, \ldots\}$), ainsi il devient possible de choisir un élément e_i plusieurs fois. L'indice interne peut être omis après le choix[8]. Nous obtenons le même effet si nous mettons en réserve une copie identique de cet élément après le choix de l'élément. Nous nous imaginons donc qu'un élément e_i se duplique lors de son choix, et, que malgré qu'on ait choisi et enlevé l'élément, l'ensemble $\mathcal{M}_n$ reste inchangé. Un élément est donc fourni tout de suite dans $\mathcal{M}_n$ lors qu'on l'a choisi et enlevé de $\mathcal{M}_n$. On peut comparer cela à la situation dans un supermarché où les marchandises sont remplacées sur les étagères au fur et à mesure qu'elles sont vendues. S'il est possible aussi souvent qu'on veut de remplir, copier ou remettre les éléments, nous disons que les éléments dans $\mathcal{M}_n$ sont répétitivement sélectionnables. Nous définissons maintenant:*

Definition • Définition 1.7
Kombination und Variation mit Wiederholung: • Combinaison et arrangement avec répétition:
Sind bei der Bildung einer Kombination oder einer Variation die Elemente aus $\mathcal{M}_n$ wiederholt auswählbar, so spricht man von einer Kombination oder einer Variation **mit Wiederholung**.
• *Si à la formation d'une combinaison ou d'un arrangement les éléments de $\mathcal{M}_n$ sont sélectionnables de façon répétitive, nous parlons d'une combinaison ou d'un arrangement* **avec répétition**.

Wir beginnen nun mit der Variation ohne Wiederholung:
• *Nous commençons maintenant avec l'arrangement sans répétition:*

Abbildung 1.5: Variationen ohne Wiederholung • *Arrangement sans répétition (image — abstrait, éléments, reste)*



[8]L'indice interne n'est utilisé que pour former l'ensemble d'éléments identiques E_i, qui sont nécessaires pour rendre possible un choix répété d'éléments identiques.

1.3.2 Variation ohne Wiederholung — Arrangement sans répétition

Aus n Elementen werden k Elemente herausgegriffen und angeordnet, ohne Wiederholung, so wie in Abb. 1.5 dargestellt. Dort wird z.B. das Element e_1 auf den Platz 1, e_2 auf den Platz 2 u.s.w.. gelegt. Alle $(n-k)$ nicht ausgewählten Elemente, der Rest also, kann man sich anschliessend in eine Kiste nebenan gelegt denken, auf einen Haufen also. Diese anschliessende Operation verändert die Anzahl Auswahl– und Anordnungsmöglichkeiten der ersten k Elemente nicht, denn diese Haufenbildung ist eine einzige, unabhängige Handlung, die nichts weiteres beiträgt. In dieser Restkiste nebenan spielt also die Anordnung der Elemente keine Rolle. Man unterscheidet diese Elemente demnach nicht, es ist egal, wie sie liegen. Daher bilden sie eine Klasse nicht unterschiedener, also gleicher Elemente, die auf nur eine einzige Art angeordnet werden können (da sie als nicht unterscheidbar gelten). Daher hat man folgendes Problem: Man hat n Elemente, k verschiedene und $n-k$ gleiche. Diese Elemente sind anzuordnen. Oder abstrakt: Man sucht die Anzahl der möglichen Umkehrfunktionen f^{-1} (vgl. Abb. 1.5). Das Problem haben wir aber bereits bei den Permutationen mit Wiederholung gelöst: Die Anzahl ist $P_n(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$

• *Dans n éléments on choisit k éléments qui sont disposés immédiatement, sans répétition d'éléments, à l'instar de fig. 1.5. Là par exemple l'élément e_1 est mis sur la place 1, e_2 sur la place 2 etc.. Ensuite on s'imagine que tous les $(n-k)$ éléments non–choisis, donc le reste, sont mis dans une caisse à part resp. sur un tas. Cette opération ne change pas le nombre de possibilités de choix, le nombre de possibilités de disposition des premiers k éléments , car cette formation de tas est une action unique et indépendante qui ne contribue rien à l'opération. Dans cette caisse de restes à part, la disposition des éléments ne joue pas de rôle. On ne distingue donc pas ces éléments, c'est égal comme ils sont disposés. Par conséquent ils forment une classe d'éléments non–distingués et donc une classe d'éléments égaux qui sont disposés d'une seule manière (parce qu'ils comptent comme non–distinctifs). Par conséquent on a le problème suivant: On a n éléments, k sont distinctifs et $n-k$ sont égaux. Ces éléments sont à arranger. Ou bien abstraitement: On cherche le nombre des fonctions inverses possibles f^{-1} (voir fig. 1.5). Ce problème a été résolu déjà à l'occasion des permutations avec répétition: Le nombre est $P_n(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$.*

Satz • Théorème 1.4 (Variationen ohne Wiederholung: • Arrangements sans répédition:)

$$V(k,n) = P_n(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Beispiel: • Exemple:

Auf wieviele Arten kann man 20 verschiedene vorhandene Ferienjobs an 26 verschiedene Studenten verteilen, die alle einen solchen Job haben wollen, wenn diese Jobs nicht in Teiljobs aufteilbar sind?
Es handelt sich um die Auswahl 20 aus 26 mit anschliessender Zuordnung zu unterscheidbaren Studenten, d.h. Anordnung. Die Lösung ist somit:

• *De combien de manières est-ce qu'on peut distribuer 20 jobs de vacances différents et disponibles à 26 étudiants différents qui veulent avoir tous un semblable travail, si ces jobs ne sont pas divisibles dans des job partiels?*
Il s'agit du choix de 20 sur 26 avec un classement des étudiants non distinctifs, c.-à.-d. un arrangement. La solution est par conséquent:

$$V(20,26) = \frac{26!}{(26-20)!} = \frac{26!}{(6)!} = 67215243521100939264000000 \approx 6.72152\,10^{25}$$

Ein Spezialfall: • Un cas spécial: $V(n,n) = P_n(n-n) = P_n(0) = P(n)$
$\leadsto$ Permutation ohne Wiederholung! • *Permutation sans répétition!*

1.3.3 Kombination ohne Wiederholung — Combinaison sans répétition

Die Formel — La formule

Auf Seite 9 haben wir gesehen, dass sich bei Aussonderung einer Teilmenge gleicher Elemente die Anzahl der Möglichkeiten multiplikativ verhalten. Da war $20! = X \cdot Y = X \cdot 7!$. Die gleiche Situation finden wir

beim Übergang von den Kombinationen zu den Variationen: Eine Variation (k Elemente aus n Elementen) entsteht aus einer Kombination durch Anordnung der k ausgewählten Elemente. Dazu hat man $P(k) = k!$ Möglichkeiten. Es gilt also:
• *A la page 9 nous avons vu qu'à une sélection d'un sous-ensemble de mêmes éléments le nombre des possibilités se comporte de façon multiplikative. On y a trouvé:* $20! = X \cdot Y = X \cdot 7!$. *Nous trouvons la même situation au passage des combinaisons à l'arrangement: Un arrangement (k éléments de n éléments) peut être obtenu d'une combinaison par la disposition des k éléments choisis. On y a* $P(k) = k!$ *possibilités. Il vaut donc:*

Lemma • Lemme 1.1 (Variationen und Kombination: • Arrangements et combinaison:)

$$V(k,n) = C(k,n) \cdot P(k), \text{ also } \frac{n!}{(n-k)!} = C(k,n) \cdot k!$$

Daraus folgt: • *Il en suit:*

Satz • Théorème 1.5 (Kombination ohne Wiederholung • Combinaison sans répétition:)

$$C(k,n) = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot k}$$

Das Beispiel Zahlenlotto „6 aus 45“: • L'exemple du jeu de loto ”6 de 45”:

Auf wieviele Arten kann man 6 verschiedene Zahlen aus den 45 ersten natürlichen Zahlen auswählen? Hier handelt es sich um eine typische Frage nach der Anzahl Kombinationen $C(6,45)$. Diese ist gleich:
• *De combien de manières différentes est-ce qu'on peut choisir 6 nombres différents dans les 45 premiers nombres naturels? Ici, il s'agit d'une question typique concernant le nombre des combinaisons* $C(6,45)$. *Celle-ci est égale à:*

$$\frac{45!}{6! \cdot (45-6)!} = \frac{45!}{6! \cdot (39)!} = 8145060 \approx 8.14506\, 10^6$$

Binomialkoeffizienten — Coéfficients binomiaux

Multipliziert man das Binom $(a+b)^n = \overbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ Faktoren}}$ nach den Regeln des Distributivgesetzes aus, so entstehen lauter Summanden der Form $m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ mit $0 \leq k \leq n$ und $m, k, n \in \mathbf{N}_0$. Beim Ausmultiplizieren nimmt man der Reihe nach aus jedem Faktor $(a+b)$ einen der Summanden a oder b und multipliziert diese Faktoren zu einem Produkt $a^k \cdot b^{n-k}$. Falls man in jedem Summanden a und nie b nimmt, entsteht $a^n \cdot b^0$. Falls man in j Summanden a und folglich in $n-j$ Summanden b nimmt, entsteht $a^j \cdot b^{(n-j)}$. Dabei gibt es hier verschiedene Möglichkeiten, das a oder das b auszuwählen: Man kann z.B. im ersten Faktor a, im zweiten b, im dritten wieder a wählen etc., man kann aber auch zuerst b, dann a und dann wieder a wählen etc.. m_k ist die Anzahl der Möglichkeiten, a in genau k Faktoren $(a+b)$ und b in genau $n-k$ Faktoren zu wählen. Es ist dann:
• *Si on multiplie le binôme* $(a+b)^n = \overbrace{(a+b) \cdot (a+b) \cdot \ldots \cdot (a+b)}_{n \text{ facteurs}}$ *d'après les règles de la loi distributive, on n'obtient que des termes additionnels de la forme* $m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ *avec* $0 \leq k \leq n$ *et* $m, k, n \in \mathbf{N}_0$. *A la multiplication on prend selon le rang de chaque facteur* $(a+b)$ *un des termes additionnels a ou b et on les multiplie en obtenant un produit* $a^k \cdot b^{n-k}$. *Si on prend dans chaque terme additionel a et jamais b, on obtient* $a^n \cdot b^0$. *Si on prend a dans j termes additionnels et b dans* $n-j$ *termes additionnels, on obtient* $a^j \cdot b^{(n-j)}$. *A cette occasion il existe plusieurs possibilités de choisir le a ou le b. Par exemple on peut choisir a dans le premier facteur, b dans le deuxième facteur, de nouveau a dans le troisième facteur etc., mais on peut aussi choisir d'abord b, après a et alors encore une fois a etc...* m_k *est le nombre des*

possibilités de choisir a dans exactement k facteurs $(a+b)$ *et b dans exactement* $n-k$ *facteurs. Il vaut donc:*

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Wie gross ist nun m_k? — Hier handelt es sich um ein Auswahlproblem: Auf wieviele Arten kann man aus den n Faktoren $(a+b)$ k Faktoren auswählen und dort jeweils den Anteil a (und folglich in den restlichen $n-k$ Faktoren jeweils den Anteil b) nehmen? Diese Frage ist äquivalent mit der einfacheren Frage: Auf wieviele verschiedene Arten kann man aus n Elementen (Faktoren $(a+b)$) jetzt k Elemente auswählen? Die Antwort ist nun einfach: $m_k = C(k,n)$. m_k hat einen Namen:
• *Quelle est maintenant la grandeur de* m_k *?– Ici, il s'agit d'un problème de choix: De combien de manières différentes est-ce qu'on peut choisir entre les n facteurs* $(a+b)$ *k facteurs et y prendre la partie a (et par conséquent prendre dans les* $n-k$ *facteurs restants chaque fois la partie b)? Cette question est équivalente à la question plus simple: De combien de manières différentes est-ce qu'on peut maintenant choisir entre n éléments (facteurs* $(a+b)$*) k éléments? La réponse est maintenant très simple:* $m_k = C(k,n)$. m_k *porte un nom:*

Definition • Définition 1.8 (Binomialkoeffizient: • *Coéfficient binomial:***)** *:*
m_k heisst **Binomialkoeffizient**. • m_k *s'appelle* **Coéfficient binomial**.

Symbole • Symboles 5 (Binomialkoeffizient: • *Coéfficient binomial:***)** $m_k := \binom{n}{k}$

Wir wissen jetzt: • *Nous savons maintenant:*

Satz • Théorème 1.6 (Binomischer Lehrsatz • Théorème binomial:)

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} m_k \cdot a^k \cdot b^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot a^k \cdot b^{n-k}$$

Binomialkoeffizienten kann man bekanntlich im *Pascalschen Dreieck* ablesen:
• *On peut lire les coéfficients binomiaux dans le triangle de Pascal:*

Pascalsches Dreieck: • Triangle de Pascal:

$$\begin{array}{lccccccccc}
n=0\ldots & & & & & 1 & & & & \\
n=1\ldots & & & & 1 & & 1 & & & \\
n=2\ldots & & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
n=3\ldots & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
n=4\ldots & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
\text{etc.}\ldots & & & & & \ldots & & & &
\end{array}$$

Die vertikale Position ist n, die horizontale k. Die Numerierung beginnt jeweils mit 0. So liest man z.B. ab: $\binom{4}{1} = 4$ und $\binom{4}{2} = 6$.
• *La position verticale est n, la position horizontale k. Le numérotage commence chaque fois par 0. Ainsi on peut lire par exemple:* $c\binom{4}{1} = 4$ *und* $\binom{4}{2} = 6$.
Für die Binomialkoeffizienten kann man mit Hilfe von $\binom{n}{k} = C(k,n) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ sowie mit dem Prinzip der vollständigen Induktion[9] leicht die folgenden Gesetze beweisen:
• *Pour les coéfficients binomiaux, on peut prouver à l'aide de* $\binom{n}{k} = C(k,n) = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$ *ainsi qu'avec le principe de l'induction complète*[10] *facilement les lois suivantes:*

Satz • Théorème 1.7
Einige Eigenschaften der Binomialkoeffizienten: • Quelques qualités des coéfficienta binomiaux:

[9] Vgl. Zahlenlehre
[10] Voir théorie des nombres

1)	$\binom{n}{k}$	$=$	$\binom{n}{n-k}$	*2)*	$\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}$	$=$	$\binom{n}{k}$
3)	2^n	$=$	$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$	*4)*	$\sum_{k=0}^{r}\binom{p}{k}\cdot\binom{q}{r-k}$	$=$	$\binom{p+q}{r}$
5)	$\sum_{s=0}^{n-1}\binom{k+s}{k}$	$=$	$\binom{n+k}{k+1}$	*6)*	$\sum_{k=0}^{p}\binom{p}{k}^2$	$=$	$\binom{2p}{p}$

Z.B. die Formel $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ ergibt sich aus $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ mit Hilfe des binomischen Lehrsatzes.
• *Par exemple la formule $2^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ est obtenue par $2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cdot 1^k\cdot 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ à l'aide du théorème binomial.*

1.3.4 Variation mit Wiederholung — Arrangement avec répétition

Die Formel — La formule

Die *Variation mit Wiederholung* ist auf Seite 14 erklärt worden. Die Formel für die Anzahl Variationen mit Wiederholung hingegen müssen wir noch erarbeiten. Dazu verwenden wir folgendes Symbol:
• *L'arrangement avec répétition a été expliqué à la page 14. La formule pour le nombre d'arrangements avec répétition par contre doit encore être élaborée. Pour cela ous utilisons le symbole suivant:*

Symbole • Symboles 6 *:* $\bar{V}(k,n)$
$\bar{V}(k,n) =$ *Anzahl Variationen mit Wiederholung bei einer Auswahl von k Elementen aus einem Vorrat mit n verschiedenen Elementen, die alle wiederholbar sind.*
• $\bar{V}(k,n) =$ *nombre d'arrangements avec répétition pour un choix de k éléments dans une réserve avec n éléments différents, qui tous peuvent être répétés.*

Herleitung der Formel: • Déduction de la formule:
Wir betrachten die k numerierten Plätze, auf denen die auszuwählenden Elemente anzuordnen sind (vgl. Abb. 1.5 oben links im Bild). Da wir jedes der n Elemente im Vorrat auswählen können, hat man n Möglichkeiten, den 1. Platz zu besetzen. Bei der Auswahl für den 2. Platz hat man aber wieder n Elemente im Vorrat zur Auswahl, da wegen der Wiederholbarkeit wieder jedes Element vorhanden ist und gewählt werden kann: Zu jeder der n Möglichkeiten für den 1. Platz hat man n Möglichkeiten für den 2. Platz, total also jetzt $n\cdot n = n^2$ Möglichkeiten. Genauso geht es für den 3. Platz: Zu jeder der n^2 Möglichkeiten für die Plätze 1 und 2 hat man n Möglichkeiten für den 3. Platz, total also jetzt $n^2\cdot n = n^3$ Möglichkeiten. So fährt man fort: Für die Besetzung der ersten 4 Plätze hat man n^4 Möglichkeiten, für die Besetzung der ersten 5 Plätze n^5 Möglichkeiten und schliesslich für die Besetzung der ersten k Plätze hat man n^k Möglichkeiten. Wir haben somit den Satz:
• *Nous considérons les k places numérotés sur lesquelles les éléments à choisir sont ordonnés (voir fig. 1.5 en haut à gauche dans l'image). Comme nous pouvons choisir chacun des n éléments dans la réserve, on a n possibilités d'occuper la 1ère place. Pour la 2ème place on a de nouveau n éléments dans la réserve à disposition pour le choix; à cause de la possibilité de répétition chaque élément existe toujours et peut être choisi: Pour chacune des n possibilités pour la 1ère place on a n possibilités pour la 2ème place, totalement donc $n\cdot n = n^2$ possibilités. Également pour la 3ème place: Pour chacun des n^2 possibilités pour les places 1 et 2 on a n possibilités pour la 3ème place, totalement donc $n^2\cdot n = n^3$ possibilités. On continue ainsi: Pour l'occupation des premières 4 places on a n^4 possibilités , pour l'occupation des premières 5 places n^5 possibilités et finalement pour l'occupation des premières k places on a n^k possibilités. Par conséquent nous avons le théorème:*

Satz • Théorème 1.8 (Variationen mit Wiederholung: • Arrangement avec répétitions:)

$$\bar{V}(k,n) = n^k$$

Beispiel: • Exemple:
Auf wieviele Arten können 26 (unterscheidbare) Studenten sich in 12 verschiedene Kurse einschreiben, wenn jeder Kurs 26 Plätze offen hat, also keine Platzbeschränkung besteht?

• *De combien de possibilités différentes est-ce que 26 étudiants (qu'on peut distinguer) peuvent s'inscrire dans 12 cours différents, si chaque cours offre 26 places, c.à.d. s'il n'y a pas de limites aux places?*

Lösung: • Solution:

Der erste Student hat 12 Möglichkeiten, sich in einen Kurs einzuschreiben. Zu jeder dieser Möglichkeiten des ersten Studenten hat der zweite auch 12 Möglichkeiten, sich in einen Kurs einzuschreiben. Beide zusammen haben also 12^2 Möglichkeiten. Für den dritten, vierten etc. Studenten geht das auch so: Jeder hat die 12 Möglichkeiten, und die Möglichkeiten multiplizieren sich. Es handelt sich um eine Variation mit Wiederholung. Total gibt es $\bar{V}(k,n) = \bar{V}(26,12) = 12^{26} = 11447545997288281555215581184 \approx 1.14475\,10^{28}$ Möglichkeiten.

• *Le premier étudiant a 12 possibilités de s'inscrire dans un cours. Pour chacune de ces possibilités du premier étudiant le deuxième a aussi 12 possibilités de s'inscrire dans un cours. Les deux ensemble ont 12^2 possibilités. Pour le troisième, quatrième etc. étudiant ça fonctionne aussi d'après le même schéma: Chacun a les 12 possibilités, et les possibilités se multiplient. Il s'agit d'un arrangement avec répétitions. Totalement il y a $\bar{V}(k,n) = \bar{V}(26,12) = 12^{26} = 11447545997288281555215581184 \approx 1.14475\,10^{28}$ possibilités.*

Merke: Aus diesem Beispiel ersieht man, dass $k > n$ sein kann.
• **A retenir:** *Par cet exemple, on voit que k peut être plus grand que n: $k > n$.*

Anwendung: Die Mächtigkeit der Potenzmenge — Application: Puissance de l'ensemble de parties

Die Potenzmenge ist bekanntlich die Menge aller Teilmengen.
• *L'ensemble de parties est comme chacun sait l'ensemble de tous les sous-ensembles.*

Problem • Problème 1.5
Mächtigkeit der Potenzmenge: • La puissance de l'ensemble de parties

Gegeben: • Donné: Eine Menge $\mathcal{M}$ mit n Elementen.
• *Un ensemble $\mathcal{M}$ à n éléments.*

Frage: • Question: Wieviele Teilmengen hat $\mathcal{M}$?
• *Combien d'ensembles partiels $\mathcal{M}$ a–t–il?*

Lösung: • Solution:

$\binom{n}{k} = C(k,n)$ ist bekanntlich die Anzahl Teilmengen mit k Elementen, denn hier handelt es sich ja um das typische Auswahlproblem. Nun kann man eine oder mehrere Teilmengen mit 0 (leere Menge), 1, 2, $\ldots$, n Elemente wählen. Total hat man also:

• *$\binom{n}{k} = C(k,n)$ est comme chacun sait le sous-ensembles avec k éléments, car ici, il s'agit d'un problème de choix typique. Maintenant on peut choisir un ou plusieurs sous-ensembles avec 0 (quantité vide), 1, 2, $\ldots$, n éléments. Totalement on a donc:*

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot 1^k \cdot 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Satz • Théorème 1.9 :
Mächtigkeit der Potenzmenge: • Puissance de l'ensemble de parties
Die Potenzmenge einer Menge mit n Elementen hat 2^n Elemente.
• *L'ensemble de parties d'un ensemble qui contient n éléments possède 2^n éléments.*

Eine Menge mit n Elementen hat also genau 2^n Teilmengen.
• *Donc un ensemble avec n éléments contient exactement 2^n sous-ensembles.*

1.3.5 Kombination mit Wiederholung — Combinaison avec répétition

Hier sollen aus einer Menge mit n Elementen k Elemente ausgewählt werden, wobei jedes ausgewählte Element bei der Auswahl in der Menge dupliziert wird resp. nachgeliefert wird, so dass die Menge trotz Auswahl immer aus denselben Elementen besteht. Wie gross ist die Anzahl Auswahlmöglichkeiten?
• *Ici il faut choisir k éléments dans un ensemble avec n éléments. Chaque élément choisi se duplique dans l'ensemble de façon que l'ensemble reste toujours le même malgré le choix. Quel est le nombre des options quant au choix?*

Für die Berechnung dieser Anzahl ist es unwesentlich, ob die Menge $\mathcal{M}_n$ aus Kugeln, Losen oder Zahlen etc. besteht, d.h. welcher Natur die Elemente sind. Wir dürfen daher annehmen, es handle sich um die natürlichen Zahlen von 1 bis n: $\mathcal{M}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Wenn wir jetzt k Elemente (d.h. Zahlen) auswählen, so wollen wir diese immer ihrer Grösse nach aufreihen, statt sie bloss „auf einen Haufen zu legen". Wir reden hier von der *Standardanordnung*. Eine solche Auswahl $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ wird also immer in der Anordnung $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_k$ präsentiert. Dadurch wird die Anzahl der Auswahlmöglichkeiten ja nicht verändert.
• *Pour le calcul de ce nombre, il n'est pas essentiel si l'ensemble $\mathcal{M}_n$ consiste en boules, en billets de lotterie ou en nombres, c.-à.-d. quelle est la nature des éléments. Nous pouvons supposer par conséquent qu'il s'agit de nombres naturels de 1 jusqu'à n: $\mathcal{M}_n = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$. Si nous choisissons maintenant k éléments (c.-à.-d. des nombres), nous voulons les ranger l'un à côté de l'autre au lieu de les "mettre sur un tas". Nous parlons ici du rangement standard (configuration). Nous presentons donc un tel choix $\{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ toujours dans une disposition $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_k$. Par cela le nombre des options ne change pas.*

Wie ist nun dem Problem der Wiederholungen beizukommen? Die Idee, aus $k \cdot n$ Elementen auszuwählen, führt zu keinem Resultat, da die Elemente einer Auswahlmenge dann auf verschiedene Weise gewonnen werden können, was fälschlicherweise die Anzahl Auswahlmöglichkeiten erhöht. So geht es also nicht. Um der Sache beizukommen, muss man etwas weiter ausholen:
• *Comment résoudre le problème des répétitions? L'idée de choisir parmi $k \cdot n$ éléments ne mène à aucun résultat parce que les éléments d'un ensemble de choix peuvent être obtenus de façon différente ce qui augmente faussement le nombre des possibilités de chois. Donc ça ne va pas de cette manière. Pour venir à bout de la chose on doit aller chercher plus loin:*

Wir führen dazu $k - 1$ neue Elemente $J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$ ein und fügen diese der Menge $\mathcal{M}_n$ an. So erhalten wir eine neue Menge $\mathcal{M}_n^{k-1} = \{1, 2, 3, \ldots, n, J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}\}$ mit $n + k - 1$ Elementen. Die neu gültige Standardanordnung entspreche der hier gegebenen Aufzählung der Elemente: Die J_i werden hinten den Nummern nach angefügt. Dabei gelte für die Elemente J_i die folgende Interpretation: J_i ist eine Vorschrift oder Funktion, die auf jenen ausgewählten Standardanordnungen operiert, in denen sie selbst allenfalls vorkommt. Die durch J_i gegebene Vorschrift lautet: Ersetze das Symbol J_i in einer ausgewählten Standardanordnung durch das Element e_i derselben Auswahl, nachdem alle J_p mit $p < i$ schon ersetzt sind. Führt man alle diese Ersetzungen durch, so erhält man aus einer *primären Auswahl* die *Endstandardanordnung*. Da k Elemente auszuwählen sind, es aber nur $k - 1$ Elemente J_i gibt, kommt in einer Standardauswahl immer mindestens ein Element $e_j \in \mathcal{M}_n$ vor, in unserem Falle eine der gegebenen natürlichen Zahlen $1, 2, 3, \ldots, n$. J_i bewirkt somit immer eine Ersetzung durch ein weiter vorne vorkommendes Element in der Standardanordnung, also eine Duplikation. Da so jedes Element einmal ausgewählt und dann noch durch die J_i maximal $k - 1$ mal dupliziert werden kann, besteht die Möglichkeit, dass jedes Element von $\mathcal{M}_n$ dann k mal in der Endstandardanordnung vorkommen kann. Auf diese Art können alle Kombinationen mit Wiederholung gewonnen werden.
• *A cette intention nous introduisons $k - 1$ nouveaux éléments $J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$, les incluons dans l'ensemble $\mathcal{M}_n$. Ainsi nous recevons un nouveau ensemble $\mathcal{M}_n^{k-1} = \{1, 2, 3, \ldots, n, J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}\}$ à $n + k - 1$ éléments. La disposition standard nouvellement valable correspond à l'énumération des éléments donnée ici: Les J_i sont ajoutés derrière d'après les numéros. Pour les éléments J_i l'interprétation suivante est valable: J_i est une prescription ou fonction qui opère sur les dispositions standard choisies,*

dans lesquelles on les trouve elles–mêmes. La prescription donnée par J_i dit: Remplacer le symbole J_i dans une disposition standard choisie par l'élément e_i du même choix après avoir remplacé tous les J_p par $p < i$. Si on effectue tous ces remplacements, on obtient d'un choix primaire la disposition finale standard. Comme il faut choisir k éléments et comme il n'existent que $k-1$ éléments J_i, dans un choix standard on trouve toujours au moins un élément $e_j \in \mathcal{M}_n$, dans notre cas un des nombres naturels $1, 2, 3, \ldots, n$. J_i effectue par conséquent toujours un remplacement par un élément qui es situé plus à l'avant dans la disposition standard, donc une duplicata. Comme chaque élément peut être choisi une fois ainsi et après peut être dupliqué par un J_i au maximum $k-1$ fois, il existe la possibilité que chaque élément de $\mathcal{M}_n$ peut se trouver donc k fois dans la disposition standard finale. De cette façon peuvent être obtenues toutes les combinaisons avec répétition.

Beispiel: • Exemple:

Gegeben sei $\mathcal{M}_7 = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$. Daraus sollen 5 Elemente mit Wiederholung ausgewählt werden. Es ist dann $\mathcal{M}_7^{5-1} = \mathcal{M}_7^4 = \{1, 2, 3, \ldots, 7, J_1, J_2, J_3, J_4\}$.
• *Soit donné $\mathcal{M}_7 = \{1, 2, 3, \ldots, 7\}$. Dans cet ensemble il faut choisir 5 éléments avec répétitions. Il vaut donc: $\mathcal{M}_7^{5-1} = \mathcal{M}_7^4 = \{1, 2, 3, \ldots, 7, J_1, J_2, J_3, J_4\}$.*

Wählt man z.B. $(1, 5, 7, J_1, J_4)$ (in Standardanordnung), so wird wie folgt ersetzt: Zuerst $J_1 \mapsto 1$ (der Index 1 ist kleiner als der Index 4). Das ergibt $(1, 5, 7, 1, J_4)$ in Nicht–Standardanordnung und $(1, 1, 5, 7, J_4)$ in neuer Standardanordnung. Dann wird ersetzt $J_4 \mapsto 7$, was zur Standardanordnung $(1, 1, 5, 7, 7)$ führt.
• *Si on choisit par exemple $(1, 5, 7, J_1, J_4)$ (dans la disposition standard), il faut remplacer comme suit: D'abord $J_1 \mapsto 1$ (l'indice 1 est plus petit que l'indice 4). Ça donne $(1, 5, 7, 1, J_4)$ dans la disposition non–standard et $(1, 1, 5, 7, J_4)$ dans la nouvelle disposition standard. Alors on remplace $J_4 \mapsto 7$ ce qui mène à la disposition standard $(1, 1, 5, 7, 7)$.*

Ähnlich führt die Auswahl $(4, J_1, J_2, J_3, J_4)$ nach allen Ersetzungen zur Standardanordnung $(4, 4, 4, 4, 4)$.
• *Semblablement le choix $(4, J_1, J_2, J_3, J_4)$ mène à la disposition standard $(4, 4, 4, 4, 4)$ après tous les remplacements.*

Bei der Auswahl von 6 Elementen aus $\mathcal{M}_8$ führt die primäre Auswahl $(2, 3, 7, 8, J_2, J_4)$ auf die Endstandardanordnung $(2, 3, 3, 7, 7, 8)$.
• *Au choix de 6 éléments dans $\mathcal{M}_8$ le choix primaire mène à la disposition standard finale $(2, 3, 7, 8, J_2, J_4)$.*

Diese Beispiele machen klar, dass eine primäre Auswahl eindeutig einer Endstandardanordnung entspricht. Die Anzahl der auswählbaren primären Anordnungen ist gleich der Anzahl der Endstandardanordnungen, in welchen alle Elemente bis zu k mal wiederholt vorkommen können. Um $\bar{C}(k, n)$ zu finden, muss man also die Anzahl der primär auswählbaren Standardanordnungen bestimmen. Dort werden k Elemente aus den $n+k-1$ Elementen $1, 2, 3, \ldots, n, J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$ ausgewählt. Daher ist $\bar{C}(k, n) = C(k, n+k-1)$. Somit hat man:
• *Ces exemples montrent qu'un choix primaire correspond clairement à une disposition standard finale. Le nombre des dispositions primaires et sélectionnables est égal au nombre des dispositions standard finales, dans lesquelles tous les éléments figurent répétés jusqu' à k fois. Pour trouver $\bar{C}(k, n)$, on doit donc trouver le nombre des dispositions standard primaires sélectionnables. Là, k éléments sont choisis entre $n+k-1$ éléments $1, 2, 3, \ldots, n, J_1, J_2, \ldots, J_{k-1}$. Par conséquent on trouve $\bar{C}(k, n) = C(k, n+k-1)$. On a donc:*

Satz • Théorème 1.10
Kombinationen mit Wiederholung: • Combinaisons avec répétitions:

$$\bar{C}(k, n) = C(k, n+k-1) = \binom{n+k-1}{k}$$

Beispiel: • Exemple

Ein Abteilungsleiter hat 19 Ingenieure unter sich, von denen jeder als Projektleiter in Frage kommt. Es stehen 8 neue Projekte an, die wahrscheinlich nacheinander bearbeitet werden müssen. Wieviele Möglichkeiten bieten sich dem Abteilungsleiter, Projektleiter zu bestimmen, wenn auch in Betracht gezogen werden darf, dass im Extremfall derselbe Ingenieur allen 8 Projekten vorsteht?
• *Un chef de rayon dirige 19 ingénieurs desquels chacun est capable d'avoir la responsabilité pour un projet. 8 nouveaux projets sont à faire (en suspens), qui doivent être traités vraisemblablement l'un après l'autre. Combien de possibilités s'offrent au chef de rayon de nommer des responsables pour les projets, si on peut tirer en considération dans le cas extrême, que le même ingénieur assume (dirige) tous les 8 projets?*

Hier handelt es sich um eine Kombination mit Wiederholung. Aus 19 Ingenieuren werden 8 Projektleiter ausgewählt, wobei jeder mehrmals vorkommen darf. Es ist dann:
• *Ici, il s'agit d'une combinaison avec répétitions. Dans un ensemble de 19 ingénieurs, 8 responsables sont choisis de façon que chacun peut être nommé plusieurs fois. Il est donc:*

$$\bar{C}(8,19) = \binom{19+8-1}{8} = \binom{26}{8} = \frac{26!}{8!\cdot(26-8)!} = \frac{26!}{8!\cdot 18!} = 1562275 \approx 1.56228\,10^6.$$

1.4 Übungen — Exercices

Übungen finden sich in *DIYMU*, (Bibl.: wirz1) sowie in der klassischen Schulbuchliteratur für die Gymnasialstufe — oder speziell auch in der Literatur zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik.
• *On trouve des exercices dans DIYMU, (Bibl.: wirz1) ainsi que dans la littérature scolaire classique pour le niveau gymnasial ou spécialement aussi dans les manuels du calcul des probabilités et statistiques.*

Index

(Seitenzahlen vorläufig nur für die deutsche Version zur gemischtsprachigen Ausgabe vorhanden)

• *(Provisoirement seulement la version allemande disponible)*

allgemeine Rekursion 8
Anzahlfunktionen 7
Anzahlproblem 7

Binomialkoeffizient 21

Eulersche Zahl e 8

Fakultät 7
Fakultät 7

Induktionsaxiom 7
induktiv 7

Kombination mit Wiederholung 18
Kombinatorik 7

lexikographischen Anordnung 10

Palcalsches Dreieck 21
Peano 7
Permutation 11
Permutationen mit Wiederholung 14
Potenzmenge 23
primitive Rekursion 8

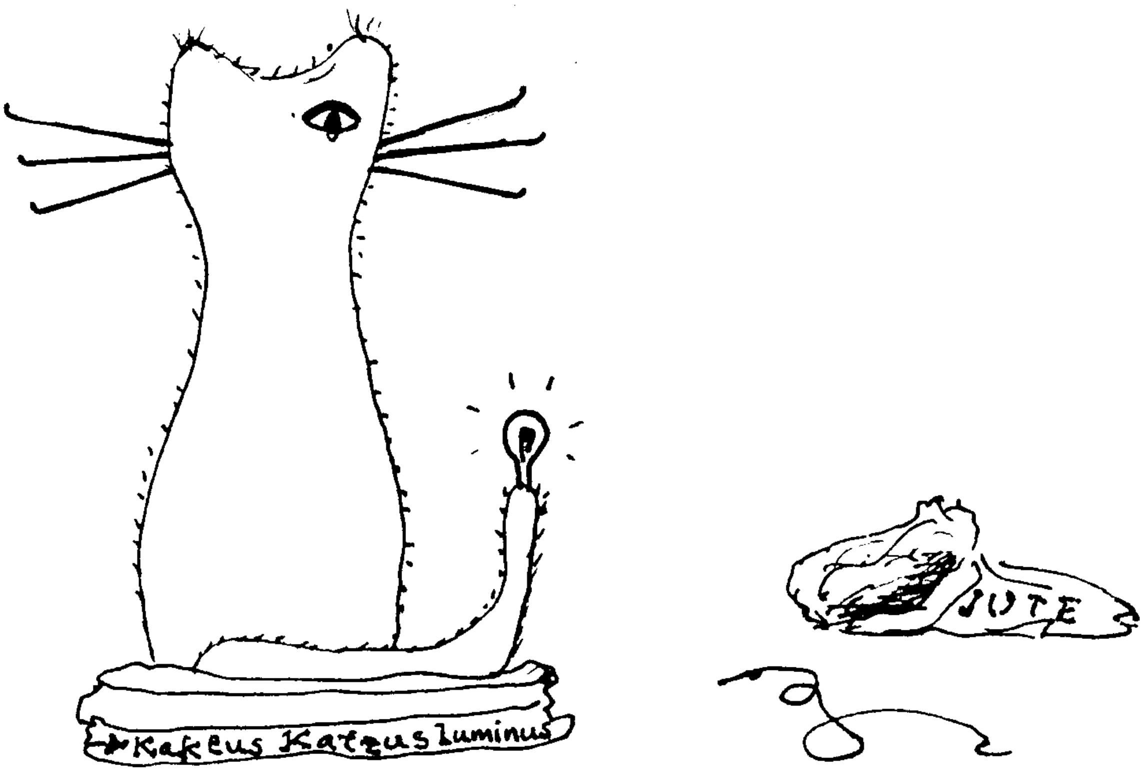
Rekursion 7
rekursive Funktion 8
rekursive Relation 8

Standardanordnung 24
Stirling 8

Variation mit Wiederholung 18
Variation ohne Wiederholung 17
Verankerung 7
Vererbung 7

wiederholt auswählbar 18

Abbildung 1.6: … Kaktus Katzus • *Sans possibilité de traduction* …



Literaturverzeichnis

[1] Fachlexikon *a b c*. Verlag Harri Deutsch Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich. Dudenverlag (Bibl.: abc)

[2] Brenner, Lesky. Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler. AULA-Verlag Wiesbaden (Bibl.: brennerlesky)

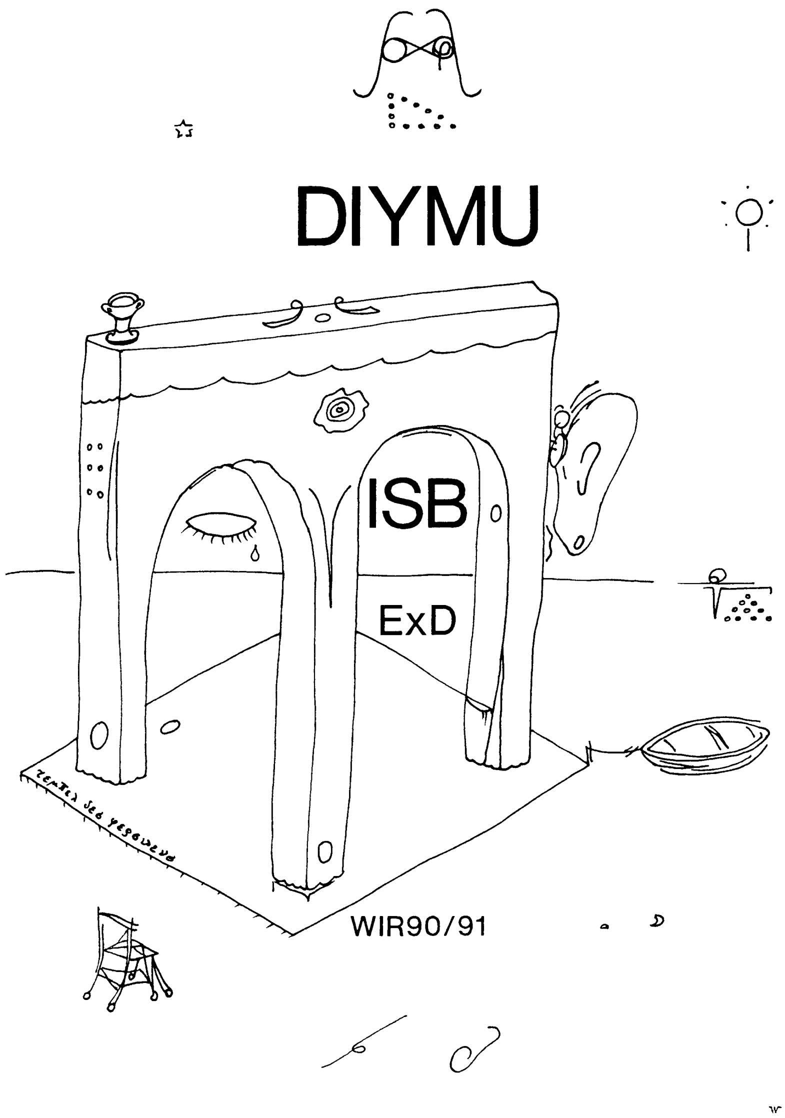
[3] Claus, Schwill. Schüler–Duden, Die Informatik. Bibliographisches Institut Mannheim, Wien, Zürich. Dudenverlag (Bibl.: clausschwill)

[4] Iyanaga, Kawada. Encyclopedic Dictionary of Mathematics. MIT Press, Cambridge Mass., London GB (Bibl.: iyanagakawada)

[5] Meschkowski. Mathematisches Begriffswörterbuch. BI Hochschultaschenbücher. Bibliographisches Institut Mannheim (Bibl.: meschkowski)

[6] Vom Autor. Mathematik für Ingenieure *Teile 1 ff* (Bibl.: wirz)

[7] Vom Autor. *DIYMU* (Do it yourself Mathematik Übungsbuch). Ingenieurschule Biel 1991 (Bibl.: wirz1)


DIYMU
ISB
ExD
WIR90/91